W Y D A W N I C T W O   P O L I T E C H N I K I   Ś L Ą S K I E J   W   G L I W I C A C H

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2018
Seria: ORGANIZACJA I ZARZĄDZANIE z. 130

POMIAR RYZYKA PORTFELI INWESTYCYJNYCH ZBUDOWANYCH NA PODSTAWIE CHARAKTERYSTYKI TEORII CHAOSU

Katarzyna ZEUG-ŻEBRO[1], Monika MIŚKIEWICZ-NAWROCKA[2]

[1]Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katowice; katarzyna.zeug-zebro@ue.katowice.pl
[2]Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Katowice; monika.miskiewicz@ue.katowice.pl

Streszczenie: Zarządzanie ryzykiem jest bardzo ważnym zagadnieniem związanym z inwestowaniem na giełdzie. W ramach analizy portfelowej, która wykorzystywana jest między innymi do tego celu, wykazuje się, że umożliwia ona wyeliminowanie znacznej części ryzyka towarzyszącego instrumentom finansowym i konstruowanie takiego portfela inwestycyjnego, który będzie się charakteryzował optymalnym dla danego inwestora poziomem ryzyka. Głównym celem pracy będzie próba zdywersyfikowania ryzyka portfela akcji, zbudowanego na podstawie miary wywodzącej się z teorii chaosu deterministycznego, tj. wymiaru fraktalnego.

Słowa kluczowe: analiza portfelowa, ryzyko inwestycyjne, wymiar fraktalny.

MEASUREMENT OF THE INVESTMENT PORTFOLIO RISK CONSTRUCTED ON THE CHARACTERISTIC OF CHAOS THEORY

Abstract: Risk management is a very important issue related to investing in the stock market. As part of the portfolio analysis, which is used for this purpose, it is shown that it enables elimination of a significant part of risk accompanying financial instruments and construction of such investment portfolio that will be characterized by the risk level optimal for a investor. The main aim of the work will be an attempt to diversify the risk of the portfolio of shares, constructed on the basis of a measure coming from the theory of deterministic chaos, ie the fractal dimension.

Keywords: portfolio analysis, investment risk, fractal dimension.

1. Wprowadzanie

Teorię zarządzania portfelem inwestycyjnym i metody efektywnego doboru aktywów zapoczątkował w 1952 roku Markowitz. Jego idee zostały rozwinięte przez Sharpe'a (1963), który wprowadził, m.in. model jednowskaźnikowy, upraszczający klasyczną teorię Markowitza (Tarczyński, 2014). W kolejnych latach Sharpe, Lintner (1965a, 1965b) i Mossin (1966) opracowali model wyceny dóbr kapitałowych CAPM. Model ten służył nie tylko wycenie papierów, ale także ocenie efektywności zarządzania portfelem i analizie wszelkich poczynań na rynkach finansowych.

Alternatywą dla klasycznych modeli może być konstrukcja portfeli inwestycyjnych na podstawie miary wywodzącej się z teorii chaosu deterministycznego, tj. wymiaru fraktalnego. Wybór tej charakterystyki wynika z jej interpretacji, tj. pozwala ona na ocenę ryzyka papierów wartościowych. Walory, których szeregi stóp zwrotu mają większy wymiar fraktalny, są bardziej zmienne, a to oznacza, że są bardziej ryzykowne (Orzeszko, 2010).

Celem artykułu była budowa portfeli optymalnych wyznaczonych na podstawie nieklasycznej miary ryzyka, jaką jest wymiar fraktalny oraz porównanie ich z klasycznymi modelami Markowitza i Sharpa. Do oszacowania wymiaru posłużyła analiza przeskalowanego zakresu. W badaniach wykorzystano szeregi czasowe utworzone z cen zamknięcia spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie wchodzących w skład indeksu WIG 20[1]. Dane obejmowały okres od 03.01.2017 do 18.06.2018. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programów napisanych w języku programowania Delphi oraz pakietu Microsoft Excel.

2. Pomiar ryzyka portfela inwestycyjnego

Ryzyko jest drugim, obok stopy zwrotu, głównym kryterium oceny każdej inwestycji kapitałowej. Wyróżnić należy trzy klasyczne grupy miar tego ryzyka, tj. miary zagrożenia, wrażliwości oraz najczęściej stosowane miary zmienności.

Miary zagrożenia są oparte na koncepcji ryzyka rozumianego negatywnie, czyli niechciane przez inwestora stopy zwrotu bądź odchylenia cen od spodziewanych ich poziomów. Miary te identyfikują się z sytuacją zagrożenia stratą, uwzględniają najgorsze możliwe warunki.

Miary wrażliwości informują o wpływie różnych czynników ryzyka na ceny papierów wartościowych. Zatem im większa jest wrażliwość ceny papierów wartościowych na zmiany czynników ją determinujących, tym większe jest ich ryzyko. Znaną i powszechnie używaną

[1] Portfel indeksu WIG 20 po korekcie kwartalnej 15.12.2017 (według stanu na 17.11.2017).

miarą wrażliwości jest współczynnik beta, będący jedną z miar ryzyka rynkowego (Ostrowska, 2007).

Miary zmienności odzwierciedlają zmiany cen i stóp zwrotu papierów wartościowych na podstawie rozproszenia ich rozkładu, a w efekcie uśredniają ryzyko. Miary te traktują ryzyko nie tylko jako zagrożenie, lecz także jako możliwość osiągnięcia dodatkowych zysków. Wśród nich należy wymienić miary bezwzględne, m.in. wariancja stopy zwrotu, odchylenie standardowe stopy zwrotu oraz miary względne, tj. współczynnik zmienności stóp zwrotu.

Wymiar fraktalny jest również jedną z miar zmienności. Określa on stopień poszarpania wykresu szeregu czasowego, co pozwala przyjąć, że im większy wymiar szeregu, tym większa jego zmienność. W takim razie papiery wartościowe, których szeregi stóp zwrotu mają większy wymiar, są bardziej zmienne, a to oznacza, że są bardziej ryzykowne.

2.1. Współczynnik βeta

Współczynnik βeta zwany współczynnikiem agresywności akcji, jest miarą wrażliwości dochodu z danej akcji na statystyczną zmienność całego rynku papierów wartościowych, czyli jest miarą jej wrażliwości w stosunku do akcji przeciętnego ryzyka. Pojęcie akcji przeciętnego ryzyka jest utożsamiane z akcją wykazującą tendencje do zmian kursu (stopy zwrotu) w górę i w dół wraz z ogólną tendencją na rynku giełdowym. Współczynnik βeta informuje, o ile procent w przybliżeniu wzrośnie stopa zwrotu danej akcji, gdy stopa zwrotu indeksu rynku (portfela rynkowego) wzrośnie o 1%. Współczynnik ten dla danej akcji (portfela) może przyjmować różne wartości odzwierciedlające siłę i kierunek jej reakcji na zmiany indeksu giełdowego. Współczynnik βeta *i*-tej akcji (β_i), będący względną miarą ryzyka rynkowego, ustala się na podstawie wzoru:

$$\beta_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(R_{it} - \overline{R}_i\right)\cdot\left(R_{Mt} - \overline{R}_M\right)}{\sum_{t=1}^{n}\left(R_{Mt} - \overline{R}_M\right)^2}, \tag{1}$$

gdzie:

n – liczba okresów z których pochodzą obserwacje stóp zwrotu,

R_{it} – stopa zwrotu *i*-tej akcji w *t*-tym okresie,

R_{Mt} – stopa zwrotu indeksu rynku w *t*-tym okresie,

$\overline{R}_i$ – średnia arytmetyczna stóp zwrotu *i*-tej akcji,

$\overline{R}_M$ – średnia arytmetyczna stóp zwrotu indeksu rynku (Ostrowska, 2007).

2.2. Wymiar fraktalny

Wymiar fraktalny bada, w jakim stopniu analizowany obiekt geometryczny czy też szereg wypełnia przestrzeń, w której jest zanurzony (Orzeszko, 2010). Jego cechą charakterystyczną jest fakt, że może on przyjmować wartości niecałkowite, np. krzywa na płaszczyźnie ma wymiar z przedziału [1, 2].

Wymiar fraktalny (zwany również pojemnościowym) danego obiektu geometrycznego A można obliczyć, szacując minimalną liczbę domkniętych hipersześcianów o boku długości ε, potrzebnych do jego pokrycia. Wymiar ten wyznacza się w oparciu o następujący wzór:

$$D(A) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{\ln L(A, \varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \tag{2}$$

gdzie $L(A, \varepsilon)$ jest minimalną liczbą hipersześcianów o boku długości ε.

Jedną z procedur pozwalających na obliczanie wymiaru fraktalnego $D(N)$ szeregu czasowego jest analiza przeskalowanego zakresu lub w skrócie analiza *R/S*. Metoda ta polega w pierwszej kolejności na szacowaniu wartości wykładnika Hursta H, a następnie wyznaczeniu wymiaru fraktalnego zgodnie z formułą (Zwolankowska, 2000):

$$D(N) = 2 - H. \tag{3}$$

Przeprowadzając analizę szeregów czasowych, np. cen zamknięcia akcji, wykres zależności ceny od czasu przekształca się w wykres podwójnie logarytmiczny przedstawiający zależność logarytmu *R/S* od logarytmu liczby obserwacji. Algorytm wyznaczania współczynnika *R/S*, którego wartość pozwala na wyznaczenie wykładnika Hursta przebiega w następujących etapach:

Krok 1.

Szereg $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ zostaje przekształcony w ciąg $m = N - 1$ logarytmicznych stóp zwrotu:

$$y_k = \log\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{4}$$

Krok 2.

Niech $T, q \in N$ i $T \cdot q = m$, wówczas istnieje T podprzedziałów I_j, każdy o długości q, $j = 1, ..., T$. Ponadto niech każdy składnik podprzedziału I_j będzie oznaczony przez y_{ij}, gdzie $i = 1, ..., q$. Średnia wartość dla j-tego podciągu wynosi:

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{q} y_{ij}}{q}. \tag{5}$$

Krok 3.

W kolejnym kroku analizy każdy podciąg zostaje scentrowany poprzez odjęcie średniej arytmetycznej:

$$z_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_j, \tag{6}$$

i zdefiniowanie ciągu sum częściowych z_{ij}:

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^{i} z_{lj}, \qquad i = 1, 2, \ldots, q, \quad j = 1, 2, \ldots, T. \tag{7}$$

Krok 4.

Następnie należy obliczyć rozstępy skumulowanych szeregów czasowych według wzoru:

$$R_j = \max(p_{ij}) - \min(p_{ij}). \tag{8}$$

Krok 5.

Kolejny etap algorytmu to wyznaczanie rozstępów przeskalowanych dla każdego skumulowanego szeregu czasowego, tzn. każdy rozstęp zostaje podzielony przez odchylenie standardowe tego szeregu:

$$\alpha_{jq} = R_j / S_j, \tag{9}$$

gdzie: $S_j = \sqrt{\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} z_{ij}^2}$.

Krok 6.

Ostatecznie należy obliczyć:

$$(R/S)_q = (1/T)\sum_{j=1}^{T} \alpha_{jq}. \tag{10}$$

Stosując tę procedurę dla kolejnych q (będących kolejnymi dzielnikami liczby m, spełniających warunek $10 \le q \le \frac{m}{2}$) otrzymuje się ciąg wartości ($(R/S)_q = cq^H$). Podstawą analizy R/S jest ich potęgowa zależność od q:

$$(R/S)_q = cq^H, \tag{11}$$

lub równoważnie:

$$\ln((R/S)_q) = \ln c + H \ln q. \tag{12}$$

gdzie: H jest wykładnikiem Hursta, c jest stałą

Wykładnik Hursta jest współczynnikiem kierunkowym regresji liniowej (12).

3. Portfele inwestycyjne – zadania optymalizacyjne

Jednym ze sposobów zmniejszenia ryzyka inwestycji jest dywersyfikacja portfela zaproponowana przez Markowitza (1952). Polega ona na zwiększaniu liczby papierów wartościowych, do momentu osiągnięcia zerowego udziału wariancji poszczególnych akcji w ryzyku całkowitym portfela (Zadanie 1).

Inną często stosowaną metodą budowy portfela inwestycyjnego jest jednoczynnikowy model rynku (Zadanie 2) opracowany przez Sharpe'a (1963). Opisuje on powiązania zmian wartości akcji z zachowaniem całego rynku. W modelu tym założono, że stopy zwrotu akcji zależą od działania czynnika rynku, tj. giełdy papierów wartościowych. Zaobserwowano bowiem, że na większości rozwiniętych giełd, spadkowi/wzrostowi ich stóp zwrotu mierzonemu spadkiem/wzrostem indeksu giełdowego towarzyszy spadek/wzrost cen większości akcji.

Tabela 1.
Zadania optymalizacyjne

Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3
$\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)\right)$ $R_p \geq R_0$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ $x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m$	$\min\left(S_M^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{m} (x_i \cdot S_{ei})^2\right)$ $R_p^{\beta} \geq R_0$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ $x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m$	$\min\left(\sum_{i=1}^{m} D_i(N) x_i\right)$ $R_p \geq R_0$ $\sum_{i=1}^{m} S_i x_i \leq S_0$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ $x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m$

Zadanie 4
$\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i x_j \operatorname{cov}(R_i, R_j)(1 - D_i(N))(1 - D_j(N))\right)$ $R_p \geq R_0$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ $x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m$

Zadanie 5
$\min\left(S_M^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} D_i(N) \cdot x_i + \sum_{i=1}^{m} (x_i \cdot S_{ei})^2\right)$ $R_p^{D} \geq R_0$ $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ $x_i \geq 0, \quad i = 1,...,m$

gdzie: R_p - oczekiwana stopa zwrotu portfela m akcji:

$$R_p = \sum_{i=1}^{m} x_i R_i \, , \tag{13}$$

$$R_P^{\beta} = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \alpha_i^{\beta} + R_M \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \beta_i + \varepsilon_P \, , \tag{14}$$

$$R_P^{D} = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \alpha_i^{D} + R_M \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot D_i(N) + \varepsilon_P \, , \tag{15}$$

$$\alpha_i^{\beta} = R_i - \beta_i \cdot R_M \, , \tag{16}$$

$$\alpha_i^{D} = R_i - D_i(N) \cdot R_M \, , \tag{17}$$

gdzie:
R_i - oczekiwana stopa zwrotu *i*-tej akcji,
x_i, x_j - udziały *i*-tej i *j* - tej akcji w portfelu,
m – liczba akcji w portfelu,
$\operatorname{cov}(x_i, x_j)$- kowariancja między *i*-tą a *j*-tą akcją,
β_i - współczynnik βeta *i*-tej akcji,
R_M – stopa zwrotu indeksu rynkowego,
$D_i(N)$ - wymiar fraktalny *i*-tej akcji,
R_0 - oczekiwana stopa zwrotu dla spółek,
$S_{ei}{}^2$- wariancja składnika losowego *i*-tej akcji.

Propozycją autorów jest budowa portfeli inwestycyjnych w oparciu o wymiar fraktalny (zadania optymalizacyjne 3 i 4 (Tabela1)) (Zeug-Żebro, 2016). W zadaniu 3 wartości tego wymiaru są kryterium podlegającym optymalizacji. Jest to zmiana w stosunku do klasycznych koncepcji opartych na stopie zwrotu i odchyleniu standardowym. Budując portfel o kryterium *D*(*N*), wybiera się układ najlepszy ze względu na poziom ryzyka (mierzonego wymiarem fraktalnym), a odchylenie standardowe i stopa zwrotu są jedynie warunkami ograniczającymi. W zadaniu 4 skorygowano wzór na klasyczną wariancją portfela (wg Markowitza) o poziom miary ryzyka, tj. wymiar fraktalny. W tym przypadku, model budowy portfela przyjmuje postać zadania 4 (Tabela 1).

Inną propozycją jest modyfikacja modelu Sharpa (zadanie 5). W podejściu tym minimalizowanie jest ryzyko portfela (z zadania 2) z dodatkowym uwzględnieniem wymiaru fraktalnego zamiast współczynnika βeta (Tabela 1).

4. Zastosowanie proponowanych modeli do budowy portfela papierów wartościowych

Badaniu poddano szeregi finansowe[2] utworzone z cen zamknięcia spółek notowanych na GPW w Warszawie wchodzących w skład indeksu WIG20 (Tabela 2). Dodatkowym warunkiem wyboru spółek, była dodatnia wartość oczekiwanej stopy zwrotu. W analizie wykorzystano dane obejmujące okres od 03.01.2017 do 18.06.2017.

Przeprowadzone badania empiryczne pozwoliły wyznaczyć wymiar fraktalny wykorzystując analizę przeskalowanego zakresu. Otrzymane wartości przedstawiono

[2] Dane pochodzą z archiwum plików programu Omega, dostępnych na stronie internetowej www.bossa.pl [dostęp:27.06.2018].

w Tabeli 2[3], gdzie dodatkowo przedstawiono wartości oczekiwanej stopy zwrotu oraz odchylenia standardowego stóp zwrotu badanych szeregów czasowych (obliczenia wykonano dla dziennej stopy zwrotu)[4].

Tabela 2.
Wyniki szacowania wymiaru fraktalnego, odchylenia standardowego, oczekiwanej stopy zwrotu dla szeregów czasowych wybranych spółek

Spółka	$D_i(N)$	S_i	R_i	Spółka	$D_i(N)$	S_i	R_i
ALIOR	1,52490	0,01865	0,36228	MBANK	1,49400	0,02117	0,37007
BZWBK	1,59100	0,01821	0,19466	ORANGEPL	1,45870	0,01908	0,09936
CCC	1,44260	0,01911	0,25763	PGE	1,45710	0,01881	0,17118
ENERGA	1,43770	0,01966	0,31644	PGNIG	1,56300	0,01710	0,09238
JSW	1,43930	0,02468	0,54887	PKNORLEN	1,41000	0,02083	0,27811
KGHM	1,39090	0,01992	0,14752	PKOBP	1,50740	0,01697	0,40610
LOTOS	1,41150	0,02266	0,45971	PZU	1,47570	0,01480	0,25925

W tabeli 3 przedstawiono wartości współczynników β i α oraz wariancji składnika losowego i-tej akcji.

Tabela 3.
Wyniki szacowania współczynników β i α oraz wariancji składnika losowego i-tej akcji

Spółka	β	α	S_{ei}^2	Spółka	β	α	S_{ei}^2
ALIOR	0,90811	0,17578	0,03117	MBANK	1,37198	0,08829	0,00808
BZWBK	1,07440	-0,02600	0,00091	ORANGEPL	0,41114	0,01492	0,00057
CCC	0,43630	0,16802	0,02858	PGE	0,79358	0,00820	0,00037
ENERGA	0,65116	0,18271	0,03373	PGNIG	0,93506	-0,09966	0,01015
JSW	1,21625	0,29908	0,08993	PKNORLEN	1,24015	0,02341	0,00085
KGHM	1,24997	-0,10919	0,01218	PKOBP	1,25961	0,14741	0,02188
LOTOS	1,25012	0,20296	0,04157	PZU	0,86718	0,08115	0,00674

W następnym etapie analizy skonstruowano dziesięć portfeli inwestycyjnych, na podstawie wcześniej zaproponowanych zadań optymalizacyjnych (Tabela 1). W skład portfeli oznaczonych numerami 1 – 5 weszły spółki będące odpowiednio rozwiązaniem zadań optymalizacyjnych 1 - 5. W portfelach 1’ - 5’ umieszczono spółki będące rozwiązaniem zadań 1-5, dla których przyjęto dodatkowe założenie postaci $D_i(N) \leq 1{,}5$. Założenie to wskazuje szeregi wolnozmienne (persystentne, tzn. im niższa wartość wymiaru fraktalnego, tym zjawisko wzmacniania trendu jest silniejsze).

Do obliczenia udziałów poszczególnych spółek w portfelu wykorzystano narzędzie S*olver* będące dodatkiem arkusza kalkulacyjnego *Excel*. W tabelach 4 i 5 przedstawiono udziały poszczególnych spółek oraz wartość oczekiwaną i ryzyko zbudowanych portfeli. Znak „-” postawiono przy spółkach, które nie weszły w skład portfela optymalnego.

[3] W celu oszacowania wymiaru fraktalnego posłużono się programami autora napisanym w języku programowania Delphi
[4] W obliczeniach wykorzystano dane z okresu 3.01.2017 -15.12.2017.

Tabela 4.
Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach.

Spółka	Udziały akcji				
	Portfel 1	Portfel 2	Portfel 3	Portfel 4	Portfel 5
ALIOR	0,08626	0,02513	-	0,03835	0,02337
BZWBK	-	0,10991	-	-	0,11116
CCC	0,13221	0,01453	-	0,15836	0,01234
ENERGA	0,09840	0,01860	-	0,13701	0,01691
JSW	0,00839	0,01662	-	0,00918	0,01590
KGHM	0,01112	-	0,55544	0,07303	-
LOTOS	0,00336	0,02733	0,44456	0,02029	0,02654
LPP	0,12408	0,00972	-	0,11565	0,00895
MBANK	-	0,09497	-	-	0,09427
ORANGEPL	0,10807	-	-	0,12059	-
PGE	-	0,09489	-	0,00271	0,08577
PGNIG	0,03142	-	-	-	-
PKNORLEN	0,09335	0,49010	-	0,12565	0,51138
PKOBP	0,06407	0,04215	-	0,03177	0,04081
PZU	0,17318	0,05605	-	0,15638	0,05259
TAURONPE	0,06610	-	-	0,01102	-
Oczekiwana stopa zwrotu portfela	0,28631	0,28631	0,28631	**0,28631**	0,28631
Ryzyko portfela	0,00850	0,01289	0,01685	**0,00390**	0,01317

Tabela 5.
Stopa zwrotu, ryzyko i udziały akcji w wyznaczonych portfelach z warunkiem $D_i(N) \leq 1{,}5$

Spółka	Udziały akcji				
	Portfel 1’	Portfel 2’	Portfel 3’	Portfel 4’	Portfel 5’
CCC	0,15231	0,02996	-	0,10556	0,01368
ENERGA	0,14018	0,03475	-	0,09581	0,02508
JSW	0,04874	0,03563	-	0,06451	0,02937
KGHM	0,01433	0,01408	0,47128	0,06554	-
LOTOS	0,02920	0,04525	0,52872	0,07296	0,04705
LPP	0,16400	0,02850	-	0,12518	0,01644
MBANK	0,00393	0,11178	-	0,06555	0,15512
ORANGEPL	0,11851	0,01349	-	0,08741	-
PGE	0,00733	0,10927	-	0,07622	-
PKNORLEN	0,10109	0,50579	-	0,08140	0,65401
PZU	0,22039	0,07151	-	0,15986	0,05925
Oczekiwana stopa zwrotu portfela	0,31258	0,29687	0,31258	**0,31258**	0,31258
Ryzyko portfela	0,00896	0,01316	0,01709	**0,00677**	0,01567

Analizując dane przedstawione w tabelach 4 i 5 można stwierdzić, że najniższym poziomem ryzyka charakteryzują się portfele wyznaczone na podstawie miary pochodzącej z teorii chaosu deterministycznego (portfele 4 i 4’).Wynik ten pokazał, że modyfikacja funkcji celu w modelu 4, związana z dołączeniem do klasycznej miary ryzyka, wymiaru fraktalnego, korzystnie wpływa na poziom ryzyka związanego z inwestycją w taki portfel. Propozycja zamiany w modelu jednoczynnikowym Sharpa (współczynnika βeta na wymiar fraktalny), nie przyniosła oczekiwanych rezultatów; świadczą o tym wyniki uzyskane dla portfeli 5 i 5', dla których zaobserwowano brak wzrostu wartości stopy zwrotu i niestety wyższy poziom ryzyka.

W kolejnym kroku badań, dla wyznaczonych portfeli przeprowadzono symulację inwestycji. Założono, że inwestor 18 grudnia 2017r. zainwestował 10 000 zł w akcje poszczególnych portfeli (przyjęto udziały zgodnie z wynikami uzyskanymi w tabelach 4 i 5). Zakładając dodatkowo niezmienność udziałów akcji w portfelach oszacowano początkowe (18.12.2017) oraz końcowe (18.06.2018) wartości oraz porównano je z pasywną strategią inwestowania tj. stopą zwrotu WIG20 (Tabela 6).

Tabela 6.
Stopa zwrotu dla wyznaczonych portfeli optymalnych

Wartość portfela [zł]	**Portfel 1**	**Portfel 2**	**Portfel 3**	**Portfel 4**	**Portfel 5**
18.12.2017	9940,46	9910,70	9909,18	9940,59	9909,18
18.06.2018	8647,92	8543,83	8538,36	8618,81	8538,36
Stopa zwrotu [%]	-13,0028	-13,7919	-13,8338	-13,2968	-13,8338
Porównanie z WIG20 [zł]	-285,32	-389,42	-394,89	-314,44	-394,89
Wartość portfela [zł]	**Portfel 1'**	**Portfel 2'**	**Portfel 3'**	**Portfel 4'**	**Portfel 5'**
18.12.2017	9939,42	9902,02	9999,99	9935,92	9900,33
18.06.2018	8735,55	8473,43	9999,86	8745,49	8463,75
Stopa zwrotu	-12,1121%	-14,4273%	-0,0013%	-11,9811%	-14,5104%
Porównanie z WIG20 [zł]	-197,70	-459,81	1066,62	-187,76	-469,49

W analizowanym okresie dla prawie wszystkich portfeli zaobserwowano stratę. Wyjątkiem był portfel 3' wygenerowany według zadania 3 z dodatkowym założeniem $D_i(N) \leq 1{,}5$. Porównując portfele z pasywną strategią inwestowania, czyli z portfelem rynkowym odnotowano straty w wysokości od 187,76 zł (portfel 4') do 469,49 zł (portfel 5'). Jedynie w przypadku portfela 3' zaobserwowano zysk wysokości 1066,62 zł.

5. Podsumowanie

W pracy zaproponowano koncepcję budowy portfeli papierów wartościowych zmodyfikowanych o wymiar fraktalny. Stanowiły one alternatywę dla klasycznych modeli Markowitza i Sharpa. W badaniu empirycznym rozpatrzono trzy warianty nowego podejścia (zadania optymalizacyjne 3-5) oraz modele Markowitza i jednoczynnikowy model rynku. Analizą objęto lata 2017-2018 (do czerwca). Badania potwierdziły zasadność łączenia analizy portfelowej z elementami wywodzącymi się z teorii chaosu deterministycznego. Wyniki zachęcają do dalszych badań w tym kierunku.

Bibliografia

1. Lintner, J. (1965a). Security Process, Risk and Maximal Gains from Diversification. *Journal of Finance*, 20.
2. Lintner, J. (1965b). The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47.
3. Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 77-91.
4. Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34.
5. Orzeszko, W. (2010). Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania. *Acta Universitatis Nicolai Copernici. Ekonomia XLI. Nauki Humanistyczno-Społeczne*, z. 397, 57-70.
6. Ostrowska, E. (2007). *Rynek kapitałowy: funkcjonowanie i metody oceny*. Warszawa: Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne.
7. Sharp, W. (1963). A Simplified Model for Portfolio Analysis. *Management Science*, 9, 2.
8. Tarczyński, W. (2014). Ocena różnych wariantów fundamentalnego portfela papierów wartościowych. *Prace naukowe UE we Wrocławiu* (371). Wydawnictwo UE we Wrocławiu, 298-310.
9. Zeug-Żebro, K. (2016). Badanie wpływu zastosowania wymiaru fraktalnego na konstrukcję portfela optymalnego. *Studia Ekonomiczne*, nr 265, 120-132.
10. Zwolankowska, D. (2000). Metoda segmentowo-wariacyjna. Nowa propozycja liczenia wymiaru fraktalnego. *Przegląd Statystyczny*, R. 47, z. 1-2, 209-224.