



## Przybliżone modelowanie układu „pojazd szynowy–nawierzchnia–podłoże”

TOMASZ LEWANDROWSKI, PAWEŁ MUZOLF, WŁODZIMIERZ IDCZAK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,  
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, tomasz.lewandrowski@wat.edu.pl,  
pawel.muzolf@wat.edu.pl, wlodzimierz.idczak@wat.edu.pl

**Streszczenie.** W artykule analizowano układ pojazd szynowy–nawierzchnia kolejowa–podłoże gruntowe jako belki Bernoulliego-Eulera na podłożu jednowarstwowym. Rozpatrywano następujące przypadki obciążeń konstrukcji nawierzchni kolejowej: a) statyczne obciążenie nawierzchni kolejowej pojazdem szynowym, b) pojazd porusza się ze stałą prędkością. W konsekwencji otrzymano równanie różniczkowe czwartego rzędu opisujące równanie linii ugięcia tak zamodelowanego układu. Dane materiałowe oraz parametry eksploatacyjne zostały określone poprzez poszczególne składniki równania. Do jego rozwiązania wykorzystano metodę różnic skończonych. Opisana została istota metody oraz podstawowe zagadnienia z nią związane takie jak: dobór kroku przestrzennego, dobór kroku czasowego, siatka czasowo-przestrzenna oraz numeryczny model obciążenia ruchomego. Celem autorów było określenie przydatności zastosowanej metody numerycznej przy rozwiązywaniu równania różniczkowego opisującego wybrany do analizy model nawierzchni kolejowej. Otrzymane wyniki porównano z wartościami obliczonymi w sposób analityczny. Opracowany uproszczony i sprawdzony model układu pojazd–nawierzchnia–podtorze zostanie wykorzystany w dalszym etapie pracy do analizy różnych rozwiązań technicznych (różne materiały i różne kształty elementów wchodzących w skład nawierzchni charakteryzujące się różnymi stałymi materiałowymi).

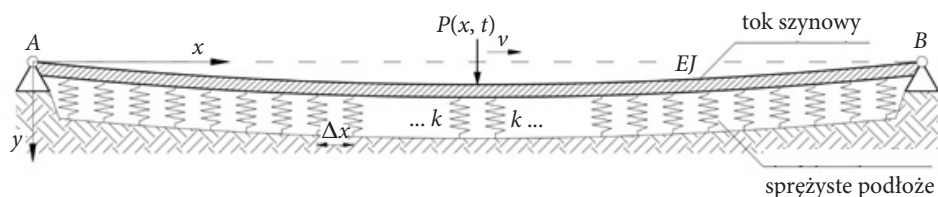
**Słowa kluczowe:** metody numeryczne, metoda różnic skończonych, nawierzchnia kolejowa, współczynnik dynamiczności obciążenia

DOI: 10.5604/01.3001.0010.1893

### 1. Model pojazd szynowy–nawierzchnia–podłoże gruntowe

Do modelowania układu pojazd szynowy–nawierzchnia–podłoże gruntowe wykorzystano model szyny — belki Bernoulliego-Eulera spoczywającej na sprężystym

podłożu o stałym współczynniku sprężystości podłoża. Ciągłe podparcie szyny w postaci sprężystego podłoża stanowi uproszczenie rzeczywistej konstrukcji nawierzchni kolejowej i zastępuje sprężystość pozostałych elementów konstrukcji nawierzchni — podkładów, przytwierdzeń i podtorza. Nawierzchnia kolejowa składa się z dwóch równoległe usytuowanych względem siebie szyn, tworzących tor, ułożonych na podkładach kolejowych, które są umieszczone na warstwie podsypki i podtorzu. Z uwagi na symetrię układu torowego do rozważań został przyjęty jeden tok szynowy. Analizowano przemieszczenia pionowe układu o jednym stopniu swobody pod obciążeniem statycznym i dynamicznym. Tok szynowy został obciążony ruchomą siłą  $P(x, t)$  reprezentującą pojazd o znanej masie i konstrukcji poruszający się po nawierzchni kolejowej ze znaną prędkością. Opisany model przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Model toku szynowego obciążonego dynamicznie (opracowanie własne)

Parametry szyny scharakteryzowane są przez moment bezwładności przekroju poprzecznego szyny, masę szyny w odniesieniu do jej jednostki długości oraz moduł Younga stali szynowej. Sprężyste podłożie, na którym oparta jest szyna, scharakteryzowane jest przez współczynnik sprężystości podłoża. Istotne parametry pojazdu szynowego, który obciąża układ, to nacisk na oś, rozstaw osi oraz prędkość przejazdu. Zestawienie parametrów w rozważanym modelu wraz z zastosowanymi oznaczeniami i jednostkami, w jakich wyrażone są wartości poszczególnych parametrów, przedstawiono w tabeli 1. Ponadto w tabeli tej zostały zamieszczone również typowe zakresy wartości podanych parametrów w zależności od rodzaju konstrukcji nawierzchni kolejowej.

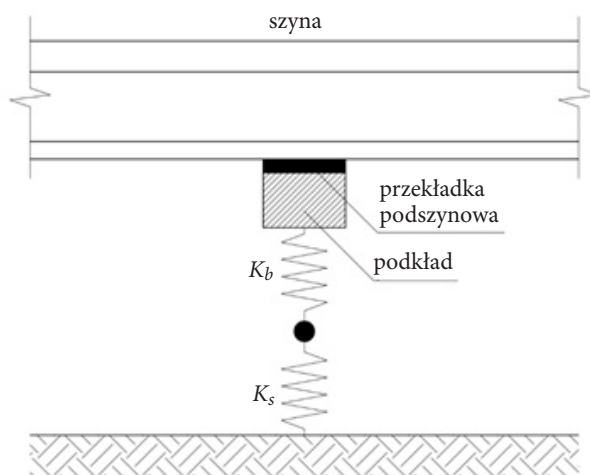
TABELA 1  
Zestawienie wykorzystywanych parametrów (opracowanie własne na podstawie [8, 10, 12])

Parametr	Oznaczenie	Jednostka	Wartość	Uwagi
moment bezwładności przekroju poprzecznego szyny	$J$	$m^4$	$1816,0 \cdot 10^{-8}$	szyna 49E1
			$3038,3 \cdot 10^{-8}$	szyna 60E1
			$3543,0 \cdot 10^{-8}$	szyna R65
masa szyny odniesiona do jednostki długości	$m$	$kg/m$	49,39	szyna 49E1
			60,21	szyna 60E1
			64,87	szyna R65

cd. tabeli 1

moduł Younga stali szynowej	$E$	GPa	210	stal szynowa
moduł sprężystości podłoża	$k$	MN/m <sup>2</sup>	34,5	dobrze utrzymana nawierzchnia podsypkowa (podkłady drewniane)
			69,0	nawierzchnia podsypkowa (podkłady betonowe)
			103,5	nawierzchnia podsypkowa przy zamarznętej warstwie podsypki
			92,0 ÷ 138,0	nawierzchnia bezpodsypkowa (warstwa nośna jako płyta betonowa)
nacisk na oś pojazdu szynowego	$P$	kN	100 ÷ 250	(w zależności od konstrukcji pojazdu szynowego)
rozstaw osi pojazdu szynowego	$R$	m	2,00 ÷ 4,00	
prędkość przejazdu pojazdu szynowego	$V$	km/h	20 ÷ 350	

Kluczowym elementem analizy nawierzchni kolejowej w rozważanym modelu Bernoulliego-Eulera jest właściwe określenie i dobranie parametru sprężystości podłoża  $k$ . Schemat sprężystego podparcia szyny został przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat sprężystego podparcia szyny:  $K_b$  — sztywność warstwy podsypki;  $K_s$  — sztywność podtorza (opracowanie własne na podstawie [2])

Współczynnik sprężystości podłoża może zostać obliczony przy wykorzystaniu poniższych zależności inżynierskich [2]:

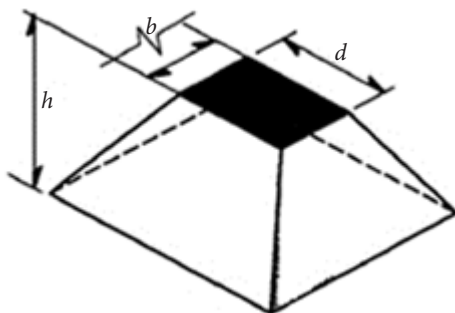
$$K_b = \frac{2E_b (d - b) \tan \Phi_1}{\log \left[ \frac{d(b + 2h \tan \Phi_1)}{b(d + 2h \tan \Phi_1)} \right]}, \quad (1.1)$$

gdzie:  $K_b$  — sztywność warstwy podsypki;  
 $E_b$  — moduł sprężystości podłużnej podsypki;  
 $\Phi_1$  — kąt tarcia wewnętrznego podsypki;  
 $d$  — długość obszaru, na którym działa obciążenie;  
 $b$  — szerokość obszaru, na którym działa obciążenie;  
 $h$  — grubość warstwy podsypki.

$$K_s = k_o (d + 2h_p \tan \Phi_2) (b + 2h_p \tan \Phi_2), \quad (1.2)$$

gdzie:  $K_s$  — sztywność podtorza;  
 $k_o$  — moduł sztywności materiału, z którego wykonano podtorze;  
 $\Phi_2$  — kąt tarcia wewnętrznego materiału, z którego wykonano podtorze;  
 $d$  — długość obszaru, na którym działa obciążenie;  
 $b$  — szerokość obszaru, na którym działa obciążenie;  
 $h_p$  — grubość podtorza.

Przedstawiona metoda nosi nazwę Metoda Piramidy Rozkładu Obciążeń (ang. *Pyramid Load Distribution Method*). W celu lepszego zobrazowania powyższych oznaczeń został zamieszczony poniższy rysunek wraz z oznaczeniem poszczególnych wielkości.



Rys. 3. Piramida rozkładu obciążeń w podsypce oraz podtorzu według [2]

Współczynnik sprężystości podłoża można obliczyć z poniższej zależności, jako sumę odwrotności współczynników sprężystości poszczególnych warstw nawierzchni i podtorza [2]:

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_p} + \frac{1}{K_t} + \frac{1}{aK_{bs}}, \quad (1.3)$$

gdzie:  $K_e$  — współczynnik sprężystości podłoża pod szyną [N/m];  
 $K_p$  — sztywność podkładki podszynowej [N/m];  
 $K_t$  — sztywność pionowa podkładu [N/m];  
 $K_{bs}$  — zastępcza sztywność podsypki oraz podtorza [N/m];  
 $a$  — współczynnik uwzględniający ciągłość ugięcia pomiędzy sąsiednimi podkładami.

Zalecane jest przyjmowanie współczynnika  $a$  jako 0,5. Z tego względu zastępczy współczynnik sprężystości podłoża jest opisany zależnością [2]:

$$k = \frac{K_e}{s}, \quad (1.4)$$

gdzie:  $s$  — rozstaw podkładów [m].

Scharakteryzowany powyżej model został opisany równaniem (1.5) wyprowadzonym w pracy [7]:

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} EJ + kw(x,t) + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{P(x,t)}{\Delta x}, \quad (1.5)$$

gdzie:  $w$  — przemieszczenie pionowe.

Warunki początkowe i brzegowe zapisano w rozdziale 2.

## 2. Model numeryczny

W celu numerycznego rozwiązania równania różniczkowego czwartego rzędu (1.5) wykorzystano metodę różnic skończonych (MRS). Polega ona na zastąpieniu operatorów różniczkowych operatorami różnicowymi. W ten sposób wyjściowe równanie różniczkowe zostaje zastąpione układem równań algebraicznych. Operaty różnicowe określa się na zbiorze punktów (inaczej siatce). Siatka składa się z pojedynczych elementów — węzłów, które powstają na skutek podzielenia rozważanego elementu (w tym przypadku szyny) na odcinki o niewielkiej długości ( $\Delta x$ ). Następnie bada się, jakie wartości poszukiwanych wielkości występują w poszczególnych punktach podziału [3].

W niniejszej pracy przyjęto założenie, że poszukiwane wartości funkcji pomiędzy poszczególnymi punktami podziału są połączone za pomocą fragmentów paraboli. Wówczas wzory na operaty różnicowe MRS dla drugiej i czwartej pochodnej są wyrażone jak poniżej:

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2}, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} = \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^4}. \quad (2.1b)$$

Podstawiając zależności (2.1a) oraz (2.1b) do zależności (1.5), otrzymano zależności na przemieszczenie pionowe szyny w poszczególnych węzłach siatki w przypadku obciążenia statycznego (2.2a) oraz dynamicznego (2.2b):

$$\frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^4} EJ + kw_i = \frac{P_i}{\Delta x}, \quad (2.2a)$$

gdzie:  $\Delta x$  — odległość między węzłami siatki podziału.

$$w_i^{j+1} = C \left\{ w_{i-2}^j - 4w_{i-1}^j + (6 + k_d)w_i^j - 4w_{i+1}^j + w_{i+2}^j \right\} + \frac{P_i^j \Delta t^2}{m \Delta x} + 2w_i^j - w_i^{j-1}, \quad (2.2b)$$

gdzie:  $\Delta t$  — odległość między poszczególnymi chwilami, w których wykonywane są obliczenia (w przypadku obciążenia dynamicznego);

$$C = -\frac{EJ \Delta t^2}{m \Delta x^4}, \quad k_d = \frac{k \Delta x^4}{EJ}.$$

Przyjęto założenie, że obciążenie działa na długości całego odcinka  $\Delta x$ . W porównaniu z obciążeniem siłą punktową obciążenie ciągłe lepiej odwzorowuje rzeczywisty punkt styku koła i szyny. Wartości przemieszczeń pionowych szyny zostały obliczone na początku i na końcu każdego odcinka dla przyjętego podziału.

Wykorzystując powyższe zależności, utworzono macierz współczynników układu równań MRS dla przypadku obciążenia statycznego (rys. 4) oraz siatkę czasowo-przestrzenną dla przypadku obciążenia dynamicznego (rys. 5).

W przypadku obciążenia statycznego rozwiązanie otrzymuje się po rozwiązaniu układu  $n$ -równań (gdzie  $n$  oznacza liczbę węzłów).

W przypadku obciążenia dynamicznego otrzymuje się formułę rekurencyjną, w której poszukiwaną wartość w danym węźle w danej chwili (kolor żółty na rysunku poniżej) oblicza się na podstawie obliczonych wcześniej wartości w poprzednich

chwilach. Jest to metoda jawna rozwiązywania równań różniczkowych przy pomocy MRS [6]. Składniki, które są wykorzystywane przy obliczaniu kolejnych wyników, zostały zaznaczone na rysunku kolorem zielonym.

nr węzła	war. brzegowe		węzły na jakie został podzielony tok szynowy															war. brzegowe		obciążenie		
	$W_{-1}$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$	$W_7$	...	$W_i$	...	$W_{n-5}$	$W_{n-4}$	$W_{n-3}$	$W_{n-2}$	$W_{n-1}$	$W_n$	$W_{n+1}$		$W_{n+2}$	
1	$-W_1$	0	$5+k_\xi$	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$P_s$
2	$-W_1$	0	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-W_n$	$P_s$
3	$-W_1$	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-W_n$	$P_s$
4	$-W_1$	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-W_n$	$P_s$
5	$-W_1$	0	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-W_n$	$P_s$
6	$-W_1$	0	0	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-W_n$	$P_s$
...	$-W_1$	0																			$-W_n$	$P_s$
i	$-W_1$	0																			$-W_n$	$P_s$
...	$-W_1$	0																			$-W_n$	$P_s$
n-6	$-W_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	0	0	0	0	$-W_n$	$P_s$
n-5	$-W_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	0	0	0	$-W_n$	$P_s$
n-4	$-W_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	0	0	$-W_n$	$P_s$
n-3	$-W_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	0	$-W_n$	$P_s$
n-2	$-W_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	1	0	$-W_n$	$P_s$
n-1	$-W_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	$6+k_\xi$	-4	0	$-W_n$	$P_s$
n	$-W_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-4	$5+k_\xi$	0	$-W_n$	$P_s$

Rys. 4. Macierz współczynników układu równań MRS;  $P_s$  — obciążenie statyczne (opracowanie własne)

warunki brzegowe	nr węzła											warunki brzegowe	chwila czasowa	warunki początkowe	
-1	0	1	2	3	...	i-2	i-1	i	i+1	i+2	...	n	n+1		n+2
$-w_p$	0	$w_p$	$w_p$	$w_p$		$w_p$	$w_p$	$w_p$	$w_p$	$w_p$		$w_p$	0	$-w_p$	-1
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0
$-w_p$	0	$w_p$	$w_p$	$w_p$		$w_p$	$w_p$	$w_p$	$w_p$	$w_p$		$w_p$	0	$-w_p$	1
$-w_1^2$	0	$w_1^2$	$w_2^2$	$w_3^2$		$w_{i-2}^2$	$w_{i-1}^2$	$w_i^2$	$w_{i+1}^2$	$w_{i+2}^2$		$w_n^2$	0	$-w_n^2$	2
												...			
$-w_1^{j-1}$	0	$w_1^{j-1}$	$w_2^{j-1}$	$w_3^{j-1}$		$w_{i-2}^{j-1}$	$w_{i-1}^{j-1}$	$w_i^{j-1}$	$w_{i+1}^{j-1}$	$w_{i+2}^{j-1}$		$w_n^{j-1}$	0	$-w_n^{j-1}$	j-1
$-w_1^j$	0	$w_1^j$	$w_2^j$	$w_3^j$		$w_{i-2}^j$	$w_{i-1}^j$	$w_i^j$	$w_{i+1}^j$	$w_{i+2}^j$		$w_n^j$	0	$-w_n^j$	j
$-w_1^{j+1}$	0	$w_1^{j+1}$	$w_2^{j+1}$	$w_3^{j+1}$		$w_{i-2}^{j+1}$	$w_{i-1}^{j+1}$	$w_i^{j+1}$	$w_{i+1}^{j+1}$	$w_{i+2}^{j+1}$		$w_n^{j+1}$	0	$-w_n^{j+1}$	j+1
												...			
$-w_1^m$	0	$w_1^m$	$w_2^m$	$w_3^m$		$w_{i-1}^m$	$w_i^m$	$w_{i+1}^m$				$w_n^m$	0	$-w_n^m$	m

Rys. 5. Różnicowa siatka czasowo-przestrzenna:  $i$  — kolejne węzły;  $j$  — kolejne chwile, dla których wykonywane są obliczenia (opracowanie własne)

Korzystając z metody różnic skończonych, istotne jest zdefiniowanie warunków brzegowych, a w przypadku obciążenia dynamicznego również warunków początkowych rozpatrywanego zagadnienia. Zagadnienie brzegowe zostało rozwiązane przy

założeniu swobodnego podparcia szyny na jej końcach. Wówczas przemieszczenie pionowe w węzłach skrajnych (podporowych) z lewej i z prawej strony układu jest równe 0, natomiast przemieszczenie pionowe w „flekcyjnych” węzłach (z lewej i z prawej strony końców szyny za odpowiednimi węzłami podporowymi) jest równe co do wartości, ale przeciwne co do znaku, tak jak w pierwszym i ostatnim węźle przypodporowym.

W przypadku obciążenia dynamicznego zagadnienie początkowe zostało sformułowane przy założeniach, że wartość przemieszczenia pionowego danego węzła w chwili początkowej  $j = 0$  jest równa 0:  $w(x, 0) = 0$  oraz że wartość przyspieszenia drgań danego węzła w chwili początkowej  $j = 0$  jest równa 0:  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, 0) = 0$ , wówczas równanie 1.5 przyjmuje postać:  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{P(x, 0)}{\Delta x m}$ . Zastępując lewą stronę schematem różnicowym analogicznym do tego z zależności 2.1a, powyższa zależność przyjmuje postać:  $\frac{w_i^{-1} - 2w_i^0 + w_i^1}{\Delta t^2} = \frac{P_i^0}{\Delta x \mu}$ . Z uwagi na fakt, że  $w_i^0 = 0$  oraz  $w_i^j = \frac{w_i^{j+1} - w_i^{j-1}}{2\Delta t}$  (metoda różnic centralnych [3])  $\rightarrow w_p = \frac{P_i^0 \Delta t^2}{2\Delta x m} \rightarrow$  w rozważanym przypadku jest to warunek początkowy metody różnic skończonych.

Obciążenie ruchome zostało zamodelowane poprzez wprowadzenie do równania 2.2b współczynnika występowania obciążenia  $H_i^j$ :

$$w_i^{j+1} = C \left\{ w_{i-2}^j - 4w_{i-1}^j + (6 + k_d)w_i^j - 4w_{i+1}^j + w_{i+2}^j \right\} + H_i^j 2w_p + 2w_i^j - w_i^{j-1} \quad (2.3a)$$

W każdym rozważanym kroku dla każdego węzła oraz każdej chwili sprawdzana jest pozycja obciążenia i współczynnik  $H_i^j$  przyjmuje wartości jak poniżej:

$$H_i^j = \begin{cases} 1 - & \text{w przypadku gdy do węzła przyłożone jest obciążenie} \\ 0 - & \text{w przypadku gdy węzeł jest nieobciążony.} \end{cases} \quad (2.3b)$$

### 3. Analiza numeryczna

Właściwy dobór parametrów siatki czasowo-przestrzennej zapewni uzyskanie wiarygodnych wyników obliczeń numerycznych. Wartości liczbowe parametrów technicznych układu „pojazd szynowy–nawierzchnia–podłoże gruntowe” oraz dobór parametrów siatki czasowo-przestrzennej przedstawiono w kolejnych punktach.



### 3.1. Zestawienie parametrów obliczeniowych

Do obliczeń numerycznych przyjęto parametry zespołu trakcyjnego ED250 Pendolino poruszającego się po dobrze utrzymanej, klasycznej, podsypkowej nawierzchni kolejowej z szynami 60E1, podkładami betonowymi w rozstawie 0,60 m oraz przytwierdzeniami sprężystymi SB3 (rys. 6).



Rys. 6. Widok zestawu trakcyjnego ED259 Pendolino na szlaku [14]

Parametry charakteryzujące pojazd szynowy oraz nawierzchnię kolejową zostały podane w tabeli 2.

TABELA 2

Parametry charakteryzujące pojazd szynowy oraz nawierzchnię kolejową  
(opracowanie własne na podstawie [8, 9, 10, 12, 13])

Parametr	Wartość	Jednostka
prędkość przejazdu	160	km/h
rozstaw osi	2,7	m
maksymalny nacisk na oś zespołu trakcyjnego ED250 Pendolino	170	kN
obliczeniowy nacisk na oś zespołu trakcyjnego ED250 Pendolino przy uwzględnieniu przeciążenia toku szynowego	$170 \cdot 1,3 = 221$	kN
moment bezwładności przekroju poprzecznego szyny	$3038,30 \cdot 10^{-8}$	m <sup>4</sup>
masa szyny odniesiona do jednostki długości	60,21	kg/m
moduł Younga stali szynowej	210	GPa
moduł sprężystości podłoża	70	MPa
długość rozważanego modelu	$L_{\text{dla obc. statycznego}} = 25$ $L_{\text{dla obc. dynamicznego}} = 10$	m

### 3.2. Dobór kroku przestrzennego

Kluczowym czynnikiem wpływającym na dokładność wyników otrzymywanych przy wykorzystaniu metody różnic skończonych jest odpowiednie dobranie kroku przestrzennego, czyli odległości pomiędzy węzłami. Dokładność obliczeń wzrasta wraz ze wzrostem liczby węzłów, a tym samym z mniejszą długością odcinka podziału  $\Delta x$ . Wartości przemieszczenia pionowego szyny, które zostały obliczone w zależności od zmiennej długości odcinka podziału  $\Delta x$ , zostały przedstawione w tabeli 3.

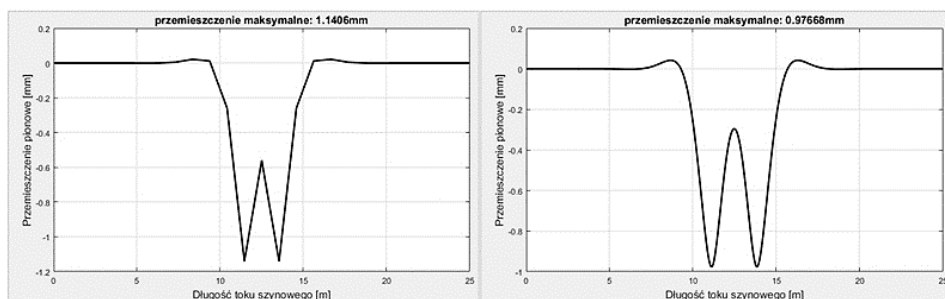
TABELA 3

Wartości przemieszczenia pionowego szyny spowodowanego statycznym oraz dynamicznym obciążeniem w zależności od długości odcinka podziału  $\Delta x$

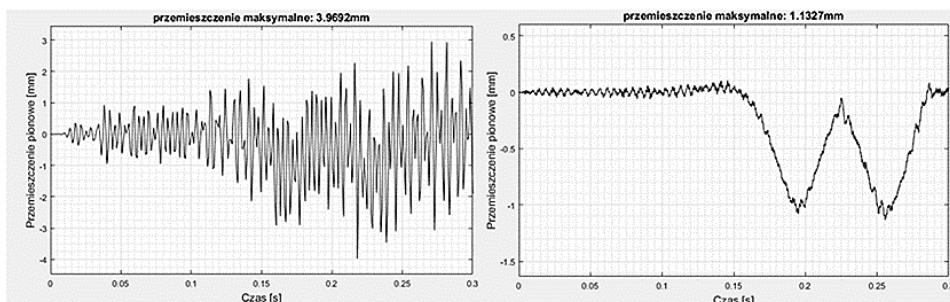
Długość odcinka podziału [m]	Maks. przemieszczenie pionowe szyny spowodowane obciążeniem statycznym [mm]	Maks. przemieszczenie pionowe szyny spowodowane obciążeniem dynamicznym [mm]
1,00	1,14	3,97
0,90	1,13	3,34
0,80	1,12	5,86
0,70	1,12	4,98
0,60	1,09	3,64
0,50	1,06	2,27
0,40	1,03	3,91
0,30	1,01	1,60
0,20	0,99	2,95
0,10	0,98	1,17
0,09	0,98	1,18
0,08	0,98	1,20
0,07	0,98	1,21
0,06	0,98	1,16
0,05	0,98	1,13

Wpływ odległości między węzłami na dokładność obliczeń obrazują wykresy zamieszczone na rysunkach 7 i 8.

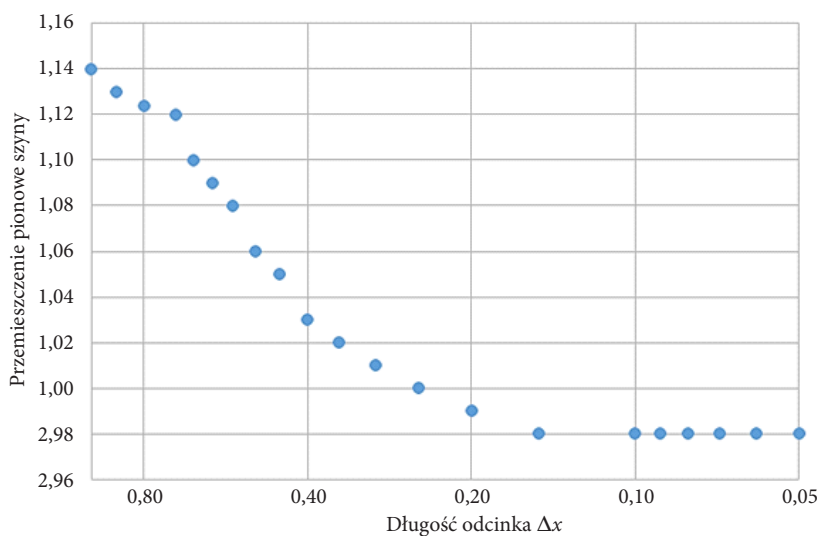
Wraz ze zmniejszaniem długości odcinka podziału otrzymywane wyniki dążą (są zbieżne) do pewnej określonej wartości i dalsze zwiększanie dyskretyzacji nie wpływa znacząco na wynik. Zjawisko to zostało obrazowo przedstawione na wykresach zamieszczonych na rysunkach 9 i 10.



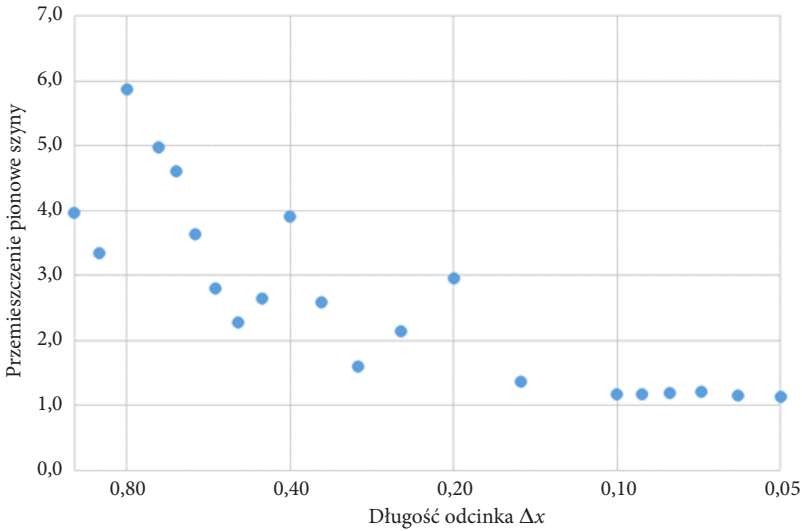
Rys. 7. Przemieszczenie pionowe szyny spowodowane statycznym obciążeniem dla odcinków podziału: z lewej  $\Delta x = 1,00$  m, z prawej  $\Delta x = 0,05$  m



Rys. 8. Przemieszczenie pionowe szyny spowodowane dynamicznym obciążeniem dla odcinków podziału: z lewej  $\Delta x = 1,00$  m, z prawej  $\Delta x = 0,05$  m



Rys. 9. Zależność otrzymywanych wartości przemieszczenia pionowego szyny spowodowanego statycznym obciążeniem w zależności od długości odcinka podziału  $\Delta x$



Rys. 10. Zależność otrzymywanych wartości przemieszczenia pionowego szyny spowodowanego dynamicznym obciążeniem w zależności od długości odcinka podziału  $\Delta x$

Z rysunku 9 wynika, że od wartości elementu podziału  $\Delta x \leq 0,1$  rozwiązanie numeryczne stabilizuje się. Niestabilność rozwiązania numerycznego dla obciążeń dynamicznych (rys. 10) zanika również przy wartości elementu podziału  $\Delta x \leq 0,1$ .

Zatem, korzystając z metody różnic skończonych, najistotniejsze jest ustalenie takiej długości odcinka podziału  $\Delta x$ , która pozwoli uzyskać pożądaną dokładność. Można przyjąć, że wyniki obliczeń stabilizują się przy podziale, dla którego  $\Delta x \leq 0,10$  m.

### 3.3. Dobór kroku czasowego

W przypadku analiz reakcji dynamicznej układu krok czasowy  $\Delta t$ , z jakim dokonywane są obliczenia, powinien być mniejszy lub maksymalnie równy czasowi krytycznemu, który powinien być określony dla każdego rozważanego układu szyna-sprężyste podłoże. Jak pokazały przeprowadzone przez autorów analizy, spełnienie tego warunku gwarantuje stabilność metody różnic skończonych oraz poprawność obliczeń. Stosunek przyjętej wartości kroku czasowego do wartości krytycznej nie ma większego wpływu na dokładność otrzymywanych obliczeń. Całkowity czas obliczeń, zapewniający przemieszczenie obciążenia wzdłuż toku szynowego po analizowanym odcinku, powinien spełniać warunek:  $T_{\text{analizy}} \geq \frac{L}{v}$ .

### 3.4. Omówienie otrzymanych wyników

Przemieszczenie pionowe szyny spowodowane statycznym obciążeniem można wyznaczyć z zależności [11]:

$$w_{\text{an. stat}} = \frac{P_0}{8EJ\lambda^3}, \quad (3.1)$$

gdzie:  $P_0$  — obciążenie toku szynowego;

$\lambda$  — odwrotność współczynnika względnej sztywności szyny i podłoża

(długość zastępcza toru):  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ .

Dla danych zamieszczonych w tabeli 2 wartość przemieszczenia pionowego szyny spowodowanego statycznym obciążeniem obliczona w sposób analityczny jest równa:

$$w_{\text{an. stat.}} = 1,02 \text{ mm}. \quad (3.2)$$

Wartość przemieszczenia pionowego szyny spowodowanego obciążeniem dynamicznym można uzyskać w sposób analityczny, mnożąc wartość przemieszczenia pionowego spowodowanego obciążeniem statycznym przez współczynnik dynamiczności obciążenia. W pracy [5] współczynnik ten określono w następujący sposób:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\left|1 - \left(\frac{V}{V_{cr}}\right)^2\right|}}. \quad (3.3)$$

gdzie:  $\varphi$  — współczynnik dynamiczności obciążenia;

$V$  — prędkość przejazdu pojazdu szynowego;

$V_{cr}$  — prędkość krytyczna, przy której tok szynowy ulegnie zjawisku

rezonansu, wyrażona jako:  $v_{cr} = \sqrt{\frac{2}{m} \sqrt{kEJ}}$ , gdzie:  $m$  — masa 1 mb całej

konstrukcji nawierzchni (przyjęto 2300 kg).

Dla danych zamieszczonych w tabeli 2 wartość przemieszczenia pionowego szyny spowodowanego dynamicznym obciążeniem obliczona w sposób analityczny jest równa:

$$w_{\text{an. dyn.}} = \varphi w_{\text{an. stat.}} = 1,08 \text{ mm}.$$

Różnica pomiędzy wartościami przemieszczenia pionowego obliczonego przy pomocy różnic skończonych w stosunku do wartości obliczonych w przedstawiony wyżej sposób analityczny wynosi zaledwie kilka setnych części milimetra.

#### 4. Podsumowanie i wnioski

W artykule zostało przedstawione przybliżone modelowanie numeryczne układu pojazd–nawierzchnia–podłoże gruntowe na przykładzie nawierzchni kolejowej obciążonej pojazdem szynowym. W celu numerycznego rozwiązania wyjściowego równania różniczkowego wykorzystano metodę różnic skończonych, której podstawowe zagadnienia zostały opisane w pkt. 2 oraz 3. Należy podkreślić, że przedstawiony model pojazd–nawierzchnia–podłoże gruntowe jest modelem uproszczonym, który nie uwzględniał właściwości tłumiących materiałów, z których wykonana jest nawierzchnia kolejowa. Dodatkowo dalszą możliwością rozbudowy zaprezentowanego modelu jest udoskonalenie odwzorowania obciążenia dynamicznego. Obecnie szyna została obciążona siłą o stałej wartości. W rzeczywistości obciążenie przekazywane przez koła na szynę jest zróżnicowane w zależności od specyfiki pracy nadwozia pojazdu szynowego, nierówności toków szynowych, wad materiałowych i innych czynników. Pomimo wskazanych powyżej uproszczeń oraz niedoskonałości, zaprezentowany model daje wyniki zgodne z analitycznymi. Tym niemniej rozbudowa i udoskonalanie przedstawionego modelu będą stanowiły przedmiot dalszych badań i analiz autorów. Poszukiwane będą również rozwiązania inżynierskie, w których dla układu z ciągłym rozkładem masy zadowalające będą układy o jednym stopniu swobody, tak jak zaprezentowano w pracy [1], w której przedstawiono metodę modelowania jednowymiarowych procesów falowych w sprężystych warstwowych prętach niepryzmatycznych. W przytoczonej publikacji zaproponowano modelowanie charakteryzujące się zerowym błędem metody.

Źródła finansowania pracy: praca pokrywa się z działalnością statutową wydziału i jest finansowana ze środków własnych autorów.

Artykuł wpłynął do redakcji 24.02.2017 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 24.04.2017 r.

#### LITERATURA

- [1] BĄK G., SZCZEŚNIAK Z., *Metoda modelowania jednowymiarowych procesów falowych w sprężystych warstwowych prętach niepryzmatycznych*, Rozprawy Inżynierskie, t. 35, z. 2, PWN, Warszawa, 1987, s. 309-325.
- [2] CAI Z., RAYMOND G., BATHURST R., *Estimate of Static Track Modulus Using Elastic Foundation Models*, Transportation Research Record, 1470, 1994.
- [3] CICHON C., CECOT W., KROK J., PLUCIŃSKI P., *Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji*, Politechnika Krakowska, Kraków, 2009.

- [4] CICHOSZ J., SZATKOWSKI A., *Metody numeryczne*, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 2010.
- [5] ESVELD C., *Modern railway track*, MRT-Productions, Delft University of Technology, 2001.
- [6] KINCAID D. and CHENEY W., *Numerical Analysis*, Mathematics of Scientific Computing, University of Texas, 2002.
- [7] LEWANDROWSKI T., *Analiza wpływu warunków techniczno-eksploatacyjnych na wybór konstrukcji nawierzchni kolejowej*, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2016.
- [8] *PKP: Instrukcja ID-1. Warunki techniczne utrzymania nawierzchni na liniach kolejowych*, PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa, 2005.
- [9] *PKP Polskie Linie Kolejowe S.A. Wykaz maksymalnych nacisków osi*, Warszawa, 2015.
- [10] *TATA STEEL. Rail technical guide*, Londyn, 2014.
- [11] SOŁKOWSKI J., *Efekt progowy w nawierzchniach szynowych*, Politechnika Krakowska, Kraków, 2013.
- [12] UZARSKI D., *Railroad track design*, Railroad Engineering Program, Illinois, 2009.
- [13] [www.kurierkolejowy.eu](http://www.kurierkolejowy.eu). — ostatni dostęp: kwiecień 2017 r.
- [14] <http://blog.pclab.pl/> — ostatni dostęp: kwiecień 2017 r.

T. LEWANDROWSKI, P. MUZOLF, W. IDCZAK

### The approximate modelling of a “rail vehicle–railway track– substructure” system

**Abstract.** A system “railway vehicle–railway track–substructure” was analysed. Rails were modelled as the Bernoulli–Euler beams on an elastic foundation. Two load cases were considered a) static load from the train to the railway track, b) dynamic load from the train moving with the constant velocity. As a result, the fourth-order differential equation was obtained. Both, material data and operating parameters were determined by components of the equation.

To solve this equation, the finite difference method was used. This method was described considering such matters as space step, time step, discretization, and moving load modelling.

Evaluation of usefulness of a selected method in modelling a railway infrastructure was the purpose of the authors. The obtained results were compared with results received by analytical way. The presented, simplified model: railway vehicle–infrastructure–substructure after appropriate validation will be used later on to analyse various technical solutions and materials in designing railway constructions.

**Keywords:** numerical methods, finite difference method, railway infrastructure, dynamic impact factor

**DOI:** 10.5604/01.3001.0010.1893

