

WŁODARCZYK Maria

METODY WYZNACZANIA SZTYWNOŚCI ZGINANYCH ELEMENTÓW ŻELBETOWYCH STOSOWANE W STANACH GRANICZNYCH UGIĘCIA

Streszczenie

Prezentowana praca ma charakter dydaktyczny i skierowana jest do studentów kierunków budownictwa. Opisano w niej sposób wyznaczania sztywności zginanej belki żelbetowej metodą SNiP II-w 1-62 oraz na podstawie krzywizny belki. Uzyskane w ten sposób wielkości teoretyczne porównano z wielkościami uzyskanymi z eksperymentu wykorzystując w tym celu pomiary ugięć.

WSTĘP

W wielu krajach, w tym również w Polsce, w ostatnich latach wprowadzono nowe zasady wymiarowania konstrukcji żelbetowych. Spowodowało to wzrost zainteresowania zagadnieniami związanymi z obliczeniami i przewidywaniem deformacji projektowanych konstrukcji, a zwłaszcza ich ugięć. W związku z tym w wielu normach [1], [2], [3], [5], [8] pojawiły się, dotychczas nieobecne, przepisy dotyczące między innymi sprawdzania i obliczania ugięć.

Ścisłe metody określania ugięcia elementów żelbetowych wymagają uwzględnienia w obliczeniach wielu parametrów mających wpływ na odkształcenia i naprężenia w betonie i stali. Decydują one także o krzywiznie elementu pod wpływem przyłożonego obciążeniu. Ich wielkości zależą nie tylko od poziomu obciążenia i właściwości materiałowych betonu i stali. Istotne znaczenie ma tutaj zarysowanie elementów żelbetowych oraz czas działania obciążenia. Po osiągnięciu przez beton wytrzymałości na rozciąganie w określonych przekrojach i strefach konstrukcji żelbetowej powstają rysy mające wpływ na wielkość sztywności.

W przekrojach belki niezarysowanej (typ I) sztywność, na skutek zmian modułu sprężystości, maleje wraz ze wzrostem obciążenia, aż do zniszczenia elementu [7]. W obliczeniach, celem ich uproszczenia, przyjmujemy założenie, że $E_{cm} = \text{const}$, uwzględniając tym samym stałą wartość sztywności. W przekrojach zarysowanych (typ II) sztywność elementu wraz ze wzrostem obciążenia maleje, podobnie jak w przekrojach typu I, ale w momencie powstania rysy następuje skok sztywności i maleje ona gwałtownie. Po ustabilizowaniu się procesu zarysowania sztywność maleje nadal, szybciej niż dla przekrojów typu I.

W prezentowanej pracy omówiono wybrane metody szacowania sztywności zginanych elementów żelbetowych stosowane w stanach granicznych ugięcia.

1. UGIĘCIE ELEMENTÓW ŻELBETOWYCH

Ugięcie elementu traktowane jest jako jego pionowe przemieszczenie [9], będące odpowiedzią konstrukcji na przyłożone obciążenie. Oblicza się je na podstawie ogólnej zależności między krzywizną odkształconej osi elementu ($1/\rho_x$), momentem zginającym (M_x) i sztywnością elementu na zginanie (B_x), i korzysta z ogólnej postaci równania różniczkowego:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} \approx \frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{B_x}. \quad (1)$$

Zastosowanie równania (1) do wyznaczenia ugięcia zginanego elementu żelbetowego nie jest prostym zagadnieniem. Rozwiązanie komplikuje zmienność sztywności na jego długości. Zmienia się ona w zależności od poziomu naprężenia w danym przekroju. W związku z tym korzysta się z uproszczenia polegającego na przyjęciu stałej sztywności dla całego elementu odpowiadającej przekrojowi, w którym występuje największy moment. Dla elementów ciągłych sztywność stałą przyjmuje się na długości odcinka, na którym występuje moment jednego znaku i odpowiada sztywności obliczonej dla maksymalnego momentu, występującego na tym odcinku. Wzór (1) przybiera wówczas postać:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{B}. \quad (2)$$

Dwukrotne scałkowanie równania (2) pozwala wyznaczyć strzałkę ugięcia, która w funkcji wartości momentu maksymalnego przybiera postać:

$$f = \alpha_k \frac{M_{\max}}{B} l^2, \quad (3)$$

gdzie: α_k – współczynnik zależny od schematu obciążenia i sposobu podparcia, l – rozpiętość elementu zginanego. M_{\max} – maksymalny moment zginający, B – sztywność elementu.

2. SZTYWNOŚĆ ELEMENTÓW ŻELBETOWYCH

Sztywność zginanych elementów żelbetowych zależy od jego fazy pracy, przed i po zarysowaniu, i wielkości obciążenia malejąc wraz z jego wzrostem.

W przypadku żelbetu [4] zagadnienie to się komplikuje. Klasyczne właściwości plastyczne mają zasadniczy wpływ jedynie w strefie ściskanej przekroju. W strefie rozciąganej, w betonie pojawiają się rysy. W wyniku ich pojawienia następuje zerwanie przyczepności pomiędzy betonem i stalą. Na odcinkach pomiędzy rysami nadal te dwa materiały ze sobą współpracują. W związku z tym zjawiskiem, na długości elementu zginanego występuje nierównomierny stan naprężenia w betonie i stali, inny w przekroju przez rysę i między rysami. Skutki pęknięcia belki żelbetowej w strefie rozciąganej są amortyzowane z jednej strony sprężystymi właściwościami stali, a z drugiej – w strefie ściskanej – sprężysto-plastycznymi właściwościami betonu.

Jeżeli rozpatrywać zginaną belkę żelbetową od strony jej zmiennej sztywności na długości, w wyniku procesu narastania obciążeń, można rozróżnić wszystkie fazy pracy. Kiedy w przekroju działania maksymalnego momentu zginającego mamy stan bliski fazy III (zniszczenia), to istnieją przekroje, w których belka pracuje w fazie I (przed zarysowaniem) i II (po zarysowaniu). Inna, więc będzie sztywność belki w okolicach podpór a inna w środku

rozpiętości przęsła. Sztywność ta jest zmienna nie tylko na jej długości, ale i w jednym określonym przekroju, w miarę wzrostu przyłożonego obciążenia maleje. Jest więc funkcją dwóch parametrów: położenia przekroju $\frac{x}{l}$ (x – odległość przekroju od podpory, l – rozpiętość belki) oraz obciążenia F .

Przyczynami zmian sztywności belki żelbetowej są między innymi:

- zmienność modułu odkształcenia podłużnego betonu E_c ,
- zmienność momentu bezwładności I ,
- inne czynniki określające wpływ zbrojenia na sztywność elementu zginanego.

2.1. Sztywność obliczona według SNiP II-w 1-62 [6]

Sztywność przekroju niezarysowanego

$$B_I = E_c I_{Ip} \quad (4)$$

gdzie: I_{Ip} – moment bezwładności przekroju sprowadzonego w fazie I, E_c – moduł sprężystości betonu wyznaczony z zależności:

$$E_c = \frac{10000}{0,18 + \frac{2,85}{f_{ck}}} \quad (5)$$

w której f_{ck} – wytrzymałość charakterystyczna betonu na ściskanie w [MPa].

Sztywność przekroju zarysowanego

$$B_{II} = \frac{zd}{\frac{\psi_a}{E_s A_{s1}} + \frac{0,9}{\nu E_c A_c}} \quad (6)$$

gdzie: ν – współczynnik wyrażający wpływ odkształceń betonu na sztywność przekroju zarysowanego, z – ramię sił wewnętrznych, d – wysokość użyteczna przekroju, E_s – moduł sprężystości stali zbrojeniowej, A_{s1} – pole powierzchni zbrojenia rozciąganego, A_c – pole przekroju betonu ($A_c = bd$), ψ_a – współczynnik obliczony z zależności (7):

$$\psi_a = 1,3 - \delta \frac{\alpha_a M_{cr}}{M} \leq 1,0 \quad (7)$$

w której: δ – współczynnik zależny od czasu trwania obciążenia, α_a – współczynnik zależny od ilości zbrojenia.

Ramię sił wewnętrznych z występujące we wzorze (6) obliczamy z zależności (8). I tak dla przekroju prostokątnego tylko ze zbrojeniem w strefie rozciąganej ma postać:

$$z = d \left[1 - \frac{\xi}{2} \right] \quad (8)$$

gdzie: ξ – względna wysokość strefy ściskanej obliczona ze wzoru:

$$\xi = \frac{1}{1,8 + \frac{1+5L}{10\alpha_e\rho}} \quad (9)$$

w którym: ρ – procent zbrojenia, L – parametr obliczony z zależności:

$$L = \frac{M}{f_{ck}bd^2} \quad (10)$$

2.2. Sztywność obliczona na podstawie EC2 [2], [3]

Sztywność przekroju niezarysowanego

Sztywność przekroju niezarysowanego obliczmy przy przyjęciu modelu liniowo-sprężystego.

$$B = E_{cm}I_I \quad (11)$$

gdzie: I_I – moment bezwładności przekroju pracującego w fazie I, E_{cm} – średni sieczny moduł sprężystości betonu.

Sztywność przekroju zarysowanego

Sztywność na zginanie elementu zarysowanego obliczamy przyjmując dwufazowy model obliczeniowy. W obliczeniach inżynierskich stosuje się założenia upraszczające polegające na uśrednieniu sztywności przekroju na odcinku pomiędzy rysami i w przekroju przez rysę.

$$B_o = \frac{E_{cm}I_{II}}{1 - \beta_1\beta_2\left(\frac{M_{cr}}{M_{Ed}}\right)^2\left(1 - \frac{I_I}{I_{II}}\right)} \quad (12)$$

gdzie: I_{II} – moment bezwładności dla przekroju zarysowanego, β_1 – współczynnik zależny od rodzaju zbrojenia, β_2 – współczynnik zależny od rodzaju obciążenia, M_{cr} – moment rysujący, M_{Ed} – moment zginający wywołany obciążeniem krótkotrwałym.

3. BADANIA DOŚWIADCZALNE

Badania doświadczalne zostały wykonane w ramach pracy własnej [10]. Do badań doświadczalnych przyjęto schemat statyczny belki jednoprzęsłowej swobodnie podpartej, o przekroju prostokątnym 120×300 mm i długości 3000 mm. Program badań eksperymentalnych był wykonany na belkach swobodnie podpartych przy tzw. czteropunktowym zginaniu.

Zbadano serię 12 belek żelbetowych zbrojonych w strefie rozciąganej dwoma prętami $\phi 16$ mm ze stali BSt500S (procent zbrojenia $\rho_l = 1,19\%$, granica plastyczności $f_{yk} = 530,7$ MPa, moduł sprężystości $E_s = 201,6$ GPa, i w strefie ściskanej dwoma prętami $\phi 8$ mm ze stali St3S. Strzemiona wykonano z prętów $\phi 4,5$ mm ze stali St3S. Między siłami skupionymi zastosowano rozstaw strzemion 225 mm, a na odcinku pomiędzy siłami skupionymi a podporami – 100 mm. Belki były wykonane z betonu o tej samej recepturze, dla którego wytrzymałość na ściskanie była w granicach $f_{ck} = 37,13$ MPa ÷ 41,72 MPa, wytrzymałość na rozciąganie $f_{ctm} = 3,34$ MPa ÷ 3,61 MPa i moduł sprężystości $E_{cm} = 42610,83$ MPa ÷ 44023,34 MPa.

Belki zbadano pod obciążeniem doraźnym złożonym, z odciążeniami do zera rozpoczynającymi się powyżej teoretycznego momentu rysującego, którego oszacowana wielkość wynosiła $M_{cr} = 8,78$ kNm. Wykorzystując metodę odkształceń plastycznych, wyznaczono teoretyczny moment niszczący, który wynosił $M_n = 45,75$ kNm.

Złożony sposób obciążenia obejmował skokowy wzrost siły F z kilkukrotnymi odciążeniami belki: $0 \rightarrow 5,0 \rightarrow 7,5 \rightarrow 10 \rightarrow 0 \rightarrow 10 \rightarrow 12,5 \rightarrow 15,0 \rightarrow 0 \rightarrow 15 \rightarrow 20,0 \rightarrow 0 \rightarrow 20,0 \rightarrow 25,0 \rightarrow 0 \rightarrow 25,0 \rightarrow 30$ i dalej aż do zniszczenia. Zniszczenie poszczególnych belek nastąpiło przy sile od 47,5 kN do 50,0 kN.

W prezentowanej pracy wykorzystano wyniki pomiarów ugięć reprezentatywnych belek (B1, B2, B5) na ścieżce obciążenia pierwotnego. Wyniki zestawiono w tabelicy 1.

Tab. 1. Wyniki pomiaru ugięć w środku rozpiętości belki

M [kNm]	Ugięcie w [mm]		
	Belka B1	Belka B2	Belka B5
	f_1	f_2	f_5
0	0	0	0
2,5	0,31	0,37	0,30
5,0	0,75	0,96	0,66
7,5	1,66	1,83	1,53
10	2,76	2,97	2,68
12,5	3,70	3,69	3,54
15	4,57	4,60	4,38
20	6,37	6,53	6,38
25	8,07	8,11	8,05
30	9,96	10,09	9,88
35	11,89	12,04	11,65
40	13,61	14,02	13,37
45	16,20	16,76	15,96

4. ANALIZA WYNIKÓW

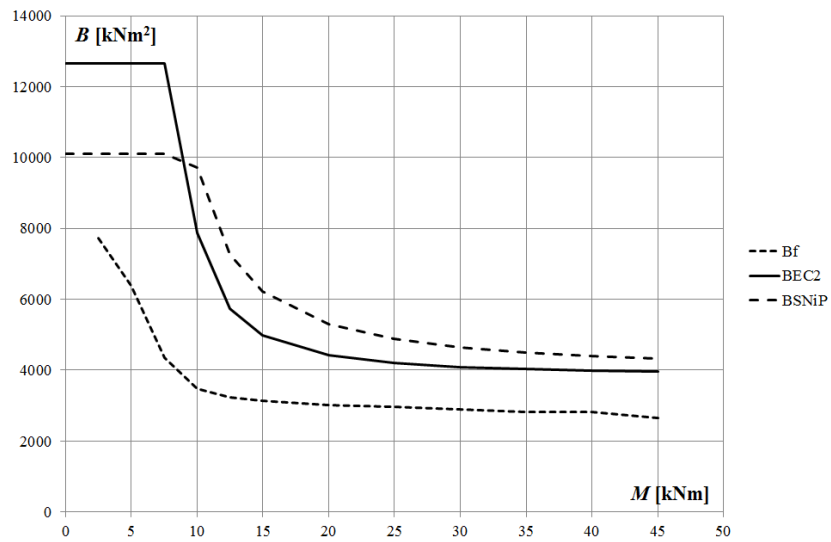
Teoretyczne wielkości sztywności obliczono zgodnie z [2] i [3] oraz wykorzystując obecnie niestosowaną metodę wyznaczania sztywności SNiP II-w 1-62, a która była podstawową przy obliczaniu ugięć zgodnie z zaleceniami normy [6]. Natomiast przekształcając zależność (3) obliczono sztywność doświadczalną B_i odpowiadającą danemu poziomowi obciążenia:

$$B_i = \alpha_k \frac{M_i}{f_i} l^2. \quad (13)$$

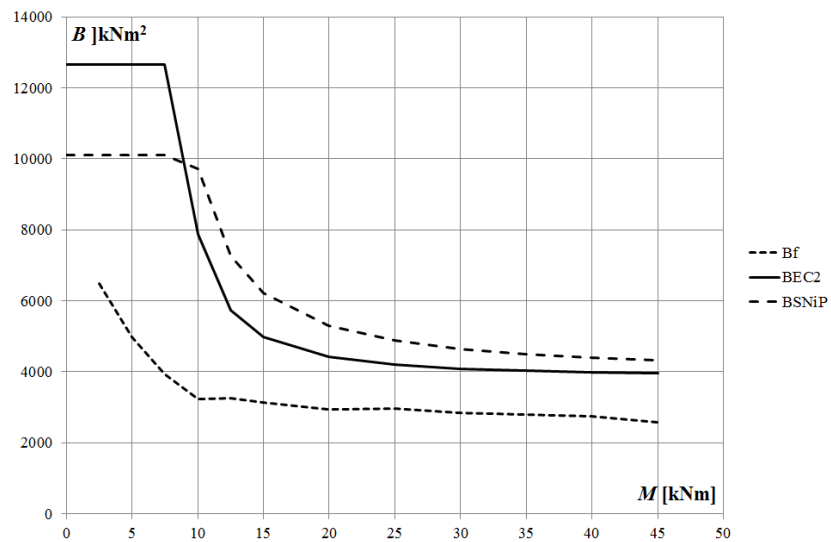
gdzie: M_i – wielkość momentu pochodzącego od obciążenie dla, którego dokonywano pomiaru ugięć, f_i – ugięcie w środku rozpiętości belki odpowiadające momentowi M_i .

Uzyskane wyniki przedstawiono w sposób graficzny na wykresach (Rys. 1, Rys. 2, Rys. 3).

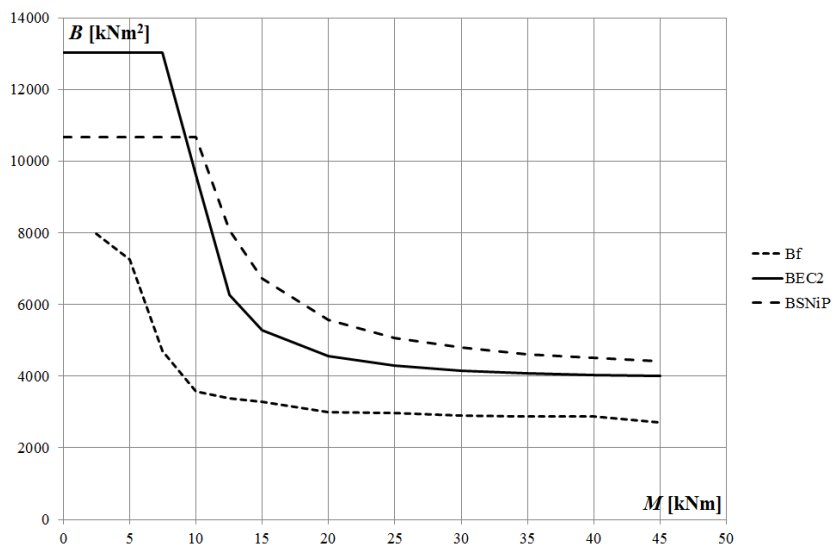
Na wszystkich wykresach linią ciągłą zaznaczono sztywność obliczoną zgodnie z zaleceniami Eurokodu 2 (BEC2), linia przerywana odzwierciedla sztywność obliczoną według metody SNiP II-w 1-62 (BSNiP), a kropkowa – sztywność wyznaczoną na podstawie badań doświadczalnych (Bf).



Rys. 1. Sztywność dla belki B1



Rys. 2. Sztywność dla belki B2



Rys. 3. Sztywność dla belki B5

Analizując wykresy (Rys. 1, Rys. 2, Rys. 3) zaobserwowano, że dla wszystkich belek sztywność (BEC2) dla obciążenia $M < M_{cr}$ obliczona według [2] jest większa o około 30% od sztywności (BSNiP) obliczonej według [6]. Natomiast dla obciążenia $\sim 0,2M_n$ (M_n – moment niszczący) sztywności te są sobie równe, a dla obciążenia $M > \sim 0,2M_n$ sztywność wyznaczona według [6] jest mniejsza niż zgodnie z [2].

Ze względu na przyjęty w obliczeniach, dla przekroju niezarysowanego stałego modułu sprężystości dla betonu ($E_c = \text{const}$), sztywność BEC2 i BSNiP jest stała. W chwili osiągnięcia przez beton w strefie rozciąganej wytrzymałości betonu powstaje rysa. W związku z tym obserwujemy skokowy spadek sztywności (około 30 do 35 %). Zmiany te maleją wraz ze stabilizacją procesu zarysowania pod wpływem narastającego obciążenia.

Zmienność sztywności wyznaczonej zgodnie z (13) jest obserwowana w całym zakresie obciążeń użytkowych, z tym że po osiągnięciu obciążenia krytycznego (M_{cr}) następuje spadek o około 30% w porównaniu dla obciążeń $M < M_{cr}$. Jednak wraz ze wzrostem obciążenia zmiany te są już mniejsze, co spowodowane jest stabilizacją procesu zarysowania.

Teoretyczne ugięcia obliczone z (3) z wykorzystaniem wielkości sztywności obliczonej zgodnie z [2] (BEC2) i [6] (BSNiP) są mniejsze niż pomierzone doświadczalnie [10] (Tab. 1). Jest to potwierdzenie faktu, że oszacowania teoretyczne są po stronie bezpiecznej dla zginanych elementów żelbetowych.

WNIOSKI

W obliczeniach inżynierskich określając sztywność dla przekroju niezarysowanego przyjmuje się założenie, że moduł sprężystości betonu jest stały ($E_c = \text{const}$). W związku z tym sztywność dla obciążenia $M < M_{cr}$ jest stała. Natomiast dla przekroju zarysowanego przyjmujemy dwufazowy model obliczeniowy, stosując założenie upraszczające, uśredniając sztywność na odcinku pomiędzy rysami i sztywność w przekroju przez rysę (12).

Dla $M > M_{cr}$ obserwuje się znaczny spadek sztywności, jednak wraz ze stabilizacją zarysowania obserwuje się mniejsze zmiany sztywności.

Porównując wyniki uzyskane na drodze eksperymentu z wynikami teoretycznymi można stwierdzić, że oszacowane sztywności zgodnie z zaleceniami zaproponowanymi przez [2] i [6] są po stronie bezpiecznej.

Prezentowana praca ma charakter dydaktyczny i skierowana jest do studentów kierunków budownictwa.

BIBLIOGRAFIA

1. *Building code requirements for structural (ACI 318-02) and commentary (ACI 318R-02).*
2. Eurocode 2. *Design of concrete structures. Part 1. General rules and rules for buildings.*
3. Eurokody. Projektowanie Konstrukcji Betonowych według Eurokodów. *Projektowanie konstrukcji żelbetowych.* Zeszyty Edukacyjne Buildera. PWB MEDIA. Warszawa 2011, zeszyt 2.
4. Kuczyński W.: *Konstrukcje betonowe. Kontynuacja teorii zginania żelbetu.* PWN, Warszawa, 1971.
5. *Model Code 2010.* Final draft, fib CEB-FIP, September 2011.
6. PN-B-03264:1984. *Konstrukcje betonowe żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie.*
7. Szczeciński M.: *Deformacja zginanych elementów żelbetowych obciążonych długotrwale.* Prace Naukowe Instytutu Politechniki Wrocławskiej, nr 67. Wrocław, 1996.
8. Walraven J., Bigaj A.: *The 2010 fib Model Code for Concrete Structures: A New Approach to Structural Engineering.* Structural Concrete. Journal of the Fib, Volume 12, Issue 3, pages 139-147, September 2011.

9. Wojewódzki W.: *Nośność graniczna Konstrukcji prętowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2005.
10. Włodarczyk M.: *Opracowanie procedury diagnozowania metodą emisji akustycznej zginanych belek żelbetowych pod obciążeniem doraźnie zmiennym*. Praca własna Nr 2.20/8.54. Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Betonowych, 2008-2009.

THE STIFFNESS DETERMINING METHODS OF THE BENDING REINFORCED CONCRETE ELEMENTS USED IN THE LIMIT STATES OF DEFLECTION

Abstract

Presented work is didactic and is aimed at the students of Civil Engineering. The way of bending reinforced concrete beam stiffness establishing has been described, using the method SNiP II-w 1-62 and based on the curvature of the beam. Theoretical values received in this way, have been compared with the values obtained from an experiment using the measurements of the deflection.

Autor:

dr inż. **Maria Włodarczyk** – Politechnika Warszawska