

## ZASTOSOWANIE FUNKCJI RADIALNYCH W ANALIZIE DRGAŃ TARCZY

## Streszczenie

W pracy opisano bezsiatkową metodę kolokacyjną Kansy i jej wykorzystanie w analizie drgań własnych tarczy. W analizie wykorzystano funkcję wielokwadratową, opisano metodę doboru wartości parametru kształtu. Wszystkie wyniki porównano z wynikami symulacji Metodą Elementów Skończonych.

## WSTĘP

Tarcza jest dwuwymiarowym elementem konstrukcyjnym, który przenosi obciążenie jedynie w swojej płaszczyźnie tzn. jest to element poddany rozciąganiu lub ścisaniu. Jeżeli można przyjąć, że płyta jest dwuwymiarową belką tak tarcza jest dwuwymiarowym prętem ścisany (rozciągany). Tarcza jest rzadko stosowana jako element konstrukcyjny, natomiast opisane w pracy drgania mogą być wykorzystane przy analizie drgań płyty z siłą przyłożoną nie prostopadle do płaszczyzny płyty.

Modelem matematycznym tarczy podobnie jak każdego z układów mechanicznych jest równanie lub układ równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych, który łącznie z warunkami brzegowymi stanowi problem początkowo-brzegowy. Taki problem jedynie w niewielu przypadkach rozwiązać można metodami analitycznymi tzn. poprzez znalezienie odpowiednich funkcji, które spełniają jednocześnie równanie (lub układ równań) różniczkowych opisujących analizowany problem jak i równania opisujące warunki brzegowe rozważanego układu mechanicznego. W przypadkach, w których znalezienie rozwiązania analitycznego nie jest możliwe, rozwiązania analizowanego problemu początkowo-brzegowego należy poszukiwać metodami przybliżonymi.

Tradycyjne metody przybliżonego, numerycznego rozwiązania takiego problemu wymagają podziału na elementy: całego analizowanego obszaru, w metodach takich jak Metoda Różnic Skończonych (MRS), Metoda Elementów Skończonych (MES) czy Metoda Objętości Skończonych (MOS), lub jedynie brzegu obszaru w metodach takich jak Metoda Elementów Brzegowych (MEB). Olbrzymi nakład pracy włożony w rozwój MES uczynił z niej najbardziej popularną, a nawet podstawową, metodę przybliżonego rozwiązania problemów początkowo-brzegowych.

Metody przybliżonego rozwiązania problemu początkowo-brzegowego niewymagające siatki elementów to tzw. metody bezsiatkowe. Metody te podzielić można na dwa typy: metody obszarowe m.in. bezelementowa metoda Galerkin'a [1], metoda interpolacji punktowej [12], metoda funkcji Rvacheva [13] i metody brzegowe, do których należy m.in. metoda węzłów brzegowych [8]. W obu typach metody punkty kolokacyjne umieszczone są w całym analizowanym obszarze lub jedynie na jego brzegu. Większość wymienionych metod jest bezsiatkowa jedynie w sensie interpolacji rozwiązania, niezbędne są natomiast „komórki” wykorzystywane do całkowania słabego sformułowania wariacyjnego problemu.

Innym podejściem poszukiwania przybliżonego rozwiązania problemu początkowo-brzegowego jest metoda Kansy [5] bazująca na sformułowaniu silnym i Radialnych Funkcjach Bazowych (RFB). Metoda ta nie wymaga zastosowania jakichkolwiek elementów czy komórek, dlatego też zwana jest metodą „prawdziwie” bezsiatkową.

W ciągu ostatnich 20 lat kolokacyjna metoda Kansy znalazła zastosowanie do rozwiązania wielu różnych problemów mechaniki

m. in. analiza dwu i trójfazowych modeli tkanki [4], problemów wymiany ciepła [15], analizy równań Naviera-Stokesa [2], analizy pola elektromagnetycznego [10] i wielu innych.

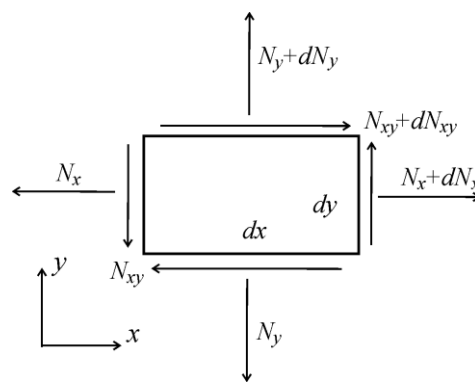
Sukces metod związanych z wykorzystaniem RFB wiąże się z ich podstawową własnością polegającą na transformacji problemów wielowymiarowych do problemów jednowymiarowych. W niniejszej pracy wykorzystano kolokacyjną metodę Kansy wraz z wielokwadratową (ang. multiquadric) radialną funkcją bazową do analizy drgań własnych tarczy. W celu wykazania poprawności i dokładności proponowanej metody obliczeń wszystkie wyniki analizy przybliżonej porównano z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych.

Przy wykorzystaniu funkcji wielokwadratowej bardzo istotnym jest wyznaczenie tzw. parametru kształtu, od którego zależy kształt funkcji bazowej. W pracy zaproponowano autorską strategię wyboru „optymalnego” parametru kształtu.

## 1. RÓWNANIE DRGAŃ TARCZY

Jak wspomniano we wstępie tarcza jest dwuwymiarowym, płaskim elementem konstrukcyjnym przenoszącym obciążenie w swojej płaszczyźnie. Taki rodzaj obciążenia występuje również w przypadkach płyt obciążonych siłami, które nie są prostopadle do płaszczyzny środkowej płyty.

Na rysunku 1 pokazano elementarny wycinek tarczy wraz z siłami reprezentującymi „odrzucone” części tarczy. (Uwaga: pokazane na rysunku 1 siły  $N$  mają wymiar obciążenia ciągłego  $[N/m]$ ).



Rys.1. Elementarny element tarczy

Sumując składowe OX sił otrzymano:

$$\sum P_{ix} = -N_x dy + (N_x + dN_x) dy - N_{xy} dx + (N_{xy} + dN_{xy}) dx = \rho h(x) dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

W pracy pokazane zostanie jedynie równanie dla składowej poziomej sił (składowa OX). Równanie dla składowej pionowej

(składowa OY) wygląda identycznie, z tą różnicą że  $N_x$  należy zastąpić przez  $N_y$ , a przemieszczenie opisać współrzędną  $w$  (w miejsce przemieszczenia poziomego  $u$ ).

Po krótkich przekształceniach równanie (1) ma postać:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

W kolejnym kroku należy powiązać ze sobą siły wewnętrzne z globalnymi przemieszczeniami ( $u, w$ ) tarczy. W tym celu należy skorzystać z równań konstytutywnych materiału tarczy oraz zależności pomiędzy odkształceniami, a przemieszczeniami. Po scałkowaniu naprężeń po całej wysokości  $h$  tarczy otrzymano (w rozważaniach założono tarczę o stałej wysokości tzn.  $h(x) = h = \text{const.}$ ).

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$N_{xy} = Gh \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4)$$

gdzie:  $E$  – moduł Younga,  $\nu$  – stała Poissona,  $G$  – moduł Kirchhoffa

Po uwzględnieniu zależności (3) i (4) równanie drgań tarczy zapisać można w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \\ = \frac{\rho}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Z warunków równowagi sił na kierunku pionowym (składowa OY), po kilku przekształceniach otrzymano:

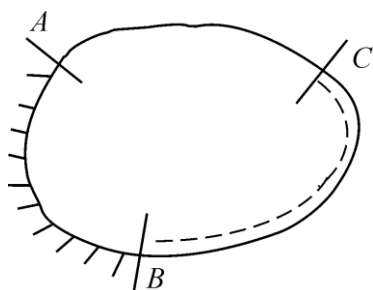
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\ = \frac{\rho}{E} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Układ równań (5) i (6) stanowi model matematyczny drgań tarczy. Ze względu na tematykę pracy w równaniach (5) i (6) pominięto obciążenie zewnętrzne tarczy. W celu znalezienia nietrywialnego rozwiązania układu równań opisującego drgania tarczy należy znaleźć takie składowe przemieszczenia każdego z punktów tarczy ( $u(t)$  i  $w(t)$ ), które spełniają warunki brzegowe tarczy. Typowe warunki brzegowe opisano w kolejnym punkcie pracy.

### 1.1. Warunki brzegowe tarczy

Jak to opisano wcześniej, drgania tarczy są najczęściej analizowane jako część drgań płyty, z tego powodu w pracy przeanalizowano warunki brzegowe typowe dla płyty zginanej.

Na rysunku 2 pokazano przykładową płytę z typowymi warunkami brzegowymi.



Rys.2. Tarcza z typowymi warunkami brzegowymi

Na rysunku 2 pokazano sposób obrazowania typowych warunków brzegowych płyty i tak: na części AB krawędzi płyta jest utwierdzona, na części BC - swobodnie podparta i krawędź AC jest krawędzią swobodną. W przypadku analizy drgań tarczy rozpatrzyć dwa różne przypadki swobodnego podparcia krawędzi. Pierwszy przypadek to podpora przegubowa przesuwna, drugi to podpora nieprzesuwna (w przypadku drgań poprzecznych płyty czy nawet belki takie rozróżnienie podpór jest zbędne).

Warunek brzegowy jaki narzucony jest na każdy z punktów należących na krawędzi tarczy może być związany wymaganiem dotyczącym:

- przemieszczenia tego punktu brzegu - są to tzw. warunki Dirichleta, w przypadku tarczy są to warunki narzucone na funkcję  $u(x,y,t)$  i/lub  $w(x,y,t)$ , gdzie  $x,y$  to współrzędne punktu należącego do brzegu tarczy,
- siły wewnętrznej wyznaczonej na brzegu tarczy - są to tzw. warunki Neumanna, w przypadku tarczy należy wyznaczyć pochodną kierunkową funkcji przemieszczeń  $u(x,y,t)$  i  $w(x,y,t)$  na kierunku normalnym do krawędzi tarczy liczoną w punkcie, którego ten warunek dotyczy.
- pewnej zależności pomiędzy siłą wewnętrzną, a przemieszczeniem tego punktu brzegu - są to tzw. warunki Robina, w przypadku tarczy warunek taki to sprężyste podparcie punktu na jej brzegu.

Poniżej opisano różne sposoby zamocowania dowolnego punktu na brzegu tarczy, wraz z równaniami opisującymi te warunki brzegowe dla punktu o współrzędnych  $x_b, y_b$ .

- punkt na krawędzi utwierdzonej (krawędź AB na rysunku 2)

Warunki jakie muszą w takim przypadku spełniać funkcje  $u(x,y,t)$  i  $w(x,y,t)$  mają postać:

$$u(x_b, y_b, t) = 0 \quad \text{i} \quad w(x_b, y_b, t) = 0 \quad (7)$$

- punkt na krawędzi swobodnej (krawędź AC na rysunku 2)

W takim przypadku warunek narzucony na przemieszczenie całkowite punktu brzegowego tarczy tj. przemieszczenia o współrzędnych  $u(x,y,t)$  i  $w(x,y,t)$  ma postać (na potrzeby tego zapisu przyjęto, oznaczenie dla przemieszczenia całkowitego -  $p(x,y,t)$ ):

$$\left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial n} \right|_{x=x_b, y=y_b} = 0 \quad (8)$$

Po wyznaczeniu pochodnej kierunkowej (na kierunku normalnym do swobodnej krawędzi tarczy) oraz uwzględnieniu zależności na składowe siły normalnej ( $N_x$  i  $N_y$ ), warunek (8) ma postać:

$$N_x n_x + N_y n_y = 0 \quad (9)$$

gdzie:  $n_x$  i  $n_y$  to współrzędne wektora normalnego do krawędzi tarczy.

Uwaga: Długość wektora normalnego musi być równa jedności

tj.  $\sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1$ , a jego zwrot zawsze skierowany do wnętrza tarczy.

- punkt na krawędzi swobodnie podpartej (krawędź BC na rysunku 2) bez możliwości przesunięcia (podpora nieprzesuwna)  
Dla drgań tarczy taki warunek sprowadza się do stwierdzenia takiej krawędzi czyli równań (7).
- punkt na krawędzi swobodnie podpartej (krawędź BC na rysunku 2) z możliwością przesunięcia (podpora przesuwna)  
Dla drgań tarczy taki warunek sprowadza się do analizy krawędzi swobodnej i równań (9).

## 2. RADIALNE FUNKCJE BAZOWE

Funkcja radialna to każda funkcja jednej zmiennej postaci:

$$\varphi_j(r) = \varphi(\|x - x_j\|) \quad (10)$$

gdzie:  $\|x - x_j\|$  jest Euklidesową odległością pomiędzy punktami  $x$  i  $x_j$ . Punkt  $x_j$  jest nazwany centrum funkcji radialnej (10). Zmieniając położenia centrów otrzymuje się rodzinę funkcji, która tworzy bazę wykorzystywaną do interpolacji lub aproksymacji dowolnej funkcji.

Każdą z funkcji bazowych postaci (10) zaliczyć można do jednej z dwóch kategorii: funkcje o zwartym nośniku, tj. funkcje, które są różne od zera jedynie w sferze o promieniu  $r$  (najczęściej  $r = 1$ ) lub funkcje o nośniku nieograniczonym ( $r \rightarrow \infty$ ). Najczęściej wykorzystywanymi funkcjami z pierwszej kategorii są zamieszczone w tabeli 1, funkcje Wendlanda [14]. W tabeli 2 zawarto przykłady funkcji o nośniku nieograniczonym.

Tab. 1. Bazowe funkcje radialne o zwartym nośniku

wymiar przestrzeni	d = 1	d = 2,3
definicja funkcji	$\varphi(r) = (1-r)_+$	$\varphi(r) = (1-r)_+^2$
definicja funkcji	$\varphi(r) = (1-r)_+^3(3r+1)$	$\varphi(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$

gdzie:

$$\varphi(r) = (1-r)_+^n = \begin{cases} (1-r)^n, & \text{dla } r \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & \text{dla } r > 1 \end{cases}$$

Tab. 2. Bazowe funkcje radialne o nośniku nieograniczonym

definicja funkcji	nazwa funkcji
$\varphi(r) = r$	liniowa
$\varphi(r) = r^3$	sześcienne
$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$	wielokwadratowa
$\varphi(r) = r^2 \ln r$	cienkiej płyty
$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$	wielokwadratowa odwrotna

Ze względu na dużą popularność w zastosowaniach oraz dobre własności aproksymujące w pracy wykorzystano funkcję wielokwadratową, która w przypadku 2D ma postać:

$$\varphi_j(r) = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2} \quad (11)$$

Jak wspomniano wcześniej, kształt funkcji (11) zależy od parametru kształtu  $c$ . Wraz ze wzrostem jego wartości funkcja (11) staje się coraz bardziej płaska, przez to mało wrażliwa na zmiany odległości pomiędzy punktem  $x(x, y)$  i centrum funkcji radialnej  $x_j(x_j, y_j)$ .

### 3. METODA KOLOKACYJNA KANSY

Analizowany problem początkowo brzegowy opisany jest równaniem postaci:

$$Lu = f(x), \quad x \in \Omega \quad (12)$$

wraz z warunkami brzegowymi postaci:

$$Bu = g(x), \quad x \in \Gamma \quad (13)$$

gdzie:  $L$  jest liniowym operatorem różniczkowym,  $B$  jest operatorem opisującym warunki brzegowe,  $\Omega$  to analizowany obszar,  $\Gamma$  to brzeg tego obszaru.

Idea metody Kansy polega na aproksymacji rozwiązania problemu początkowo-brzegowego (12) i (13) za pomocą sumy szeregu rodziny funkcji radialnych tj.:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(r) \quad (14)$$

Współczynniki  $\alpha_j$  wyznacza się w procedurze kolokacji. W tym celu należy wybrać zbiór  $N_o$  punktów  $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_o}\}$  należących do obszaru  $\Omega$  w których żąda się by przybliżone rozwiązanie (14) spełniało równanie (12):

$$L\hat{u} = f(x_i) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \alpha_j L \varphi_j(r_i) \quad (15)$$

Podobnie należy wybrać zbiór  $N_b$  punktów  $\{x_{N_o+1}, x_{N_o+2}, \dots, x_{N_o+N_b}\}$  na brzegu  $\Gamma$  analizowanego obszaru. W tych punktach muszą zostać spełnione równania warunków brzegowych (13):

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j B \varphi_j(r_i) = g(x) \quad (16)$$

Równania (15) i (16) stanowią liniowy układ równań, który zapisać można w postaci macierzowej:

$$A \alpha = f \quad (17)$$

Z układu (17) wyznaczyć można poszukiwane współczynniki  $\alpha_j$ .

### 4. DRGANIA WŁASNE TARCZY

W pracy analizę drgań tarczy ograniczono jedynie do wyznaczenia częstości drgań własnych. Układ równań drgań własnych (drgania harmoniczne o częstości  $\omega$ ) tarczy mają postać (5) i (6):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\rho}{E} \omega^2 (1-\nu^2) u \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \omega^2 (1-\nu^2) w \quad (19)$$

Funkcje  $u(x, y)$  i  $w(x, y)$  z równań (18) i (19) muszą dodatkowo spełniać warunki brzegowe.

Zgodnie z metodą Kansy do rozwiązania układu równań (18), (19) wykorzystano aproksymacje funkcji  $u(x, y)$  i  $w(x, y)$  z wykorzystaniem radialnej funkcji wielokwadratowej w postaci:

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2} \quad (20)$$

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^N \beta_j \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2} \quad (21)$$

gdzie:  $(x_i, y_i)$  to współrzędne punktów kolokacyjnych  $i = 1, 2, \dots, N_o$ ,  $(x_j, y_j)$  to współrzędne centrów wielokwadratowych funkcji radialnych  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Po wstawieniu zależności (20) i (21) do równań (18) i (19) otrzymuje się układ równań algebraicznych ze względu na stałe  $\alpha_j$  i  $\beta_j$ , które w zapisie macierzowym prowadzą do równania typu (17). We wszystkich analizowanych w pracy przypadkach przyjęto jedną

wartość parametru kształtu dla wszystkich funkcji bazowych tj.  $c_j = c$ .

Układ równań opisujący drgania tarczy (równania (18) i (19)) należy uzupełnić układem równań wnioskujących z równań warunków brzegowych tarczy.

## 4.1. Wybór parametru kształtu

Dobór „optymalnej” wartości parametru kształtu jest, jak dotąd, nierozwiązanym problemem. Szczegółowy przegląd różnych strategii pozwalających na wyznaczenie tego parametru znaleźć można w pracy [3].

W niniejszej pracy autor proponuje inną strategię opartą na następującym algorytmie:

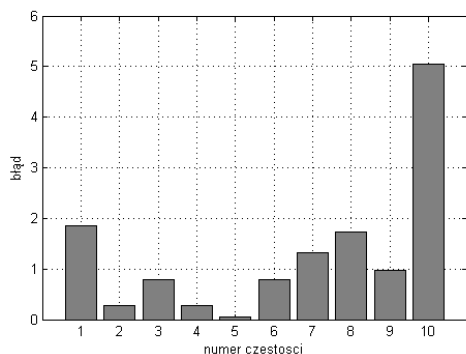
1. należy określić zakres zmienności parametru  $c$
2. należy znaleźć wartości  $\omega$  dla których  $\det A = 0$
3. jeżeli wartość  $\omega$  nie ma stabilnej wartości (dla różnych  $c$ ) należy wrócić do punktu 1 (zmiana zakresy zmienności  $c$ )
4. jeżeli  $\omega$  osiąga wartość stabilną dla parametru  $c$  z pewnego zakresu, jako wartość  $c$  do obliczeń przyjmując można dowolną wartość  $c$  z tego zakresu.

## 4.2. Porównanie wyników analizy

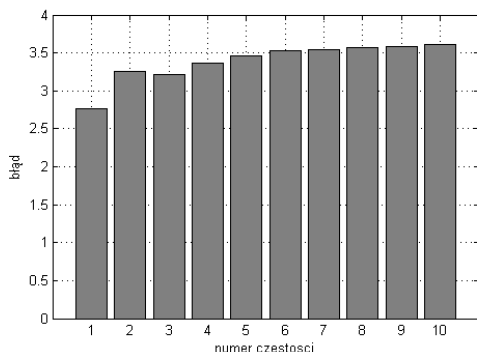
W celu oceny „jakości” wyników aproksymacji częstości drgań własnych uzyskanych z analizy przybliżonej z wynikami z metody elementów skończonych, zdefiniowano błąd, dany zależnością (subskrypt *MES* oznacza wyniki analizy metodą elementów skończonych, subskrypt *p* – analizy przybliżonej):

$$\delta = \frac{|\omega_i^p - \omega_i^{MES}|}{\omega_i^{MES}} \cdot 100\% \quad (22)$$

Wartości błędów wyznaczonych dla 10 pierwszych częstości drgań własnych tarczy prostokątnej o różnych warunkach brzegowych pokazano na rysunku 3.



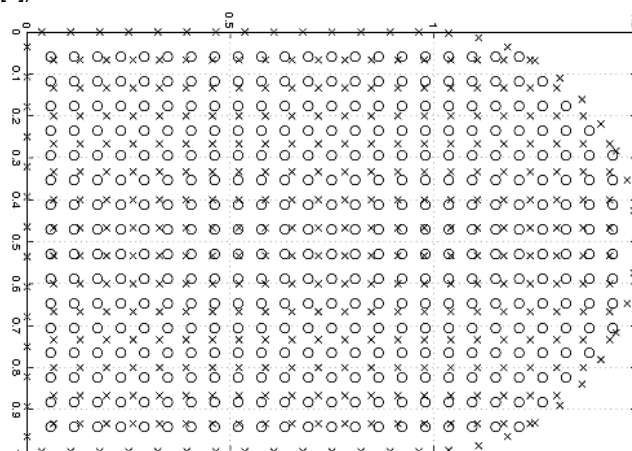
a) wszystkie krawędzie utwierdzone



b) dwie równoległe krawędzie utwierdzone, pozostałe swobodne

Rys. 3. Wartości błędów przy wyznaczaniu wartości własnych tarczy o różnych war. brzegowych

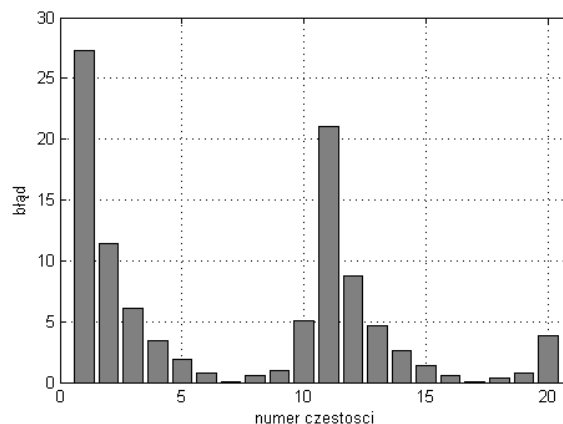
Wyznaczono również częstości drań własnych tarczy o dowolnym kształcie. Analizowaną w pracy tarczę wraz z rozkładem punktów kolokacyjnych (oznaczonych „x”) i centralnych funkcji radialnych (oznaczonych „o”) pokazano na rysunku 4. (jest to ten sam element, którego drganie poprzeczne – model płyty autor analizował w pracy [7])



Rys. 4. Analizowana tarcza

Wartości błędów wyznaczonych dla 20 pierwszych częstości własnych utwierdzonej tarczy pokazano na rysunku 5. Wartości błędów obliczono z zależności (22).

Wyniki analizy zamieszone na rysunkach 3 i 5 wskazują jednoznacznie na bardzo dużą dokładność analizy z wykorzystaniem tej metody bezsiatkowej.



Rys. 5. Błąd w wartościach częstości drgań własnych tarczy pokazanej na rysunku 4

## PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy opisano metodę kolokacyjną Kansy oraz jej zastosowanie do wyznaczenia częstości drgań własnych tarczy. W celu oceny poprawności i dokładności tej metody analizy porównano częstotliwości drgań własnych z wartościami wyznaczonymi z symulacji Metodą Elementów Skończonych.

Wyniki analizy wskazują jednoznacznie na bardzo dużą dokładność analizy z wykorzystaniem tej metody bezsiatkowej. Wyniki analizy wskazują również na poprawność zaproponowanej strategii doboru parametru kształtu funkcji radialnych.

Praca powstała w ramach prac statutowych nr. 11.11.130.955

## BIBLIOGRAFIA

1. Belystcho T., Lu Y., Gu L.: *Element free Galerkin methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 37, 1994, pp. 229-256
2. Chinchapatnam, P.P., Djidjeli, K., Nair, P.B.: *Radial basis function meshless method for the steady incompressible Navier–Stokes equations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 84, 2007, pp. 1509-1526
3. Fasshauer, G.E., Zhang, J.G.: *On choosing „optimal” shape parameter for RBF approximation*. Numerical Algorithms, 45, 2007, pp. 346-368
4. Hon Y.C., Lu M.W., Xue W.M., Zhou X.: *A new formulation and computation of the triphasic model for mechano-electrochemical mixtures*. Computational Mechanics 24, 1999, pp. 155-165
5. Kansa E.J.: *Multiquadric-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics*. Computers & Mathematics with Applications 19, 1990, pp. 147-161
6. Kączkowski, Zb. *Płyty. Obliczenia statyczne*. Arkady. Warszawa 1968.
7. Majkut L. *Zastosowanie funkcji radialnych w analizie drgań własnych konstrukcji pojazdów*. Technika Transportu Szynowego 10, 2013, str. 1-10
8. Mukherjee Y.X., Mukherjee S.: *The boundary node method for potential problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 40, 1997, pp. 797-815
9. Tiago C.M., Leitao V.M.A.: *Application of radial basis functions to linear and nonlinear structural analysis problems*. Computers and Mathematics with Applications 51, 2006, pp. 1311-1334
10. Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S. *Teoria płyt i powłok*. Arkady 1962
11. Vu, P., Fasshauer, G.E.: *Application of two radial basis function-pseudospectral meshfree methods to three-dimensional electromagnetic problems*. IET Science, Measurement & Technology, 5, 2011 pp. 206-210
12. Wang J.G., Liu G.R.: *A point interpolation meshless method based on radial basis functions*. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering 54, 2002, pp. 1623-1648
13. Wawrzynek A., Detka M., Cichoń, Cz.: *Zastosowanie metody R-funkcji do wyznaczenia współczynnika przejmowania ciepła*. Modelowanie Inżynierskie 43, Gliwice 2012, s. 255-263
14. Wendland, H.: *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree*. Advances in Computational Mathematics, 4, 1995, pp. 389-396
15. Zerroukat M., Power H., Chen C.S.: *A numerical method for heat transfer problem using collocation and radial basis functions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42, 1998, pp. 1263-1278

*multiquadric (MQ) RBF provide a results with very high accuracy in comparison to numerical results in dynamic analysis of plate-like structural components.*

Autorzy:

dr hab. inż. **Leszek Majkut** – AGH Akademia Górniczo –Hutnicza Kraków, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki, majkut@agh.edu.pl

## IN PLANE VIBRATION OF PLATE WITH RADIAL BASED FUNCTION

### *Abstract*

*The work concerns the in plane vibration of plate with the Radial Based Functions. The Kansa collocation method was used for determination eigenvalues of the plate. All results were compared with Finite Element Analysis results. All results indicate that using of*