Katedra Metod Matematycznych Fizyki (KMMF) Wydziału Fizyki UW: tematyka, ludzie, historia

Jacek Wojtkiewicz*

Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Abstrakt. Artykuł ten jest pomyślany jako uzupełnienie wspomnień zamieszczonych w [1], poświęconych genezie i rozwojowi Katedry Metod Matematycznych Fizyki WF UW. Zamierzam przede wszystkim przedstawić główne nurty badań, prowadzonych w Katedrze. Nie będę też jednak stronić od aspektów historycznych z naciskiem na lata bardziej współczesne niż w [1]. Zamierzam również poczynić kilka uwag na temat związków między fizyką a matematyką.
Słowa kluczowe: fizyka matematyczna, matematyka fizyczna, grupy kwantowe, teoria rozpraszania, stany bierne

Abstract. The aim of this article is continuation of memoirs devoted to the emergence and development of the Department for Mathematical Methods in Physics [1]. The main subject of the present article is presentation of directions of research performed in the Department. I will also present some historic aspects of the Department, complementing the story told in [1]. I will also put few remarks concerning connections and interrelations between mathematics and physics.
Keywords: mathematical physics, physical mathematics, quantum groups, scattering theory, passive states

1. Wstęp: konieczność, a przynajmniej potrzeba obecności matematyki w fizyce

Mogłoby się wydawać, że nie trzeba nikogo z fizyków przekonywać o prawdziwości stwierdzenia zawartego w tytule. Sprawa nie przedstawia się jednak w tak jasnych barwach i czasem przydatność matematyki w fizyce kwestionuje się w sposób bardziej lub mniej zakamuflowany.

1.1. Symbioza matematyki i fizyki z korzyścią dla obu

Zacznijmy od tych, dla których pożyteczność matematyki w fizyce jest oczywista. Być może wielu Czytelników słyszało zdania: *Matematyka to język fizyki* (Eugene P. Wigner), bądź *Księga Przyrody pisana jest językiem matematyki* (Galileusz). Wielokrotnie okazywało się, jak prawdziwe są to słowa. Przytoczę tu dwa przykłady.

Pierwszy z nich, to rozwój ogólnej teorii względności. Albert Einstein, po opracowaniu szczególnej teorii względności, szybko zdał sobie sprawę, iż *czasoprzestrzeń*[1] jest nie tylko areną zdarzeń, ale i ich aktywnym uczestnikiem. W związku z tym, dziejące się w czasoprzestrzeni procesy fizyczne odkształcają geometrię od pseudoeuklidesowej do... no właśnie, jakiej? – natknął się tu na trudność pojęciową – jakim językiem opisać geometrię czasoprzestrzeni, gdy jest tam obecna materia. Z pomocą przyszedł mu przyjaciel, matematyk Marcel Grossman[2] wskazując, że adekwatne do problemu narzędzia matematyczne już istnieją i stanowią dział matematyki zwany *geometrią riemannowską*. Jej podwaliny położył Bernhard Riemann w połowie XIX w., a została rozwinięta pod koniec XIX w. m.in. przez Luigi Bianchiego, Tullio Levi-Civitę, Elwina B. Christoffela. Bez gotowego praktycznie narzędzia, jakim jest geometria riemannowska, teoria względności prawdopodobnie by powstała, ale trwałoby to znacznie dłużej. Wielkości fizyczne w teorii względności wyrażają się bezpośrednio przez obiekty geometryczne takie jak *metryka, koneksja, krzywizna*.

Einstein był w tej szczęśliwej sytuacji, że istniało już gotowe narzędzie matematyczne, z którego można było prawie natychmiast skorzystać. Inaczej było w przypadku Paula A. M. Diraca i jego *funkcji delta*.

Cała mechanika kwantowa „stoi” operatorami hermitowskimi. (Nie znaczy to, że inne tam nie występują; wielkościom obserwowalnym odpowiadają jedynie operatory hermitowskie). Działają one w *przestrzeni Hilberta* stanów układu – przestrzeni wektorowej, na ogół zespolonej, z iloczynem skalarnym. Każdy operator ma zbiór *funkcji własnych* i ten układ jest *zupełny*, tj. dowolny stan układu daje się zapisać jako liniowa kombinacja funkcji własnych. Funkcje własne są ponadto

1. Szczególna teoria względności powstała w 1905 r., a w 1908 matematyk Hermann Minkowski zauważył, że czasoprzestrzeń można opisywać w języku geometrii pseudoeuklidesowej. Różni się ona od euklidesowej sygnaturą: Ta ostatnia ma sygnaturę $(++++)$, a czasoprzestrzeń Minkowskiego $(-+++)$.

2. W uznaniu jego zasług przy tworzeniu ogólnej teorii względności, co 3 lata odbywają się ogólnoświatowe konferencje relatywistów – tzw. Marcel Grossman Meetings.

ortonormalne, tzn. ich iloczyn skalarny jest równy zeru (gdy są różne) lub jeden (dla iloczynu funkcji samej z sobą).

Wszystkie te fakty (o statusie twierdzeń) były znane dla macierzy hermitowskich na długo przed powstaniem mechaniki kwantowej. Były też znane ich uogólnienia na pewne klasy operatorów, które można było uważać – w uproszczeniu – za macierze. Te operatory odpowiadały w mechanice kwantowej *widmu dyskretnemu*; typowym przykładem mogą być stany związane atomu wodoru. Życie (a dokładniej potrzeby fizyki) wymusił jednak rozpatrywanie innych też sytuacji, w których mamy widmo *ciągłe*. Pozostając przy atomie wodoru, przykładem są *stany rozproszeniowe* po jego jonizacji. I tutaj nie dało się, przy użyciu ówcześnie istniejących narzędzi matematycznych, zapisać ortogonalności funkcji własnych. Dirac wybrnął z tej sytuacji odpowiednio adaptując istniejący już schemat. Aby to zrobić, musiał jednak wprowadzić dziwny obiekt, a mianowicie *funkcję delta* (od tej pory nazywaną deltą Diraca). Ortogonalność funkcji własnych odpowiadających punktom widma ciągłego wyraża się właśnie przy użyciu delty. Jest to funkcja, równa zeru wszędzie, z wyjątkiem jednego punktu (np. 0), gdzie jej wartość jest nieskończona. Nieskończoność jest tego rodzaju, że całka z delty po prostej rzeczywistej jest równa 1.

Funkcja o tych własnościach po prostu *nie istnieje*. Ale też w wyliczeniach z użyciem delty nie korzysta się z wartości delty w zerze, a jedynie całkuje się deltę z inną funkcją i to postępowanie daje poprawne wyniki. Przez ponad 20 lat prowadzono rachunki przy użyciu nieistniejącego (jako funkcja) obiektu, zanim opracowano teorię matematyczną, w ramach której definiuje się obiekty takie jak delta i reguły działań na nich. Nie są to na ogół funkcje[3], a *dystrybucje* – funkcjonały liniowe. Głównym autorem teorii był Laurent Schwartz.

Tutaj więc matematyka została z tyłu za fizyką, ale koniec końców sytuacja się wyjaśniła. Teoria dystrybucji okazała się być bardzo pożytecznym narzędziem. Używa się w jej powszechnie w fizyce i uczy na standardowych kursach analizy matematycznej.

To były przykłady pozytywnego oddziaływania między fizyką a matematyką. Jest zresztą starą obserwacją (dokonaną niezależnie przez wielu), że ciekawe problemy fizyczne stymulują rozwój szczególnie płodnych teorii matematycznych. Tak było np. z rachunkiem wariacyjnym, teorią potencjału, transformacją Fouriera, równaniami różniczkowymi zwyczajnymi i cząstkowymi, a w czasach bardziej współczesnych – z teorią operatorów.

Ale nie wszyscy widzą pożytki z symbiozy matematyki z fizyką. Z różnych powodów. Najczęściej jest to wąski praktycyzm[4], choć nie tylko.

1.2. „Całką stropu nie podeprzesz"

Powyższy tytuł jest autentyczny (to zdanie wyczytałem zresztą w *Postępach Fizyki* ok. 40 lat temu, w ramach dyskusji na temat nauczania matematyki na studiach fizycznych). Dotyczył on wprawdzie wyrażenia opinii na temat (bez)sensowności nauczania matematyki na studiach politechnicznych; ale problem znaczenia matematyki w fizyce i inżynierii jest wspólny.

Zacytowane w tytule zdanie jest przykładem ekstremalnym. Pojawiają się jednak często zarzuty formułowane bardziej „miękko". Pozwolę sobie przytoczyć niektóre zasłyszane bądź przeczytane, aby przedyskutować ich zasadność.

Niepotrzebnie rozbudowany formalizm matematyczny. Budowanie pustych konstrukcji, zamiast analizy problemów. No cóż, zdarza się. Na ogół jednak od początku nie wiadomo, jakie zastosowania będzie miał dany zestaw pojęć. Na przykład pojęcia *wiązek włóknistych* (FB) czy *klas charakterystycznych* (ChC) powstawały bez perspektywy zastosowań fizycznych (o geometrii riemannowskiej już była mowa), a dopiero jakiś czas po ich powstaniu okazywało się, jak bardzo przydatne są w fizyce. Pojawiają się jako naturalny język teorii z cechowaniem (FB) albo przy opisie kwantowego efektu Halla czy członu topologicznego, decydującego o fizycznych własnościach łańcuchów spinowych[5], czy też anomalii w QFT (ChC).

Tym, którzy tępią wszelkie rozważania nad formalizmami i aspektem językowym matematyki, proponuję, aby sięgnęli do pracy, w której Maxwell sformułował swoje równania [3]. W takiej postaci, jak są tam napisane bez użycia pojęć dywergencji, rotacji i gradientu, stanowią 20 oddzielnych równań na 20 zmiennych. Podejrzewam, że w takiej postaci są kompletnie niestrawne dla dzisiejszego czytelnika. Podobnie [2], gdyby Leibniz nie przetłumaczył newtonowskich *fluksji* i *fluentów* na używany do dzisiaj język pochodnych i różniczek, to dzieło Newtona pozostałoby na długo skarbem zamknię-

3. Choć czasem sprowadzają się do nich.

4. Postawa obecna też powszechnie w naszym kraju wśród decydentów przyznających środki na naukę. Jest to jeden z rzadkich przypadków „porozumienia ponad podziałami", od 30 lat bowiem, niezależnie od tego, kto jest u władzy (od lewicy do prawicy) w kwestii wysokości nakładów na badania Polska zajmuje w Europie 4-5 miejsce od końca (chodzi o proporcję wydatków do PKB).

5. Za kwantowy efekt Halla przyznano dwie nagrody Nobla: Klaus von Klitzing – 1985, oraz Robert B. Laughlin, Horst L. Stormer, Daniel C. Tsui – 1998; a za człon topologiczny w łańcuchach spinowych kolejną: John F. Duncan M. Haldane w 2016 (*Postępy Fizyki* **72** (**1**) (2021) przyp. red.).

tym w wieży z kości słoniowej. W tych przypadkach formalizmy stały się też potężnymi narzędziami do analizy konkretnych problemów.

W prowadzonych w KMMF badaniach struktur, stojących u podstaw mechaniki i teorii pola, pojawiają się pojęcia takie, jak: *wiechcie (gerbes), wiązki podwójne, algebroidy* bądź *grupoidy*. Być może pozostaną one głównie jako elegancki i wygodny język, a może będą też miały znaczenie rachunkowe... trudno to w tej chwili przewidzieć.

Często spotykany jest też zarzut dydaktyczny: **Studenci często znają różne niepotrzebne fizykom teorie, a nie potrafią różniczkować i całkować.** Też tak bywa, ale zdarza się, jako wypadek przy pracy, a nie reguła. KMMF od dłuższego czasu prowadzi zajęcia z matematyki adresowane do studentów różnych specjalności: analiza i algebra R (rozszerzone), analiza i algebra „zwykłe", matematyka – „użytkowa" wersja analizy i algebry. Studenckie oceny zajęć prowadzonych przez KMMF nie odbiegają od średniej dla całego Wydziału, wielu zaś pracowników Katedry dostawało nagrody dydaktyczne Dziekana i Rektora.

Przedstawione wyżej obiekcje prezentuje jednak mniejszość fizyków. Wyraźna większość (zwłaszcza teoretyków) jest przekonana, że opanowanie na jak najwcześniejszym etapie zaawansowanego aparatu matematycznego z nawiązką procentuje później.

1.3. Fizyka teoretyczna (FT) a fizyka matematyczna (FM)

Niektórzy nie widzą różnicy między fizyką teoretyczną a matematyczną. W jakiejś części jest to *matter of taste*, a czasem zależy od przyjętych definicji tychże. W odczuciu autora, różnica istnieje.

Cele FT i FM są takie same, a przynajmniej bardzo zbliżone: Mamy zadany jakiś model badanego zjawiska fizycznego i chcemy wyciągnąć wnioski dotyczące jego zachowania. Tu pojawia się pierwsza różnica: w FT niekiedy *tworzy się* też model. W FM na ogół bada się już istniejące modele. Bada się też matematyczną strukturę teorii. W FM panuje ściślejszy rygor, niż w FT. Wszystkie kroki rozumowania muszą być udowodnione, a w FT rygor jest mniejszy – niektóre stwierdzenia przyjmuje się „na kredyt", zakładając np. na podstawie intuicji fizycznej, że są prawdziwe i odkładając ich dowód na później. Ten „kredyt" często spłacają fizycy matematyczni, bywa, że znacznie później[6]. W ten sposób fizyk teoretyczny często posuwa się do przodu znacznie szybciej niż matematyczny. Ma to jednak swoją cenę, a jest nią możliwość, że otrzymane wyniki są błędne.

Przykładów powyższego scenariusza można przytoczyć wiele; przedstawię jeden, kierując się osobistymi zainteresowaniami. Na początku lat 70. XX w. Kenneth G. Wilson przedstawił teorię *grupy renormalizacyjnej*[7] w zastosowaniu do przejść fazowych. Sama idea była zasadniczo prosta (*niezmienniczość względem skalowania* w punkcie krytycznym). Dało się z niej wyprowadzić, stosując różne przybliżenia, schematy postępowania prowadzące do obliczenia np. *wykładników krytycznych*. Okazywało się, że niektóre wyniki obliczeń metodą RG świetnie zgadzały się z doświadczeniem (np. dla efektu Kondo), inne natomiast o wiele gorzej lub wcale. Trudno byłoby tu „składać reklamacje" – w trakcie obliczeń dokonywano wielu niekontrolowanych przybliżeń. Uściślenia okazywały się jednak bardzo trudne. Pionierskie wyniki w tym zakresie uzyskał m.in. Krzysztof Gawędzki na początku lat 80. XX w. (był podówczas pracownikiem KMMF). Dopiero w bieżącym wieku udało się w nielicznych przypadkach udowodnić, po ponad pół wieku od sformułowania, *hipotezę uniwersalności* – jeden z fundamentów teorii przejść fazowych. Narzędziem była ścisła wersja RG. Ale jest to dopiero początek drogi...

2. Tematyka i ludzie

Po rozważaniach na temat związków między fizyką a matematyką, czy między fizyką matematyczną a fizyką teoretyczną, przedstawię – z perspektywy osobistej, a więc z pewną dozą subiektywizmu – tematy uprawiane w KMMF (obecnie i w przeszłości) oraz ludzi, którzy te tematy uprawiają.

2.1. Grupy kwantowe i geometria nieprzemienna

Można na pewno powiedzieć, że „specjalnością zakładu" (a dokładniej Katedry) są *grupy kwantowe*.

Skąd się wzięło pojęcie grupy kwantowej? Podobnie jak „zwycięstwo ma wielu ojców", tak i ten płodny koncept wyrósł z niejednej motywacji. Jedną z nich było *kwantowanie*. Świat, z którym mamy do czynienia na codzień, jest zasadniczo klasyczny; ale u podłoża wszystkich zjawisk stoi mechanika kwantowa. Jak ją zrekonstruować, mając do dyspozycji pojęcia klasyczne? Mamy tu częściowo recepty (kwantowanie), częściowo zaś zgadujemy próbując skonstruować teorię, która, gdy stała Plancka dąży do zera, przechodzi w teorię klasyczną. W ten sposób próbuje się różne obiekty klasyczne „deformować", tzn. rozszerzyć do jednoparametrowej rodziny tak, by dla wartości parametru równej zeru odtworzyć obiekt klasyczny.

6. W niektórych przypadkach dzieje się to szybko. I tak, *twierdzenie Hohenberga–Mermina–Wagnera* w mechanice statystycznej wymagało tylko niewielkich uściśleń i po ok. dwóch latach od sformułowania posiadało już pełny rygor matematyczny. Inaczej było z kondensacją Bosego–Einsteina w układzie oddziałujących bozonów. W tym przypadku *przybliżenie Bogolubowa* musiało poczekać ponad pół wieku na doprecyzowanie i udowodnienie.

7. Czepiając się słów, jest to literalnie *pół*grupa.

Można więc pomyśleć, żeby powyższe podejście zastosować do *grup* w nadziei, że otrzyma się jakąś kwantową wersję grup, które są fundamentalne na poziomie klasycznym, np. grup symetrii czasoprzestrzeni (grupa Lorentza czy Poincarégo). Szybko się jednak okazuje, że nic z tego, grupy są na ogół bardzo „sztywne" i nie da się ich w żaden sensowny sposób zdeformować. Nie tędy droga.

Sporo czasu zajęło uświadomienie sobie, że można rozważać nie grupy bezpośrednio, a określone obiekty na nich. Typowym jest *zbiór funkcji ciągłych* na grupie G (ozn. $C(G)$). Okazuje się, że znając $C(G)$ można odtworzyć G. Obiekty w rodzaju $C(G)$ są znacznie większe niż wyjściowa grupa. Takie obiekty można już w naturalny sposób deformować.

Snując rozważania w tym duchu, Stanisław L. Woronowicz skonstruował jeden z pierwszych przykładów grupy kwantowej, tzw. q-zdeformowaną grupę $SU(2)$ [8]. Konstrukcja, w ogólnym zarysie, jest następująca. Grupa $SU(2)$ to grupa zespolonych macierzy g postaci: $g = \left(\begin{smallmatrix} a & -c^* \\ c & a^* \end{smallmatrix}\right)$, gdzie a, c są liczbami zespolonymi, spełniającymi warunek unimodularności: $a^*a + c^*c = 1$. Woronowicz przeprowadził konstrukcję *nieprzemiennej* $*$*-algebry* o dwóch generatorach a, c (*nie są* już one liczbami; pytanie o ich naturę na razie pominiemy), które spełniają warunki:

$$ac = qca, \quad ac^* = qc^*a, \quad cc^* = c^*c,$$
$$a^*a + c^*c = 1, \quad aa^* + q^2cc^* = 1,$$

gdzie q jest liczbą rzeczywistą, przyjmującą wartości $0 < q < 1$. Okazuje się, że ta algebra jest też *algebrą Hopfa* – tworem o wyróżniających się własnościach algebraicznych. Ponadto, może ona być reprezentowana przez $*$-algebrę ograniczonych operatorów liniowych na przestrzeni Hilberta, a jej domknięcie jest C^*-algebrą. Ta ostatnia może być legalnie nazwana *deformacją* algebry $C(SU(2))$ – oznacza się ją jako $C(SU_q(2))$ – *algebrą ciągłych funkcji na grupie kwantowej* $SU_q(2)$. W ten sposób, narodziła się *grupa kwantowa* $SU_q(2)$.

Opisane powyżej (a raczej naszkicowane) struktury algebraiczne okazują się być obecne w wielu działach fizyki i matematyki. Nie sprawdzają się co prawda jak dotąd oczekiwania, że geometria czasoprzestrzeni jest *nieprzemienna* na małych odległościach (rzędu skali Plancka). (Nieprzemienność jest bardzo silnie powiązana z grupami kwantowymi). Ale grupy kwantowe – oprócz tego, że są bardzo interesującym matematycznie obiektem samym w sobie – pojawiają się np. przy *układach całkowalnych*; widać je w kombinatoryce diagramów Feynmana dla *grupy renormalizacji*; wreszcie w problemach z czystej geometrii, jak w badaniu *foliacji*.

Profesor Woronowicz jest jednym z prekursorów badań grup kwantowych w skali światowej i jednym z autorów o największych osiągnięciach. Cytowania jego prac z tych tematów idą w tysiące[8], jest też laureatem Nagrody Fundacji Nauki Polskiej oraz Fundacji Humboldta. Liczni są (bądź byli) też jego współpracownicy z KMMF: Stanisław Zakrzewski (†1997), Wiesław Pusz, Piotr Podleś (porzucił niestety matematykę fizyczną i został notariuszem), a bardziej współcześnie Piotr M. Sołtan i Paweł Kasprzak. Przez jakiś czas był w KMMF Piotr Hajac.

Należy też wspomnieć o *bezprzymiotnikowych* (tzn. niekwantowych) grupach. Wielu spośród byłych i obecnych pracowników KMMF zajmowało się nimi. Wymieńmy tu Antoniego Wawrzyńczyka (autora m. in. monografii *Teoria grup a funkcje specjalne*), Aleksandra Strasburgera i Szymona Charzyńskiego. Związki teorii grup z funkcjami specjalnymi badają też Jan Dereziński i Adam Latosiński.

2.2. Teoria operatorów

Teoria operatorów liniowych jest jednym z tematów, uprawianych w KMMF „od zawsze" (tzn. od jej powstania). Rozpoczął jej rozwijanie pierwszy Szef KMMF, prof. Krzysztof Maurin (†2017) i poświęcił tej tematyce dwie książki [5]. Godnymi uczniami Mistrza zostali Kazimierz Napiórkowski i Stanisław L. Woronowicz, wychowankiem zaś tego ostatniego jest Piotr M. Sołtan. Przechodząc od teorii operatorów do teorii *form biliniowych*, Wiesław Pusz i Stanisław L. Woronowicz udowodnili też szereg nierówności (tzw. *nierówności WYDL*), ważnych m. in. w fizyce statystycznej. Ich dowody były znacznie prostsze i ogólniejsze od wcześniejszych. „Działkę" operatorową uprawia też Jan Dereziński, zajmując się rozlicznymi jej zastosowaniami w fizyce. Spośród nich wymienię tylko *teorię rozpraszania*. Dereziński rozwiązał jeden z ważnych problemów tej teorii, a mianowicie pokazał *asymptotyczną zupełność* dla ogólnego N-ciałowego rozpraszania, w przypadku dalekozasięgowych potencjałów. Asymptotyczna zupełność oznacza z grubsza, że operator Schrödingera posiada jako stany własne jedynie stany rozproszeniowe i (być może) związane. Nie istnieją żadne inne, „egzotyczne" stany. Takie oczekiwanie jest fizycznie oczywiste, ale udowodnić je jest trudno. Sytuacja tu odzwierciedla często spotykaną różnicę podejść „teoretycznego" i „matematycznego" w fizyce. Miłośnicy pierwszego zadowalają się „fizyczną oczywistością", drugiego zaś

8. Jest jednym z kilkunastu najliczniej cytowanych twórców afiliowanych przy Wydziale Fizyki. Jest to ewenement tym większy, iż jego prace to matematyka bądź fizyka matematyczna, których cytowalność jest średnio znacznie niższa, niż prac czysto fizycznych.

mozolą się i trudzą, aby udowodnić „fizycznie oczywiste" fakty. Dość złośliwie pierwsze podejście skomentowali Michael Reed i Barry Simon, autorzy wielotomowego, monumentalnego podręcznika fizyki matematycznej, przypuszczając, jak fizyk udowadniałby asymptotyczną zupełność: *Przyjmijmy, że asymptotycznej zupełności nie ma. Ale przecież to absurd! Co kończy dowód.* [6]. Jan Dereziński jest rasowym fizykiem matematycznym i poświęcił dużo wysiłku, aby przeprowadzić pełny dowód [7].

2.3. Geometria w fizyce, w tym teoria względności

2.3.1. Mechanika

Głównym odpowiedzialnym za powstanie mechaniki jest Isaac Newton. Trzy prawa Newtona, wraz z narzędziami niezbędnymi do ich analizy, są zawarte w [2] – jednej z najważniejszych książek w dziejach zarówno fizyki, jak i matematyki. Z czasem rozwijały się też inne ujęcia mechaniki, z grubsza (choć nie we wszystkich szczegółach) równoważne newtonowskiemu, ale wygodniejsze do zastosowania w innych sytuacjach, bądź pozwalające na bardziej przejrzystą analizę problemu. Takie dwa inne sformułowania, to formalizmy *lagranżowski* i *hamiltonowski*, powstałe sto kilkadziesiąt lat po Newtonie. Sto lat później okaże się, jak są istotne przy przejściu od mechaniki klasycznej do kwantowej... Tu widać, że czasem ważne jest rozpracowywanie nowych pojęć i formalizmów[9]. Sprawa się na tym nie skończyła. W XX w. zauważono, że u podstaw mechaniki leży *geometria symplektyczna*. Nie wyczerpuje to tematu; gdy się bliżej przyjrzeć, wyłania się obecność *wiązek podwójnych* wraz z istniejącymi tam izomorfizmami, jak również *struktur multisymplektycznych*. Badanie tych struktur geometrycznych jest kluczowe, ponieważ struktura pojęciowa mechaniki przenika całą fizykę.

Równoległy nurt, to przyglądanie się z tego punktu widzenia *teorii pola.* We wszystkich tych badaniach duży udział miał Włodzimierz Tulczyjew, będący jedynie przez 1 dzień pracownikiem KMMF, ale związany z nią przez dziesięciolecia, od lat 60. XX w. do chwili obecnej. Tulczyjew znalazł w KMMF współpracowników i kontynuatorów, głównie Jerzego Kijowskiego i Pawła Urbańskiego, który przekazał pałeczkę swojej doktorantce Katarzynie Grabowskiej, dziś już bliskiej profesury.

9. Wymieniłem tu jedynie dwa fundamentalne. Po otworzeniu jakiegokolwiek podręcznika mechaniki: Rubinowicza i Królikowskiego lub Białkowskiego, albo strony www Meissnera i Chankowskiego ujrzymy inne pojęcia mechaniki, które każdy fizyk powinien znać, *zasada najmniejszego działania, równania Eulera–Lagrange'a, równanie Hamiltona–Jacobiego, nawiasy Poissona, więzy holonomiczne i nieholonomiczne...*

Ryc. 1. Doktor hab. Katarzyna Grabowska odsłania tajniki mechaniki (fot. Jacek Wojtkiewicz)

Geometrycznymi strukturami w mechanice i teorii pola oraz w równaniach różniczkowych cząstkowych zajmuje się też Giovanni Moreno, który przybył „z ziemi włoskiej do Polski" i dobrze się tu oraz w KMMF zadomowił.

2.3.2. Energia grawitacyjna i jej dodatniość

Na początek pytanie, pozornie niezwiązane z tematem: Kto wszedł na Mount Everest jako drugi? Większość czytelników z pewnością wie, iż pierwszymi zdobywcami Mount Everestu są Hillary i Tenzing, ale wiedza o tym, kto wszedł na Everest jako *drugi*, nie jest już tak powszechna. Co to ma wspólnego z energią grawitacyjną? Otóż sytuacja jest podobna: Większość zainteresowanych wie, że pierwszy dowód dodatniości energii grawitacyjnej został podany przez Richarda Schoena i Shing-Tung Yau w 1979, a drugi przez Edwarda Wittena dwa lata później. Natomiast znacznie mniej osób wie, że *trzeci* dowód został podany przez Jerzego Kijowskiego[10] i współpracowników.

Przybliżmy trochę ten temat czytelnikom, dla których jest to egzotyka. Na ogólną teorię względności można patrzeć jak na *teorię pola*, znacznie trudniejszą, niż znane przed nią, a i długi czas po niej. Wśród obecnych w niej pojęć w naturalny sposób pojawia się *energia pola grawitacyjnego*. I już podstawowy problem, tj. pokazanie *dodatniości* energii grawitacyjnej (co decyduje o sensowności teorii), okazał się być zaskakująco trudny. Jedną z przyczyn jest fakt, iż nie można w sposób naturalny zdefiniować *gęstości energii* dla pola grawitacyjnego: Przez odpowiedni dobór układu odniesienia można sprawić, że w dowolnym wybranym punkcie po-

10. Profesor Jerzy Kijowski jest żywym przykładem, że konstrukty takie jak kot Schrödingera, nie są jedynie wymysłami teoretyków. Przez kilkadziesiąt lat Profesor oscyluje pomiędzy KMMF a Centrum Fizyki Teoretycznej PAN, tak jak kot Schrödingera pomiędzy dwoma wiadomymi stanami.

wierzchni Cauchy'ego gęstość ta jest równa zeru[11]. W innych teoriach pola można zdefiniować jednoznacznie lokalną gęstość energii i pokazać, że jest ona nieujemna.

Problem dodatniości energii grawitacyjnej atakowało wielu[12], ale pozostawał otwarty przez kilkadziesiąt lat. Pierwszy dowód dodatniości pojawił się dopiero na przełomie lat 70. i 80. XX. w. za sprawą najwyższej klasy matematyków – Schoena i Yau[13]. Podali oni ścisły dowód, posługując się „ciężkoatletycznymi" metodami: geometrią różniczkową wspomaganą analizą funkcjonalną oraz zaawansowaną teorią równań różniczkowych cząstkowych. Ogół relatywistów przyjął do wiadomości ten dowód, kręcąc jednakże głową nad jego trudnością – był niedostępny fizykowi o standardowym wykształceniu matematycznym – oraz nad tym, że był kompletnie nieprzejrzysty „fizycznie". Nie można tego było powiedzieć o dowodzie autorstwa Edwarda Wittena[14], podanym dwa lata później. Jego dowód, wykorzystujący rachunek spinorowy, był znacznie prostszy od osiągnięcia Schoena i Yau, a jednocześnie intuicyjny.

Trzeci dowód Jerzy Kijowski odkrył niejako mimochodem, przy okazji badań nad strukturą hamiltonowską teorii względności. Podejście hamiltonowskie zapoczątkowali Richard Arnowitt, Stanley Deser i Charles W. Misner jeszcze na początku lat 60. XX w. Wśród jego centralnych pojęć jest energia; autorzy ci wyprowadzili wyrażenie na nią jako całkę po powierzchni Cauchy'ego. Kijowski poprawił w kilku aspektach podejście ADM, podając jednocześnie o wiele bardziej transparentne sformułowanie hamiltonowskie przy użyciu *relacji symplektycznych* Włodzimierza Tulczyjewa. O wiele bardziej przejrzyste stały się tu związki pomiędzy koneksją a metryką. I okazało się też, że wyrażenie podcałkowe we wzorze na energię grawitacyjną, można w odpowiednio dobranych współrzędnych[15] zapisać w taki sposób, że będzie ono *ewidentnie nieujemne*. W te badania duży wkład wnieśli Jacek Jezierski [9] oraz Piotr Chruściel (spoza KMMF). (Obaj są już od dawna profesorami.)

Niestety Kijowski spóźnił się o 3 lata... Miał pecha podobnego do Szwajcarów Marmeta i Schmieda, którzy jako drudzy weszli na Everest.

Badania hamiltonowskiej struktury teorii względności i jej zastosowań do promieniowania grawitacyjnego są z powodzeniem kontynuowane w KMMF przez prof. Jezierskiego i jego doktorantów. Profesor Kijowski, mimo że na emeryturze, jest tu nadal bardzo aktywny.

2.4. Układy całkowalne

Być może nie wszyscy czytelnicy wiedzą, co to są solitony, zapewne dlatego, że nazwa ta stała się już klasyczna i jako taka, nie wzbudza ekscytacji swoją nowością. Natomiast tematyka całkowalności jest w dalszym ciągu ekscytująca.

Układ całkowalny zdefiniujemy ogólnikowo mówiąc, że umiemy dla niego jawnie wypisać ogólne rozwiązanie[16]. Fakt, iż model jest całkowalny, niesie daleko idące konsekwencje i z reguły umiemy zrozumieć jego zachowanie w o wiele większym stopniu, niż modeli niecałkowalnych. Z tego powodu intensywnie szuka się modeli całkowalnych w różnych działach fizyki i matematyki, takich jak równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, mechanika, mechanika statystyczna modeli klasycznych i kwantowych, teoria pola. Jednak znajdowanie takich modeli jest bardzo trudne – zdecydowana większość interesujących jest niecałkowalna.

W KMMF dużo odkryć poczynił na tym polu Antoni Sym[17] (†2021). Prace w tym kierunku prowadzą Maciej Nieszporski (układy dyskretne i nieliniowa zasada superpozycji) oraz Javier de Lucas Araujo – cenny hiszpański „nabytek" KMMF – bardzo aktywny, profesor na razie uczelniany, a niedługo z pewnością regularny, promotor trzech doktorantów płci obojga, rozwijający współpracę krajową i zagraniczną.

2.5. Mechanika statystyczna różnie uprawiana

Była i jest również uprawiana w KMMF *mechanika statystyczna*. Tutaj też „mocne" prace pisał Stanisław L. Woronowicz ze współpracownikami. Najważniejsza chyba z nich [10] (wspólnie z Wiesławem Puszem) dotyczy charakteryzowania układów kwantowych w stanie równowagi. Autorzy wprowadzili pojęcie *stanu biernego (pas-*

11. Nie znaczy to oczywiście, że energia jest źle zdefiniowanym pojęciem! Gdy w jednym punkcie gęstość energii wyzerujemy, to zmienia się ona w punktach sąsiednich tak, że całkowita energia, będąca całką z wyrażenia definiującego gęstość energii, pozostaje niezmienna.

12. Podobnie jak w Shreku „wielu dzielnych rycerzy próbowało [uwolnić królewnę], ale żadnemu się nie udało". Wśród tych, którzy znacząco posunęli wiedzę naprzód, ale nie udało im się postawić kropki nad i, należy na pewno wymienić Stanley Desera i Pong S. Janga.

13. Yau został w 1983 laureatem najwyższego odznaczenia wśród matematyków – medalu Fieldsa. Zostało ono wręczone na kongresie ICM w Warszawie, współorganizowanym przez KMMF.

14. Witten miał ogromne osiągnięcia w fizyce teoretycznej, które promieniowały też na matematykę; został uhonorowany medalem Fieldsa w 1990.

15. Znalezienie tych współrzędnych wymaga rozwiązania pewnego równania eliptycznego na współrzędną radialną, tzw. równania β-foliacji. W szczególnym przypadku staje się ono równaniem Laplace'a, co powoduje, że dowód Kijowskiego i in. jest nawet prostszy niż dowód Wittena.

16. Na przykład całkowalny jest jednowymiarowy kwantowy model Heisenberga o spinie 1/2, a nie są całkowalne modele o wyższym spinie.

17. Z artykułu Syma o solitonach w *Postępach Fizyki* z lat 80. XX w., autor wiele się o nich (solitonach) jako student dowiedział (*Postępy Fizyki* **31** (1), 3 (1980) przyp. red.).

sive state): Jeśli układ jest w takim stanie, to nie może on w procesie cyklicznym wykonać żadnej pracy mechanicznej (zgodnie z oczekiwaniem podpowiadanym przez 2. zasadę termodynamiki). Taki opis stanów równowagowych stanowi cenne uzupełnienie istniejących do tej pory podejść i pojęć, np. stanu KMS. Praca ta była cytowana kilkaset razy; przeniknęła też do podręczników mechaniki statystycznej.

W KMMF mechaniką statystyczną zajmuje się też Jacek Wojtkiewicz. Przedmiotem jego zainteresowań są układy sieciowe (m. in. modele: Isinga, Falicova–Kimballa, Hubbarda). Pokazał tu m. in. istnienie różnego rodzaju uporządkowań w tych modelach. Aktywny jest też przedstawiciel młodszego pokolenia Marcin Napiórkowski – syn Marka, profesora w IFT UW. Ojciec uprawia fizykę generalnie w stylu teoretycznym, a syn – matematycznym[18]. Uzyskał on już sporo ścisłych wyników dotyczących kondensacji Bosego–Einsteina w układzie oddziaływujących bozonów.

2.6. Modelowanie

Generalnie ekipa KMMF zajmuje się fizyką matematyczną lub matematyką. Czasem jednak, z różnych powodów, pojawiają się w ich działalności wątki spoza tego nurtu, o zastosowaniu stricte praktycznym – bezpośrednio lub potencjalnie. Można tu wymienić Pawła Kasprzaka z używanym przez niego *compressed sensing* w zastosowaniach do spektroskopii NMR, czy też Jacka Wojtkiewicza, który zajmuje się modelowaniem organicznych ogniw fotowoltaicznych.

2.7. Ludzie związani z KMMF w przeszłości

Przez KMMF na przestrzeni dziejów przewinęło się wiele osób. Niektórzy odchodzili, bo chcieli, inni, bo musieli. Wielu z nich dalej pracowało w fizyce matematycznej: jedni w Polsce, inni za granicą. Oto niektórzy z nich.

- *Krzysztof Gawędzki*: pracował w KMMF do początku lat 80. XX w., później wyjechał do Francji, gdzie pracował m. in. w IHES i ENS Lyon. Osiągnięcia miał wielkie i różnorodne: kwantowa teoria pola, w szczególności konforemna teoria pola; ścisła technika grupy renormalizacyjnej; teoria turbulencji. Bardziej wyczerpująco o jego zainteresowaniach i osiągnięciach napisano w [11]. W 2021 otrzymał, jako pierwszy Polak, prestiżową nagrodę Heinemana z fizyki matematycznej. Utrzymywał żywe kontakty z KMMF, w ramach których współpracował głównie z Rafałem R. Suszkiem.

  W chwili kończenia tego artykułu nadeszła smutna wiadomość: Krzysztof Gawędzki zmarł 21.01.2022.
- *Józef Sławny*: W KMMF od początku do lat 60. XX w., kiedy musiał wyjechać z Polski. Głównym polem jego aktywności badawczej była mechanika statystyczna układów spinowych, przede wszystkim rozwinięcie teorii Pirogova–Sinai'a na układy o nieskończonej degeneracji stanów podstawowych. Zajmował się również teorią rozpoznawania obrazów, posiłkując się narzędziami mechaniki statystycznej.

3. Pozamerytoryczne ciekawostki

Typowe dla członków teamu KMMF jest posiadanie rozmaitych pozazawodowych zainteresowań, uprawianych niejednokrotnie z dużą aktywnością i powodzeniem. I tak, następca (operatorowy i kwantowogrupowy) Stanisława L. Woronowicza, prof. Piotr Sołtan, jest trenerem pływania, aktywnym zawodnikiem i wielokrotnym rekordzistą Polski w pływaniu Masters. Regularnie pływa również pod gołym niebem – o każdej porze roku. Doktor hab. Katarzyna Grabowska jest miłośniczką biegania, przebiegła kilka maratonów w Polsce i za granicą, aż ją to znudziło i teraz zaczęła uprawiać biegi terenowe. Aktywni sportowo są (lub byli) też inni członkowie KMMF: kierownik prof. Jacek Jezierski ma papiery instruktora narciarstwa, Szymon Charzyński – instruktora aikido. Profesorowie Jerzy Kijowski i Kazimierz Napiórkowski, zapaleni żeglarze, w czasie rejsu jachtem po Morzu Śródziemnym odkryli nową wyspę. Przynajmniej tak się na początku wydawało. Doprecyzowując: wyspa ta to kilkumetrowa skała, niefigurująca na dość dokładnej mapie, którą się wtedy posługiwali (był to początek XXI w., mapy internetowe dopiero raczkowały). Dopiero wyczerpująca kwerenda pokazała, iż skałka ta była już skatalogowana. Jerzy Kijowski jest też miłośnikiem muzyki, m.in. wielokrotnie dyrygował chórem Wydziału Fizyki. Czynnie muzykuje też Piotr Sołtan. Mają w tych zainteresowaniach partnera Pawła Urbańskiego angażującego się od wielu lat (w licznych stowarzyszeniach) w życie muzyczne Warszawy. Marcin Kościelecki to zapamiętały podróżnik; Amerykę Południową przewędrował wzdłuż, wszerz i w poprzek. Adam Smólski uprawiał wspinaczkę, z największą intensywnością w latach 70. XX w. Jego pierwsze przejście klasyczne (tzn. wykorzystujące tylko naturalną rzeźbę skały) drogi na Mnichu zwanej Sprężyną było w tamtym czasie jednym z najwybitniejszych osiągnięć w Tatrach. (Trudność drogi jest rzeczą względną – kolejne powtórzenia sprawiają, iż relatywnie trudność maleje. Gdy autor tego artykułu robił kolejne przejście Sprężyny w 1989, był to już tylko trudny standard.) I można by tak jeszcze ciągnąć... ale objętość artykułu nie może być zbyt wielka.

18. Potencjalny konflikt pokoleń realizuje się tu twórczo, podobnie jak w przypadku Thomsonów, z których ojciec Joseph J. dostał Nobla za odkrycie, że elektron jest cząstką, a syn George P. – za odkrycie, że elektron jest falą.

Ryc. 2. Team (niekompletny) KMMF. Od prawej: Szymon Charzyński, Aleksandra Kuncewicz, Rafał R. Suszek, Daniel Wysocki, Marcin Kościelecki, Javier de Lucas Araujo, Adam Latosiński, Paweł Kasprzak, Marcin Napiórkowski, Jacek Jezierski (kierownik), Jan Dereziński, Katarzyna Grabowska, Maciej Nieszporski, Piotr Waluk, Jacek Wojtkiewicz (fot. Katarzyna Nurowska)

4. Ku przyszłości: futurologia i fantastyka

(W tytule zamierzona aluzja do Lema.) W opinii autora, podobnie jak nie należy się obawiać o przyszłość fizyki matematycznej, tak nie należy się obawiać o przyszłość KMMF[19].

Tempora mutantur, et nos mutamur in illis. Jedne tematy przestaną być modne, inne znajdą się na topie zainteresowań, na pewno pojawią się nowe. Natomiast relacje między fizyką a matematyką pozostaną podobnie bliskie, jak obecnie. Jedną z dziedzin, skupiających coraz większą uwagę, będzie zapewne informatyka kwantowa. Może też jakaś odmiana uczenia maszynowego. Struny mają piękną matematykę, natomiast mimo kilkudziesięciu lat rozwoju nie udokumentowały swojego znaczenia fizycznego. Podobnie geometria nieprzemienna i grupy kwantowe. Ciekawe, czy te piękne działy matematyki okażą się być odpowiedzialne za fizykę przy wielkich energiach i małych długościach[20]. Być może, pojawi się kolejna teoria, opisująca sub-atto-świat[21]? Jeśli tak, to czy będzie tu można wykorzystać do opisu istniejące teorie matematyczne, czy trzeba będzie opracować coś nowego?

No i pozostaje jeszcze klasyka, tzn. stare problemy: hipoteza Riemanna oraz jej wzmocnienia i próby dowodu ze strony fizyki; równanie Naviera–Stokesa; rozwinięcie nierównowagowej mechaniki statystycznej; hipoteza cenzora kosmicznego i tego, co się dzieje na poziomie kwantowym w osobliwościach nieuniknionych w kolapsie grawitacyjnym (choć to ostatnie to już wyzwanie dla wszystkich fizyków, nie tylko matematycznych).

I można by tu wyliczać długo... A co będzie, to *qui vivra, verra* (pożyjemy, zobaczymy).

19. Choć pewności mieć nie można. Czy kilka lat temu ktoś żywił poważne obawy o pokój w Europie?

20. Mowa tu o *oryginalnych* motywacjach, bo w innych dziedzinach okazywały się być obecne i efektywne.

Literatura

[1] 100 lat fizyki od Hożej do Pasteura. Księga wspomnień, s. 451. Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2021.

[2] I. Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687.

21. mili-mikro-nano-piko-femto-atto...

[3] J. C. Maxwell: A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, 1865.

[4] W. Byron, R. Fuller: Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej.

[5] K. Maurin: Metody przestrzeni Hilberta, Warszawa 1959; General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups, Warszawa 1968.

[6] M. Reed, B. Simon: Methods of modern mathematical physics, vol. 3: Scattering theory.

[7] J. Dereziński, Ch. Gérard: Scattering Theory of Classical and Quantum N-Particle Systems. Springer, 1997.

[8] S. L. Woronowicz: Twisted $SU(2)$ group. An example of a noncommutative differential calculus. *Publ. RIMS Kyoto* **23**, 117-181 (1987).

[9] J. Jezierski, J. Kijowski: Positivity of total energy in general relativity. *Phys. Rev.* **D 36**, 1041-1044 (1987).

[10] W. Pusz, S. L. Woronowicz: Passive States and KMS States for General Quantum Systems. *Comm. Math. Phys.* **58**, 273-290 (1978).

[11] R. R. Suszek, P. Urbański: https://www.fuw.edu.pl/tl_files/aktualnosci/nekrologi/Krzysztof_Gawedzki_wspomnienie.pdf