MINUT 2019 (1), s. 42–55
ISSN 2719-3063

Karolina FOLCZYŃSKA, Ewa ŁOBOS

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska w Gliwicach

Zastosowanie transformacji Laplace'a do rozwiązywania pewnych równań różniczkowych zwyczajnych

Streszczenie. W artykule pokazano, jak można rozwiązać pewne równania różniczkowe za pomocą przekształcenia (transformacji) Laplace'a. Metoda ta została omówiona na kilku konkretnych przykładach, z wyjaśnieniami i kompletnymi rozwiązaniami. Wskazano również na zalety i wady tej metody.

Słowa kluczowe: transformata Laplace'a, oryginał, równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach, warunki początkowe.

1. Podstawowe informacje o przekształceniu Laplace'a

Przypuśćmy, że mamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która dla ujemnych argumentów przyjmuje zawsze wartość zero. *Transformatą Laplace'a* funkcji f nazywamy funkcję F zdefiniowaną jako

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt, \tag{1}$$

o ile powyższa całka niewłaściwa jest zbieżna dla pewnych $s \in \mathbb{C}$.

Funkcję, która przyporządkowuje funkcji f jej transformatę Laplace'a F nazywamy *transformacją (lub przekształceniem) Laplace'a*. Przekształcenie Laplace'a oznacza się literą $\mathcal{L}$, natomiast transformatę Laplace'a funkcji f można zapisać jako $\mathcal{L}[f(t)]$ lub $F(s)$ (zwyczajowo podajemy argumenty funkcji f i F).

Przypomnijmy, że funkcja f jest *oryginałem*, jeśli spełnia następujące warunki:

1) $f(t) = 0$ dla każdego $t < 0$,

2) w dowolnym przedziale $[a, b]$ funkcja f ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,

3) istnieją takie stałe $M > 0$ i $\alpha \geq 0$, że $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ dla każdego t.

Autor korespondencyjny: E. Łobos (Ewa.Lobos@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 19.09.2019.

Najprostszymi oryginałami są funkcja stała równa 0 oraz tzw. jedynka Heaviside'a, zdefiniowana jako

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Można udowodnić, że:

- jeżeli f jest oryginałem, to w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > \alpha$ istnieje $\mathcal{L}[f(t)]$,
- jeżeli f i g są oryginałami ciągłymi w przedziale $[0, +\infty)$ i $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, to $f(t) = g(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Przekształcenie Laplace'a jest powszechnie stosowane do rozwiązywania pewnych równań różniczkowych (ale nie tylko). Dla większości Czytelników wzór (1) może być przerażający — mamy całkę niewłaściwą i na dodatek całkujemy funkcję zespoloną... Nie należy się jednak martwić, ponieważ w tym artykule w ogóle nie będziemy korzystać z definicji. W przykładach, omówionych dalej, będziemy rozważać tylko oryginały (bo na pewno istnieją ich transformaty) i korzystać przede wszystkim z dwóch własności:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s), \tag{2}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0), \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

Wzór (2) zachodzi dla dowolnych stałych $a, b \in \mathbb{C}$ i dowolnych oryginałów f, g, których transformaty oznaczono $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ i $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$. We wzorze (3) przyjęto konwencję $f^{(0)} = f$; wzór ten jest prawdziwy, gdy $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ są oryginałami i $f^{(n)}$ jest funkcją ciągłą w $[0, +\infty)$. Wypiszmy wyraźnie kilka szczególnych przypadków wzoru (3). Mamy:

- $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$,
- $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$,
- $\mathcal{L}[f'''(t)] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$ itd.

Będziemy też korzystali z transformat wybranych funkcji, które są zebrane w tabeli 1.

Tabela 1. Transformaty Laplace'a wybranych funkcji

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$t^n \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at} \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$t^n \cdot e^{at} \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(at) \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\cos(at) \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$t \cdot \sin(at) \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t \cdot \cos(at) \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$e^{at} \cdot \sin(bt) \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cdot \cos(bt) \cdot \mathbb{1}(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

Rozwiązywanie równań różniczkowych z zastosowaniem przekształcenia Laplace'a jest podobne do tłumaczenia na inny język i z tego powodu własności przekształcenia Laplace'a nazywa się jego gramatyką (lub regułami gramatycznymi), natomiast tabelę 1 — słownikiem. Nasz słownik jest ubogi, ale wystarczy do podstawowych zastosowań (bardziej rozbudowane słowniki można znaleźć w [4], [5]). Schemat postępowania można przedstawić w punktach.

1. Chcemy rozwiązać równanie różniczkowe, w którym występuje nieznana funkcja y (jest to funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej). Równanie różniczkowe jest zdaniem w pewnym języku A (tak nazwijmy język, którego używamy do opisu funkcji rzeczywistych). Aby móc skorzystać z przekształcenia Laplace'a, przyjmujemy dodatkowe założenie, że y jest oryginałem.

2. Nakładamy na obie strony równania różniczkowego transformaty Laplace'a (o ile jest to możliwe; zob. uwagę 3 w ostatnim rozdziale). Tym samym „tłumaczymy" nasze zdanie, czyli równanie różniczkowe, z języka A na język B, którym mówimy o funkcjach zespolonych zmiennej zespolonej, przy czym korzystamy tylko z gramatyki i słownika.

3. Otrzymujemy nowe równanie (w języku B, przy czym będzie to już równanie algebraicznie), w którym niewiadomą jest funkcja Y, czyli transformata nieznanej funkcji y. Funkcja Y jest funkcją zespoloną zmiennej zespolonej. Rozwiązujemy to nowe równanie.

4. Korzystamy ze słownika w drugą stronę, tzn. „tłumaczymy" rozwiązanie z języka B na język A (mówiąc precyzyjnie, wyznaczamy transformatę odwrotną). Otrzymana w ten sposób funkcja, zapisana w języku A, jest rozwiązaniem naszego równania różniczkowego. Rozwiązanie to jest jednoznaczne, gdyż y jest oryginałem ciągłym[1] w $[0, +\infty)$.

Często równanie z punktu 3 jest łatwe do rozwiązania. Najtrudniejszym etapem powyższego schematu jest wyznaczenie transformaty odwrotnej. Transformatę odwrotną można wyznaczyć ze wzoru

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s)e^{st}\, ds,$$

jednak wymaga on całkowania funkcji zespolonej po pewnej prostej (jest to czasochłonne), korzystamy z niego tylko w ostateczności, więc świadomie nie interpretujemy tu tego wzoru. Można też zastosować wzory Heaviside'a, ale trzeba je znać (może kiedyś powstanie artykuł na ten temat; zainteresowanych odsyłamy do podręczników [2] lub [4]). Alternatywnym (prostym) sposobem jest rozkład transformaty Y na ułamki proste (zauważmy, że w tabeli 1 w kolumnie transformat są tylko funkcje wymierne, w których stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika) i odczytanie oryginału ze słownika, po ewentualnych „kosmetycznych" przekształceniach. Korzysta się tu z faktu, że transformacja odwrotna do transformacji Laplace'a jest (podobnie jak transformacja Laplace'a) przekształceniem liniowym, tzn. jeśli istnieją transformaty odwrotne do funkcji F i G, to

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)], \tag{4}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ są dowolnymi stałymi.

[1] W równaniu różniczkowym występują jakieś pochodne funkcji y, więc musi ona być ciągła.

2. Równania różniczkowe — przykłady

Przykład 1. Znajdziemy oryginał, który spełnia następujące równanie różniczkowe z warunkiem początkowym:

$$2y' - y = -24e^{\frac{t}{2}} \sin 3t, \quad y(0) = 4. \tag{5}$$

Ponieważ szukamy oryginału spełniającego podane równanie różniczkowe, interesuje nas tylko to, co się będzie działo dla $t > 0$ (z warunku początkowego wiemy, co się dzieje w chwili $t = 0$). Zauważmy, że nasze równanie różniczkowe możemy zapisać w postaci

$$2y' - y = -24e^{\frac{t}{2}} \sin 3t \cdot \mathbb{1}(t),$$

przy czym warunek początkowy pozostaje bez zmian. Po prawej stronie równania różniczkowego mamy teraz oryginał i jesteśmy w stanie „przetłumaczyć” nasze równanie na język transformat.
Niech $\mathcal{L}[y] = Y(s)$. Wówczas:

- $\mathcal{L}[y'] = \mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 4$ (z własności (3) oraz warunku początkowego),
- $\mathcal{L}[2y' - y] = 2\mathcal{L}[y'] - Y(s) = 2sY(s) - 8 - Y(s)$ (z własności (2)),
- $\mathcal{L}[-24e^{\frac{t}{2}} \sin 3t \cdot \mathbb{1}(t)] = -24\mathcal{L}[e^{\frac{t}{2}} \sin 3t \cdot \mathbb{1}(t)] = -24 \cdot \frac{3}{(s-\frac{1}{2})^2+9} = \frac{-72}{(s-\frac{1}{2})^2+9}$ (z własności (2) i tab. 1).

W języku transformat warunki (5) mają postać jednego równania:

$$2sY(s) - 8 - Y(s) = \frac{-72}{(s-\frac{1}{2})^2+9}.$$

Następnie wyznaczamy $Y(s)$:

$$(2s-1)Y(s) = \frac{-72}{(s-\frac{1}{2})^2+9} + 8,$$

$$(2s-1)Y(s) = \frac{8(s-\frac{1}{2})^2}{(s-\frac{1}{2})^2+9},$$

$$Y(s) = \frac{8(s-\frac{1}{2})^2}{(2s-1)((s-\frac{1}{2})^2+9)},$$

$$Y(s) = \frac{8(s-\frac{1}{2})^2}{2(s-\frac{1}{2})\left((s-\frac{1}{2})^2+9\right)}.$$

Po uproszczeniu ułamka dostajemy

$$Y(s) = \frac{4(s-\frac{1}{2})}{(s-\frac{1}{2})^2+9}.$$

Skorzystajmy z własności (4) oraz ponownie z tabeli transformat:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4(s-\frac{1}{2})}{(s-\frac{1}{2})^2+9}\right] = 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-\frac{1}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+9}\right] = 4e^{\frac{t}{2}} \cos 3t \cdot \mathbb{1}(t).$$

Otrzymaliśmy oryginał, który jest funkcją ciągłą w $[0, +\infty)$. Zatem jedynym oryginałem spełniającym rozważane równanie różniczkowe z warunkiem początkowym jest funkcja określona wzorem:

$$y(t) = 4e^{\frac{t}{2}} \cos 3t \cdot \mathbb{1}(t).$$

Przykład 2. Znajdziemy oryginał spełniający warunki:

$$y' + 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1. \tag{6}$$

Postępujemy podobnie jak w przykładzie 1. Oznaczamy $\mathcal{L}[y] = Y(s)$ i mamy:

- $\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$ (z własności (3) i warunku początkowego),
- $\mathcal{L}[y' + 3y] = \mathcal{L}[y'] + 3\mathcal{L}[y] = sY(s) - 1 + 3Y(s)$ (z własności (2)),
- $\mathcal{L}[e^{2t} \cdot \mathbb{1}(t)] = \dfrac{1}{s-2}$ (z tab. 1).

Zatem nieznany oryginał $y = y(t)$ spełnia warunki (6) wtedy i tylko wtedy, gdy jego transformata $Y = Y(s)$ spełnia warunek

$$sY(s) - 1 + 3Y(s) = \frac{1}{s-2}.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie, w którym niewiadomą jest $Y(s)$:

$$sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s-2} + 1,$$

$$(s+3)Y(s) = \frac{1+s-2}{s-2},$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+3)}.$$

Takiej funkcji nie mamy w słowniku, więc rozkładamy ją na ułamki proste:

$$\frac{s-1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} \quad \Big| \cdot (s-2)(s+3)$$

$$s - 1 = A(s+3) + B(s-2).$$

Teraz można porównać współczynniki przy odpowiednich potęgach i rozwiązać pewien układ równań[2]. Jednak będzie szybciej, gdy podstawimy za s dwie różne liczby rzeczywiste (mamy równość dwóch funkcji liniowych):

$$\begin{array}{llllll} s = 2 & \Rightarrow & 1 = 5A & \Rightarrow & A = \frac{1}{5}, \\ s = -3 & \Rightarrow & -4 = -5B & \Rightarrow & B = \frac{4}{5}. \end{array}$$

Zatem

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{5}}{s-2} + \frac{\frac{4}{5}}{s+3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+3}.$$

Teraz musimy znaleźć oryginał, którego transformatą jest podana wyżej funkcja. Ze słownika (tab. 1) odczytujemy:

$$\mathcal{L}[e^{2t} \cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{1}{s-2}, \qquad \mathcal{L}[e^{-3t} \cdot \mathbb{1}(t)] = \frac{1}{s+3}.$$

[2] W zadaniach omawianych w tym artykule zawsze dochodzimy do miejsca, w którym trzeba wyznaczyć współczynniki rozkładu na ułamki proste pewnej funkcji wymiernej. Jeśli porównamy współczynniki przy odpowiednich potęgach s, to otrzymamy układ równań (układ ten jest zawsze oznaczony i można go rozwiązać dowolną metodą — podstawiania, eliminacji Gaussa lub za pomocą wzorów Cramera). Inny sposób wyznaczenia współczynników rozkładu to podstawienie za s kilku różnych liczb (więcej o tej metodzie można znaleźć w artykule R. Broćka i B. Pawlika, *Rozkład na ułamki proste*, MINUT 2019). W tej pracy stosujemy różne metody znajdowania tych współczynników.

Transformacja odwrotna do transformacji Laplace'a jest przekształceniem liniowym (własność (4)), czyli

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s-2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s+3}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]+\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = \left(\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{4}{5}e^{-t}\right)\mathbb{1}(t).$$

Wnioskujemy więc, że jedynie oryginał

$$y = \left(\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{4}{5}e^{-t}\right)\mathbb{1}(t)$$

spełnia warunki (6).

Przykład 3. Znajdziemy oryginał spełniający warunki:

$$4y'' + y = 3 - t, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 0. \tag{7}$$

Najpierw prawą stronę podanego wyżej równania różniczkowego zapisujemy jako $3\cdot\mathbb{1}(t) - t\cdot\mathbb{1}(t)$; teraz nie mamy problemu ze znalezieniem transformaty tej funkcji.

Niech $\mathcal{L}[y] = Y(s)$. Wówczas:

- $\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 3s$ (z własności (3) i warunków początkowych),
- $\mathcal{L}[4y'' + y] = 4\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = 4s^2Y(s) - 12s + Y(s)$ (z własności (2)),
- $\mathcal{L}[(3-t)\mathbb{1}(t)] = \dfrac{3}{s} - \dfrac{1}{s^2}$ (z własności (2) i tab. 1).

Zatem nieznany oryginał $y = y(t)$ spełnia warunki (7) wtedy i tylko wtedy, gdy jego transformata $Y = Y(s)$ spełnia warunek

$$4s^2Y(s) - 12s + Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie, w którym niewiadomą jest $Y(s)$:

$$4s^2Y(s) + Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s^2} + 12s,$$

$$(4s^2+1)Y(s) = \frac{3s - 1 + 12s^3}{s^2},$$

$$Y(s) = \frac{12s^3 + 3s - 1}{s^2(4s^2+1)}.$$

Takiej funkcji nie mamy w słowniku, więc rozkładamy ją na ułamki proste:

$$\frac{12s^3+3s-1}{s^2(4s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{4s^2+1} \quad \Big| \cdot s^2(4s^2+1)$$

$$12s^3 + 3s - 1 = As(4s^2+1) + B(4s^2+1) + (Cs+D)s^2,$$

$$12s^3 + 3s - 1 = 4As^3 + As + 4Bs^2 + B + Cs^3 + Ds^2.$$

Teraz porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej s (nie ma sensu podstawiać czterech konkretnych wartości za s, ponieważ tylko dla $s = 0$ otrzymalibyśmy łatwe równanie) i rozwiązujemy otrzymany układ równań:

$$\begin{array}{rrcl} [s^3]: & 12 & = & 4A + C, \\ [s^2]: & 0 & = & 4B + D, \\ [s^1]: & 3 & = & A, \\ [s^0]: & -1 & = & B. \end{array}$$

Dwa współczynniki już mamy. Wstawiamy $A = 3$ do pierwszego równania oraz $B = -1$ do drugiego równania i otrzymujemy:

$$\begin{array}{lcl} 12 = 12 + C & \Rightarrow & C = 0, \\ 0 = -4 + D & \Rightarrow & D = 4. \end{array}$$

Zatem

$$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{-1}{s^2} + \frac{4}{4s^2+1} = 3 \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + \frac{1}{4}} = 3 \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + (\frac{1}{2})^2},$$

czyli jedynym oryginałem spełniającym warunki (7) jest funkcja określona wzorem

$$y = \left(3 - t + 2\sin\frac{t}{2}\right) \mathbb{1}(t).$$

Przykład 4. Rozwiążmy, stosując przekształcenie Laplace'a, następujące równanie różniczkowe rzędu drugiego z warunkami początkowymi:

$$y'' - y' = 3t^2 - 6t + 2, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -2. \tag{8}$$

Przyrównamy transformaty Laplace'a obu stron równania (8). Oznaczamy $\mathcal{L}[y] = Y(s)$, korzystamy ze wzorów (2) i (3) oraz tabeli transformat i dostajemy

$$s^2Y(s) - 4s + 2 - (sY(s) - 4) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^2} + \frac{2}{s}.$$

Z powyższego równania wyznaczamy $Y(s)$:

$$s^2Y(s) - sY(s) - 4s + 6 = \frac{6 - 6s + 2s^2}{s^3},$$

$$(s^2 - s)Y(s) = \frac{6 - 6s + 2s^2}{s^3} + 4s - 6,$$

$$(s^2 - s)Y(s) = \frac{4s^4 - 6s^3 + 2s^2 - 6s + 6}{s^3},$$

$$Y(s) = \frac{4s^4 - 6s^3 + 2s^2 - 6s + 6}{s^3(s^2 - s)},$$

$$Y(s) = \frac{4s^4 - 6s^3 + 2s^2 - 6s + 6}{s^4(s - 1)}.$$

Zauważmy, że dla $s = 1$ licznik ma wartość 0, więc można go rozłożyć na czynniki

$$Y(s) = \frac{(s-1)(4s^3 - 2s^2 - 6)}{s^4(s-1)}$$

i uprościć ułamek

$$Y(s) = \frac{4s^3 - 2s^2 - 6}{s^4}.$$

Takiej funkcji nie mamy w słowniku, ale możemy ją zapisać jako kombinację liniową transformat z naszego słownika:

$$Y(s) = \frac{4}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{6}{s^4},$$

$$Y(s) = 4 \cdot \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{3!}{s^4}.$$

Teraz z tabeli transformat (tab. 1) odczytujemy rozwiązanie równania różniczkowego (8) z podanymi warunkami początkowymi:

$$y(t) = (4 - 2t - t^3) \cdot \mathbb{1}(t).$$

Przykład 5. Rozwiążmy równanie różniczkowe liniowe rzędu trzeciego

$$y''' + y' - 2y = \sin 2t \tag{9}$$

z warunkami początkowymi: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

Chociaż to zadanie wygląda niewinnie, jest ono bardziej skomplikowane rachunkowo niż poprzednie przykłady. W życiu rzadko zdarzają się „ładne" problemy, poćwiczmy więc naszą sprawność rachunkową. Rozpoczynamy standardowo i ten etap rozwiązania jest łatwy. Zastosujemy transformację Laplace'a do obu stron równania (9) z podanymi warunkami początkowymi. Oznaczamy $\mathcal{L}[y] = Y(s)$, korzystamy ze wzorów (2) i (3) oraz tabeli transformat i dostajemy:

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{2}{s^2+4},$$

$$s^3Y(s) - 2 + sY(s) - 2Y(s) = \frac{2}{s^2+4},$$

$$(s^3 + s - 2)Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + 2,$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10}{(s^2+4)(s^3+s-2)},$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 10}{(s^2+4)(s-1)(s^2+s+2)}.$$

Rozkładamy transformatę na ułamki proste:

$$\frac{2s^2+10}{(s^2+4)(s-1)(s^2+s+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+s+2} + \frac{Ds+E}{s^2+4}.$$

Mnożymy obie strony przez $(s^2+4)(s-1)(s^2+s+2)$ i dostajemy

$$2s^2 + 10 = A(s^2+4)(s^2+s+2) + (Bs+C)(s^2+4)(s-1) + (Ds+E)(s-1)(s^2+s+2),$$

$$2s^2{+}10 = s^4(A{+}B{+}D){+}s^3(A{-}B{+}C{+}E){+}s^2(6A{+}4B{-}C{+}D){+}s(4A{-}4B{+}4C{-}2D{+}E){+}(8A{-}4C{-}2E).$$

Następnie porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach. Otrzymujemy układ pięciu równań:

$$\begin{aligned}
\left[s^4\right]&: \quad A+B+D=0,\\
\left[s^3\right]&: \quad A-B+C+E=0,\\
\left[s^2\right]&: \quad 6A+4B-C+D=2,\\
\left[s^1\right]&: \quad 4A-4B+4C-2D+E=0,\\
\left[s^0\right]&: \quad 8A-4C-2E=10.
\end{aligned}$$

Dzielimy stronami przez 2 ostatnie równanie (mniejsze liczby to łatwiejsze rachunki i mniejsze prawdopodobieństwo pomyłki) i rozwiązujemy powyższy układ równań metodą eliminacji Gaussa:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 6 & 4 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 4 & -4 & 4 & -2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -2 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -w_1 \\ -6w_1 \\ -4w_1 \\ -4w_1 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1 & -5 & 0 & 2\\ 0 & -8 & 4 & -6 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -2 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -w_2 \\ -4w_2 \\ -2w_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -2 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ -2w_3 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ -3w_4 \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 \end{array}\right].$$

Nasz układ jest już w postaci schodkowej, więc bez trudu wyznaczymy niewiadome (zaczynamy od ostatniego równania):

$$\begin{cases} -10E=1\\ 2D+3E=0\\ 2C+4D+E=-2\\ 2B-C+D-E=0\\ A+B+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=-\frac{1}{10}\\ D=\frac{3}{20}\\ C=-\frac{5}{4}\\ B=-\frac{3}{4}\\ A=\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Zatem transformata Y nieznanej funkcji y ma postać

$$Y(s)=\frac{\frac{3}{5}}{s-1}+\frac{-\frac{3}{4}s-\frac{5}{4}}{s^2+s+2}+\frac{\frac{3}{20}s-\frac{1}{10}}{s^2+4}.$$

Korzystając z tabeli transformat (tab. 1), mamy:

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{3}{5}}{s-1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s-1}\right]=\frac{3}{5}e^t\cdot\mathbb{1}(t),$

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{3}{20}s-\frac{1}{10}}{s^2+4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{20}\cdot\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{20}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right]=\left(\frac{3}{20}\cos 2t-\frac{1}{20}\sin 2t\right)\cdot\mathbb{1}(t),$

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{3}{4}s-\frac{5}{4}}{s^2+s+2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{3}{4}s-\frac{5}{4}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{4}}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{3}{4}\left(s+\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{8}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\right]=$

$=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}-\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\right]=\left(-\frac{3}{4}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{7}}{4}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2}\right)\cdot\mathbb{1}(t).$

Zatem rozwiązaniem rozważanego równania różniczkowego jest oryginał:

$$y(t)=\left(\frac{3}{5}e^t-\frac{3}{4}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{7}}{4}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2}+\frac{3}{20}\cos 2t-\frac{1}{20}\sin 2t\right)\cdot\mathbb{1}(t).$$

Przykład 6. Rozwiążemy układ równań różniczkowych[3]

$$\begin{cases} x'=x-2y \\ y'=2x+y, \end{cases} \tag{10}$$

z warunkami początkowymi $x(0)=1$ oraz $y(0)=0$.

Jest to układ dwóch równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu. Przyjmijmy, że $\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$ i $\mathcal{L}[y(t)]=Y(s)$. Porównajmy transformaty obu stron obu równań różniczkowych:

$$\begin{cases} sX(s)-x(0)=X(s)-2Y(s) \\ sY(s)-y(0)=2X(s)+Y(s). \end{cases}$$

Po uwzględnieniu warunków początkowych dostajemy układ równań, w którym niewiadomymi są $X(s)$ oraz $Y(s)$:

$$\begin{cases} (s-1)X(s)+2Y(s)=1 \\ 2X(s)+(1-s)Y(s)=0. \end{cases}$$

Rozwiążemy powyższy układ równań za pomocą wzorów Cramera. Musimy obliczyć trzy wyznaczniki:

$$W=\begin{vmatrix} s-1 & 2 \\ 2 & 1-s \end{vmatrix}=(s-1)(1-s)-4=-(s-1)^2-4,$$

$$W_X=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1-s \end{vmatrix}=1-s,$$

$$W_Y=\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2.$$

Zatem

$$X(s)=\frac{W_X}{W}=\frac{1-s}{-(s-1)^2-4}=\frac{s-1}{(s-1)^2+4},\quad Y(s)=\frac{W_Y}{W}=\frac{-2}{-(s-1)^2-4}=\frac{2}{(s-1)^2+4}.$$

Korzystając ze słownika (tab. 1), odczytujemy oryginały, które są rozwiązaniem układu równań różniczkowych (10) z podanymi warunkami początkowymi:

$$x(t)=e^t\cos(2t)\cdot\mathbb{1}(t),\qquad y(t)=e^t\sin(2t)\cdot\mathbb{1}(t).$$

[3] Treść przykładu zaczerpnięto z [3].

Przykład 7. Rozwiążemy teraz równanie różniczkowe

$$y'' - 4y = 1. \tag{11}$$

Oznaczamy $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ i mamy problem: nie możemy zastosować przekształcenia Laplace'a, ponieważ nie znamy warunków początkowych, które są niezbędne do wyznaczenia $\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$. Przyjmijmy więc

$$y(0) = a,\ y'(0) = b,$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi rzeczywistymi. Teraz korzystamy z gramatyki oraz słownika przekształcenia Laplace'a i otrzymujemy równanie:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4Y(s) = \frac{1}{s},$$

$$s^2Y(s) - sa - b - 4Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Wyznaczamy $Y(s)$ z powyższego równania:

$$(s^2 - 4)Y(s) = \frac{1}{s} + sa + b,$$

$$Y(s) = \frac{1 + as^2 + bs}{s(s-2)(s+2)}.$$

Aby otrzymać znane nam transformaty, musimy rozłożyć powyższy ułamek na ułamki proste:

$$\frac{1 + as^2 + bs}{s(s-2)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+2}.$$

Mnożymy stronami przez mianownik lewej strony, upraszczamy i otrzymujemy:

$$1 + as^2 + bs = A(s^2 - 4) + Bs(s+2) + Cs(s-2) \qquad (*)$$

$$1 + as^2 + bs = s^2(A + B + C) + s(2B - 2C) - 4A,$$

skąd dostajemy układ trzech równań:

$$\begin{aligned} &[s^2] : A + B + C = a,\\ &[s^1] : 2B - 2C = b,\\ &[s^0] : -4A = 1. \end{aligned}$$

Z układu mamy:

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{1}{8}, \quad C = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{1}{8}.$$

Oczywiście te same wartości niewiadomych A, B, C otrzymamy, jeśli do równania $(*)$ podstawimy za s kolejno liczby 0, 2 i -2 (odnotujmy, że w tym przykładzie obie metody znajdowania współczynników rozkładu na ułamki proste wymagają mniej więcej tyle samo czasu, ale trzeba pamiętać, że nie zawsze tak jest). Zatem

$$Y(s) = \frac{-\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{1}{8}}{s-2} + \frac{\frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{1}{8}}{s+2}.$$

Korzystając z tabeli (tab. 1), odczytujemy rozwiązanie równania (11):

$$y(t) = \left(-\frac{1}{4} + \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{1}{8}\right) e^{2t} + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{1}{8}\right) e^{-2t}\right) \cdot \mathbb{1}(t).$$

Zauważmy, że a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, więc liczby $C_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{1}{8}$ i $C_2 = \frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{1}{8}$ są także dowolnymi stałymi rzeczywistymi. Możemy zapisać rozwiązanie równania (11) w ładniejszej postaci:

$$y(t) = \left(-\frac{1}{4} + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}\right) \cdot \mathbb{1}(t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Na koniec sprawdzimy jeszcze, że każda funkcja określona wzorem

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

spełnia równanie (11). Mamy:

$$y' = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}, \qquad y'' = 4C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-2t}$$

oraz

$$L = y'' - 4y = 4C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-2t} - 4\left(C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}\right) = 1 = P,$$

co oznacza, że całka ogólna równania różniczkowego (11) ma postać

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}, \qquad \text{gdzie } C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Przykład 8. Na koniec rozwiążemy zagadnienie Cauchy'ego[4]

$$y'' - y = 2t - 2, \qquad y(1) = e, \quad y'(1) = e - 2. \tag{12}$$

W tym zadaniu mamy podane warunki początkowe w punkcie 1, a do przekształcenia Laplace'a potrzebne są warunki początkowe w punkcie 0. Moglibyśmy postąpić podobnie jak w przykładzie 6: przyjąć, że $y(0) = a$, $y'(0) = b$, znaleźć całkę ogólną równania, a następnie wyznaczyć a i b tak, aby $y(1) = e$, $y'(1) = e - 2$. Tu jednak pokażemy krótszy sposób, tzn. przesuniemy oś czasu. Zapiszmy nasze równanie wraz z argumentem t nieznanej funkcji $y = y(t)$:

$$y''(t) - y(t) = 2t - 2.$$

Wprowadźmy nową zmienną $\tau = t - 1$, czyli $t = \tau + 1$. Równanie różniczkowe ma teraz postać

$$y''(\tau + 1) - y(\tau + 1) = 2(\tau + 1) - 2,$$

$$y''(\tau + 1) - y(\tau + 1) = 2\tau.$$

[4] Problem polegający na znalezieniu funkcji spełniającej równanie różniczkowe rzędu n i warunki początkowe $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}$ nazywamy *zagadnieniem Cauchy'ego*.

Niech teraz $u(\tau) = y(\tau+1)$. Wówczas $u'(\tau) = y'(\tau+1)$, $u''(\tau) = y''(\tau+1)$, $u(0) = e$, $u'(0) = e-2$, więc rozwiązujemy równanie

$$u''(\tau) - u(\tau) = 2\tau, \qquad u(0) = e, \quad u'(0) = e-2.$$

Oznaczamy $\mathcal{L}[u(\tau)] = U(s)$ i mamy:

$$\begin{aligned}
s^2U(s) - su(0) - u'(0) - U(s) &= \frac{2}{s^2},\\
s^2U(s) - es - e + 2 - U(s) &= \frac{2}{s^2},\\
s^2U(s) - U(s) &= \frac{2}{s^2} + es + e - 2,\\
(s^2-1)U(s) &= \frac{es^3 + (e-2)s^2 + 2}{s^2},\\
U(s) &= \frac{es^3 + (e-2)s^2 + 2}{s^2(s^2-1)}.
\end{aligned}$$

Rozkładamy ułamek po prawej stronie na ułamki proste:

$$\frac{es^3 + (e-2)s^2 + 2}{s^2(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} \quad \Big| \cdot s^2(s-1)(s+1)$$

$$es^3 + (e-2)s^2 + 2 = As(s^2-1) + B(s^2-1) + Cs^2(s+1) + Ds^2(s-1).$$

Teraz musimy znaleźć współczynniki A, B, C i D. Można to zrobić dowolną metodą. My podstawimy za s cztery różne liczby, ponieważ stopień mianownika jest równy 4 (trzy z tych liczb, tzn. 0, 1 oraz -1 dadzą od razu trzy współczynniki, czwartą liczbę wybieramy dowolnie). Mamy:

$$\begin{array}{llll}
s=0 & \Rightarrow & 2 = -B & \Rightarrow \; B = -2,\\
s=1 & \Rightarrow & e + e - 2 + 2 = 2C & \Rightarrow \; C = e,\\
s=-1 & \Rightarrow & -e + e - 2 + 2 = -2D & \Rightarrow \; D = 0,\\
s=2 & \Rightarrow & 8e + 4e - 8 + 2 = 6A + 3B + 12C + 4D & \Rightarrow \; A = 0.
\end{array}$$

Zatem

$$U(s) = -\frac{2}{s^2} + \frac{e}{s-1}.$$

Ze słownika odczytujemy, że

$$u(\tau) = (-2\tau + e\cdot e^{\tau})\mathbb{1}(\tau).$$

Teraz wracamy do wyjściowej funkcji (najpierw podstawiamy $u(\tau) = y(\tau+1)$, potem $\tau = t-1$):

$$y(\tau+1) = (-2\tau + e\cdot e^{\tau})\mathbb{1}(\tau),$$

$$y(t) = (-2(t-1) + e\cdot e^{t-1})\mathbb{1}(t-1).$$

Zapisujemy otrzymaną wyżej funkcję w prostszej postaci i stwierdzamy, że rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (12) jest oryginał

$$y(t) = (2 - 2t + e^{t})\mathbb{1}(t-1).$$

3. Uwagi

1. Rozwiązywanie pewnych równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach metodą operatorową (czyli z zastosowaniem transformacji Laplace'a) sprowadza się do rozwiązania łatwego równania algebraicznego. Zauważmy, że rozwiązując równania różniczkowe tą metodą, nie musimy umieć ani całkować, ani różniczkować.

2. Aby rozwiązać równanie różniczkowe za pomocą przekształcenia Laplace'a, musimy znać warunki początkowe w zerze. W przykładach 7 i 8 pokazano, jak można poradzić sobie, gdy warunki początkowe są podane w punkcie różnym od zera lub gdy w ogóle ich nie ma.

3. Można również stosować przekształcenie Laplace'a do innych typów równań różniczkowych niż równania liniowe o stałych współczynnikach (z reguły będzie to jednak bardziej pracochłonne niż w przykładach omówionych w tej pracy). Muszą to jednak być takie równania, które możemy „przetłumaczyć" za pomocą gramatyki i słownika na język transformat. Na przykład nie możemy zastosować metody operatorowej w celu rozwiązania równania $y' - 2y = e^{t^2}$, ponieważ funkcja po prawej stronie nie jest oryginałem (nawet po przemnożeniu jej przez jedynkę Heaviside'a) i nie znamy jej transformaty (nie wiemy nawet, czy ta transformata istnieje).

4. Rozwiązując równanie różniczkowe metodą operatorową, otrzymujemy zawsze całkę szczególną równania, która jest oryginałem. Oznacza to m.in., że całka ta przyjmuje wartość zero dla wszystkich $t < 0$. Fakt ten można łatwo zinterpretować. Równanie różniczkowe opisuje przebieg jakiegoś procesu, który zaczynamy obserwować w chwili $t_0 = 0$ (znamy warunki początkowe) i interesuje nas tylko to, co będzie w przyszłości, więc przeszłość można „wyzerować". Gdybyśmy chcieli poznać przeszłość jakiegoś procesu, moglibyśmy zmienić zmienną oznaczającą czas (np. $\tau = -t$) i wprowadzić nową funkcję.

5. Niektóre równania (np. te omówione w przykładach 7 i 8) można rozwiązać szybciej innymi metodami (ale trzeba znać te metody).

Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego rozwiązywania równań różniczkowych za pomocą przekształcenia Laplace'a. Zadania można znaleźć np. w [1] i [3]. Można też samodzielnie wymyślić równanie z warunkami początkowymi i na stronie https://www.wolframalpha.com/ sprawdzić odpowiedź.

Literatura

1. W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, część II, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997, s. 378–385.
2. E. Łobos, B. Sikora, *Advanced calculus — selected topics*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2009, pp. 67–84.
3. E. Łobos, B. Sikora, *Calculus and differential equations in exercises*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012, pp. 74–77.
4. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego: teoria i zastosowania w elektrotechnice*, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1981.
5. B. Piłat, M.J. Wasilewski, *Tablice całek*, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1985, s. 98–102.