

W ramach realizowanego przez miesięcznik „Builder” programu „Wspieramy młodych inżynierów budownictwa” dajemy możliwość pierwszych publikacji naukowych młodym doktorantom.



**inż. Kamil Niemirski**  
Wydział Inżynierii Ładowej  
Politechnika Warszawska

**Opiekun naukowy:**  
**dr inż. Maciej Cwyl**  
Instytut Inżynierii Budowlanej  
Politechnika Warszawska

Belki ażurowe wykonuje się przez odpowiednie przecięcie środka profilu oraz nasunięcie na siebie obu połówek (rys. 1.). Zależnie od geometrii tych belek można zaoszczędzić od 20% do 50% zużycia stali. Najczęściej używane belki ażurowe przedstawiono na rys. 2.

Wpływ dużych otworów w belkach został zbadany w pracy [2], a wypracowana metoda obliczania belek z otworami była zaproponowana w [3]. Na podstawie tej pracy opracowano dodatek do prenormy ENV 1993-1-1/A2:1998 Załącznik N [4], jednak nie został on ostatecznie wprowadzony do aktualnych eurokodów.

### Wpływ otworów

Konsekwencją otworów jest znaczna redukcja nośności na ścinanie. Nośności, ze względu na wyboczenie i zwichrzenie, wyznacza się przy zastosowaniu charakterystyk geometrycznych przekroju zredukowanego o otwór.

Dodatkowo obserwuje się modele zniszczenia o charakterze lokalnym, takie jak mechanizm Vierendeela lub wyboczenie słupka. Wskutek dystrybucji sił ścinających wokół otworu tworzone są dodatkowe momenty zginające Vierendeela. Efektem jest możliwość wytworzenia się czterech przegubów plastycznych (rys. 3.), tworząc ww. mechanizm.

### Analiza belki z otworami okrągłymi

Dla belek otworowanych pasy ściskane rozpatruje się według zasad w PN-EN 1993-1-1 [5]. W przekroju teowym klasyfikacja środka jest ograniczona przez długości efektywne otworów i jego wysokość. Zgod-

# BELKI Z OKRĄGŁYMI OTWORAMI

## część 1

We współczesnym projektowaniu stawia się na ekonomiczne rozwiązania umożliwiające dobre wykorzystanie przestrzeni użytkowej. Instalacje, jako integralna część praktycznie każdej konstrukcji, zmniejszają wysokość tej przestrzeni. Zastosowanie belek otworowanych pozwala na uzyskanie przestrzeni dla ciągów instalacyjnych.

nie z oznaczeniami na rys. 4. długości efektywne dla otworów:

$$l_{o,eff} = 0,7h_o \quad (1b)$$

Dla poszczególnych przedziałów  $l_{o,eff}$  rozpatruje się dodatkowe ograniczenia dla wysokości środka teowego  $b_{we}$  (tab. 1.). W przypadku klasy trzeciej i czwartej środka można stosować klasę o jeden wyższą, przyjmując graniczną wartości  $b_{we}$  wysokości dla tej klasy.

### Nośność belki

Nośność przy zginaniu w przekrojach otworowanych oblicza się zgodnie ze wzorami (2) i (3), uwzględniając jedynie przekrój netto. Przy takim założeniu nośność przy zginaniu wynosi:

$$M_{o,Rd} = f_y W_{o,pl} = f_y \left( W_{pl} - \frac{t_w h_o^2}{4} \right) \quad (1)$$

gdzie:

$f_y$  – granica plastyczności stali

$W_{pl}$  – wskaźnik plastyczny przekroju

$t_w$  – grubość środka belki

$h_o$  – wysokość otworu

W przypadku nośności na ścinanie należy zmodyfikować obszar ścinania czynnego  $A_v$ :

$$V_{o,Rd} = \frac{f_y A_{vo}}{\sqrt{3}} = \frac{f_y (A_v - t_w h_o)}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

### Mechanizm Vierendeela

Występowanie otworu w środku wiąże się z zakłóceniem sił wewnętrznych w jego obrębie i wytworzeniem dodatkowych sił wewnętrznych (rys. 5.). Siła osiowa w przekrojach teowych jest ograniczona przez interakcję z momentem zginającym [7].

Efektom działania sił globalnych  $M_{Ed}$  i  $V_{Ed}$  jest siła  $N_{\phi,Ed}$  oraz  $V_{\phi,Ed}$ . Dodatkowy moment zginający  $M_{\phi,Ed}$  jest konsekwencją dystrybucji globalnej siły ścinającej wzdłuż otworu. Odległości  $z_t$  i  $z_\phi$  są odległościami od środków ciężkości danych przekrojów. Nośność uwzględniająca te siły wynosi:

$$\frac{N_{\phi,Ed}}{N_{\phi,Rd}} + \frac{M_{\phi,Ed}}{M_{\phi,Rd}} \leq 1,0 \quad (3)$$

gdzie:

$N_{\phi,Rd}$  – nośność na siłę podłużną przekroju dla kąta  $\phi$

$M_{\phi,Rd}$  – nośność przy zginaniu przekroju dla kąta  $\phi$

Globalny moment zginający  $M_{o,Rd}$  rozdziela się na parę sił występujących w dolnym i górnym przekroju teowym w miejscu ich środków ciężkości (gdzie  $h_{o,eff}$  jest odległością między nimi) i wynosi:

$$N_{o,Ed} = \frac{M_{o,Ed}}{h_{o,eff}} \quad (4)$$

Kąt zależy od położenia wytworzonego lokalnego przegubu plastycznego. Po rozpięciu równań równowagi otrzymuje się następujące wartości sił:

$$N_{\phi,Ed} = N_{o,Ed} \cos \phi - 0,5V_{Ed} \sin \phi \quad (5a)$$

$$V_{\phi,Ed} = N_{o,Ed} \sin \phi + 0,5V_{Ed} \cos \phi \quad (5b)$$

$$M_{\phi,Ed} = N_{o,Ed} (z_\phi \cos \phi - z_t) + 0,5V_{Ed} \left( \frac{H}{2} - z_\phi \cos \phi \right) \tan \phi \quad (5c)$$

Nieznany kąt jest ściśle powiązany z interakcją sił M-V, gdzie kąt  $\phi=0^\circ$  odpowiada czystemu zginaniu, a kąt  $\phi=28^\circ$  czystemu ścinaniu. Generalnie można przyjmować kąt  $25^\circ$ , co przeanalizowano w pracy [1].

Dla dużych sił ścinających (tj.  $V_{Ed}/V_{o,Rd} > 0,5$ ) należy stosować redukcję grubości środnika zgodnie z PN-EN 1993-1-1[5]:

$$t_{w,eff} = t_w(1 - \rho) \quad (6)$$

$$\rho = \left(2 \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} - 1\right)^2 \quad (7)$$

Dla takiej grubości wyznacza się  $N_{\phi,V,Rd}$  oraz  $M_{\phi,V,Rd}$ .

### Model ekwiwalentny

Prenorma ENV 1993-1-1 Aneks N [4] opisała zniszczenie Vierendeela dla belek z otworami prostokątnymi i wielobocznymi. Dla otworów okrągłych można stosować ten model pod warunkiem użycia zredukowanych wymiarów otworu (rys. 6.) odpowiadającego ekwiwalentnemu prostokątowi. Suma nośności zginania Vierendeela w czterech punktach otworu musi być nie mniejsza niż różnica momentów po obu stronach otworu. Warunek ten ma postać:

$$M_{v,Rd} \geq M_{v,Ed} = V_{Ed} \cdot l_{eff} \quad (8)$$

$$M_{v,Rd} = 2M_{b,T,Rd} + 2M_{t,T,Rd} \quad (9)$$

Gdzie:

$V_{Ed}$  – siła ścinająca występująca przy otworze

$M_{t,T,Rd}$  – nośność na zginanie górnego przekroju teowego

$M_{b,T,Rd}$  – nośność na zginanie dolnego przekroju teowego

Długość efektywna  $l_{eff}$  dla otworów okrągłych wynosi:

$$l_{eff} = 0,45h_o \quad (10)$$

Zakładając belkę bisymetryczną, wzór (8) można uprościć do postaci:

$$4M_{v,T,Rd} \geq V_{Ed} \cdot l_{eff} \quad (11)$$

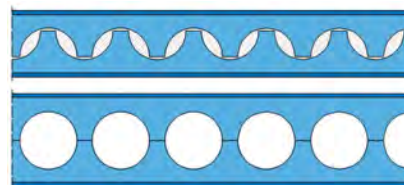
W przypadku klas niższych niż druga należy wyznaczać nośności sprężyste. Dla dużych sił ścinających (tj.  $V_{Ed}/V_{o,Rd} > 0,5$ ) należy wyznaczyć  $t_{w,eff}$ . Dodatkową redukcję przeprowadza się także przy występowaniu sił podłużnych tak, że:

$$M_{pl,N,Rd} = M_{pl,Rd} \left(1 - \left(\frac{N_{o,Ed}}{N_{pl,Rd}}\right)^2\right) \quad (12)$$

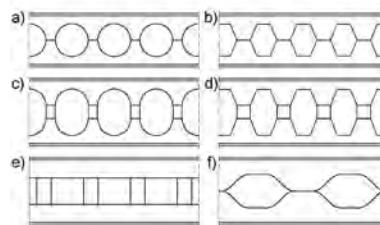
gdzie:

$M_{pl,N,Rd}$  – nośność plastyczna przekroju teowego na zginanie przy redukcji na skutek sił podłużnych

$N_{pl,Rd}$  – nośność przekroju teowego na siłę podłużną

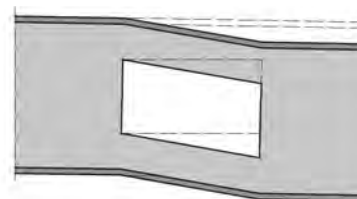


Rys. 1. Wykonanie belek ażurowych  
Fig. 1. Making of cellular beams



Rys. 2. Typy belek ażurowych: a) okrągłe, b) wieloboczne, c) okrągłe z przewiązkami, d) wieloboczne z przewiązkami, e) prostokątne, f) Angelina

Fig. 2. Types of cellular beam: a) circular, b) multilateral, c) circular with intermediate plate, d) multilateral with intermediate plate, e) rectangular, f) Angelina



Rys. 3. Mechanizm Vierendeela  
Fig. 3. Vierendeels mechanism

REKLAMA

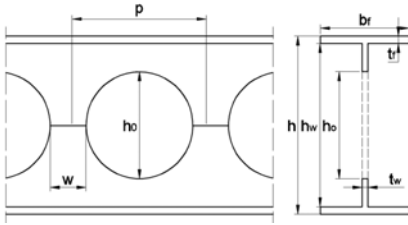
# EJOT® Iso -Corner



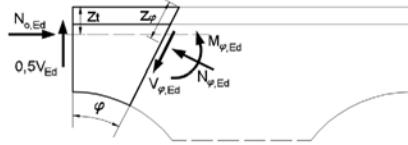
**MONTAŻ**  
bez mostków  
termicznych

## BEZPIECZNY I CIEPŁY MONTAŻ ELEMENTÓW NA DOCIEPLONEJ FASADZIE

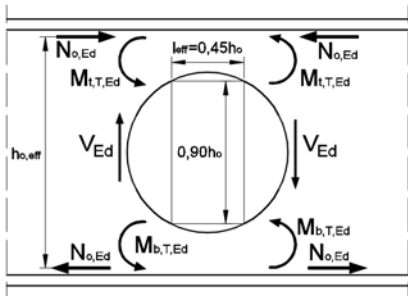
- ▶ zastosowanie do montażu: balustrad, francuskich balkonów, okiennic itp.
- ▶ bezpieczne rozwiązanie dzięki najwyższym nośnościom przy zachowaniu estetyki elewacji
- ▶ prosty i szybki montaż
- ▶ całkowite zabezpieczenie przed wnikaniem wody w strukturę ocieplenia
- ▶ jeden element DWIE POWIERZCHNIE montażowe!



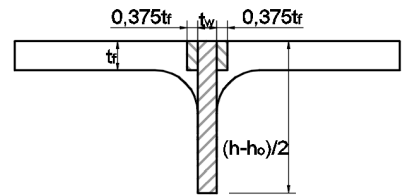
Rys. 4. Wymiary belki z okrągłymi otworami  
Fig. 4. Dimensions of beam with circular opening



Rys. 5. Siły w wycinku belki w obrębie otworu  
Fig. 5. Forces in a segment of a beam near openings



Rys. 6. Siły występujące dla mechanizmu zniszczenia Vierendeela  
Fig. 6. Forces for Vierendeel mechanism to appear



Rys. 7. Pole czynnego ścinania wg metody Chunga [1]  
Fig. 7. Shear area of according to Chung method [1]

Tab. 1. Ograniczenia wysokości środnika przekroju teowego ze względu na klasę  
Tab. 1. Limitation of Tee section web height due to class

Klasa	Długość efektywna otworu		
	$l_{o,eff} \leq 32\epsilon t_w$	$32\epsilon t_w < l_{o,eff} \leq 36\epsilon t_w$	$l_{o,eff} > 36\epsilon t_w$
2	brak ograniczeń	$b_{wc} \leq \frac{10t_w\epsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{32t_w\epsilon}{l_{o,eff}}\right)^2}}$	
3	brak ograniczeń		$b_{wc} \leq \frac{14t_w\epsilon}{\sqrt{1 - \left(\frac{36t_w\epsilon}{l_{o,eff}}\right)^2}}$
4	brak ograniczeń		

Tab. 2. Współczynniki  $\bar{v}$   
Tab. 2. Coefficient  $\bar{v}$

Otwór	$\bar{v}$	$h_o/d = 0,50$	$h_o/d = 0,67$	$h_o/d = 0,75$
Okrąg	$\bar{v}$	0,95	0,87	0,80

Zakładając redukcję nośności od sił ścinających i podłużnych, wzór (8) przyjmuje postać:

$$M_{v,T,Rd} = M_{v,NV,T,Rd} \quad (13)$$

### Metoda Chunga

Autorzy prac [1] i [6] przeanalizowali występowanie mechanizmu Vierendeela dla różnych otworowań. Metoda wiąże ze sobą siły ścinające, momenty zginające i lokalne momenty zginające Vierendeela. W ten sposób opracowano krzywą interakcji M-V, która dodatkowo jest zredukowana efektami zginania Vierendeela. Na podstawie analizy MES zaproponowano zmodyfikowany empiryczny wzór na ścinanie czynne  $A_v$ . (rws. 7.):

$$A_v = \frac{h_w - h_o}{2} t_w + 0,75 t_f^2 \quad (14)$$

Krzywa interakcji M-V jest modyfikowana przez parametr  $\bar{v}$ , który jest stosunkiem zredukowanej przez efekty Vierendeela nośności teownika na ścinanie do nośności niezredukowanej. Na podstawie badań przy użyciu MES opracowano empiryczne wartości współczynnika  $\bar{v}$  w zależności od kształtu i wielkości otworu. Dla otworów okrągłych stosuje się współczynniki przedstawione w tab. 2.

Uwzględniając parametr  $\bar{v}$ , zaproponowano zmodyfikowaną formę krzywej interakcji M-V:

$$\text{Dla } \bar{v} < \frac{2}{3} \quad \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2 + \bar{m}^2 = 1 \quad (15a)$$

$$\text{Dla } \bar{v} \geq \frac{2}{3} \quad \left(\frac{v - (\bar{v} - 2/3)}{2/3}\right)^2 \quad (16b)$$

gdzie:

$v = \frac{V_{o,Ed}}{V_{o,Rd}}$  – nośność perforowanego przekroju na ścinanie

$\bar{m} = \frac{M_{o,Rd,v}}{M_{o,Rd}}$  – stosunek nośności ze względu na mechanizm Vierendeela do nośności przy zginaniu

Przekształcając wzory (16a) i (16b), otrzymuje się nośność przy zginaniu z uwzględnieniem mechanizmu Vierendeela  $M_{o,Rd,v}$ :

$$\text{Dla } \bar{v} < \frac{2}{3} \quad M_{o,Rd,v} = M_{o,Rd} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^2} \quad (16a)$$

$$\text{Dla } \bar{v} \geq \frac{2}{3} \quad M_{o,Rd,v} = M_{o,Rd} \sqrt{1 - \left(\frac{v - (\bar{v} - 2/3)}{2/3}\right)^2} \quad (17b)$$

Warunek na nośność w przekroju otworowanym:

$$\frac{M_{o,Ed}}{M_{o,Rd,v}} \leq 1,0 \quad (17)$$

### Bibliografia

- [1] Chung K.F., Liu T. C. H., Ko A. C. H., Investigation on Vierendeel mechanism in steel beams with circular web openings, Journal of Constructional Steel Research, vol. 57, pp. 467-490, 2001.
- [2] Chan P.W. Redwood R.G., Stresses in beams with circular eccentric web holes. J Struct Div, Proc ASCE 1974;100(ST1):231-248.
- [3] J. K. Ward, Design of composite and non-composite cellular beams, The Steel Construction Institute Publication 100, 1990.
- [4] Eurocode 3, Design of steel structures: Part 1-1: General rules and rules for buildings, 1992, and Amendment A2 of Eurocode 3: Annex N 'Openings in webs', London, UK: British Standards Institution, ENV 1993-1-3, 1998.
- [5] PN-EN 1993-1-1 Eurokod 3. Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [6] Chung K.F., Liu C.H., Ko A.C.H., Steel beams with large web openings of various shapes and sizes: an empirical design method using a generalised moment-shear interaction curve. J Constr Res 2003;59:1177-200.
- [7] J. Bródka: Obliczanie belek ażurowych, „Konstrukcje Stalowe”, 2000, zeszyt 4 (48-49)
- [8] Lawson R.M., LIM, J. Hicks S.J., Simms W.I., Design of composite asymmetric cellular beams and beams with large web openings, „Journal of Constructional Steel Research”, Vol. 62, No.6, June 2006, pp. 614-629.

### ABSTRAKT: ANALIZA I MODELOWANIE STALOWYCH BELEK Z OKRĄGLYMI OTWORAMI

Celem artykułu jest porównanie różnych sposobów analizy nośności belki stalowej z otworami okrągłymi w aspekcie projektowania konstrukcji. Zwrócono uwagę na model zniszczenia związany z mechanizmem Vierendeela oraz utratą stateczności słupka międzyotworowego. W pierwszym modelu porównano trzy metody analizy, a drugim dwie. Otrzymane wyniki metod porównano z wynikami MES dla dwóch zestawów belek – belek ażurowych i z pojedynczymi otworami.

**Słowa kluczowe:** Belki otworowane, belki ażurowe, belki stalowe, Vierendeel

### ABSTRACT: MODELING AND ANALYSIS STEEL BEAM WITH CIRCULAR OPENINGS

The purpose of this article is comparison of various ways of analyzing capacity of a steel beam with circular openings in terms of designing construction. Attention was paid to a failure mode related to Vierendeel mechanism and web-post buckling. First model was compared to three methods of analysis and the second one to two. Given method results were compared with results of FEM for two groups of beams – cellular beams and beams with single openings.

**Key words:** beam with openings, cellular beam, steel beam, Vierendeel, opening