

**Piotr PRZYBYŁOWICZ, Wojciech FUDAŁA**

Politechnika Warszawska, IPBM, 02-524 Warszawa, ul. Narbutta 84,  
E-mail: piotr.przybylowicz@ipbm.simr.pw.edu.pl, wfudala@simr.pw.edu.pl

## **Wpływ tłumienia wewnętrznego elementów kompozytowych na charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe modelu zawieszenia samochodu**

### 1 Wstęp

Zawieszenie typowego samochodu osobowego składa się z wahaczy metalowych, sprężyny i amortyzatora, a także elementów łączących poszczególne części. W pracy tej zaprezentowany model zawieszenia wykorzystuje wahacze wykonane z materiałów kompozytowych, które pełnią rolę elementu prowadzącego koło, a także elementu sprężysto-tłumiącego. Podejście to umożliwia wyeliminowanie części elementów składających się na typowe zawieszenie. Redukcja liczby elementów pozwoli na obniżenie masy całego układu oraz jego uproszczenie.

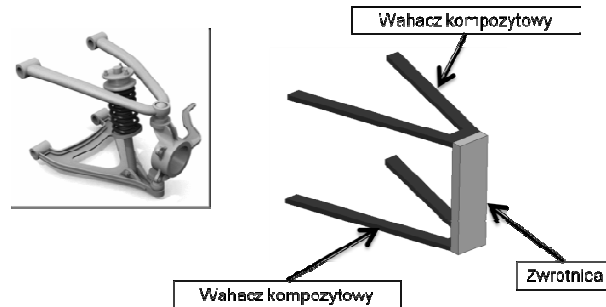
Można spotkać samochody produkcyjne, które wykorzystują resory kompozytowe w układach zawieszenia. Jednak pełnią one tylko rolę elementu sprężystego. W takich rozwiązaniach masa resoru kompozytowego stanowi nawet tylko 1/3 masy odpowiadających sprężyn stalowych. Zmniejszenie masy układu zawieszenia, wpłynie także na mniejszą masę nieresorowaną, a w konsekwencji, na lepsze prowadzenie koła.

Kolejną ważną zaletą jest zunifikowanie materiałów do produkcji tego typu zawiesznień. Przez zmianę przekroju poprzecznego oraz kąta ułożenia włókien, przy tych samych materiałach będzie możliwość otrzymania zróżnicowanych sztywności dostosowanych do różnych typów samochodów.

W pracy tej skupiono się przede wszystkim na zbadaniu wpływu tłumienia wewnętrznego na charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe modelu samochodu o 4 stopniach swobody. Współczynnik tłumienia wewnętrznego, podobnie jak sztywność, będzie zależał od kąta, pod którym układane są włókna w kompozycie.

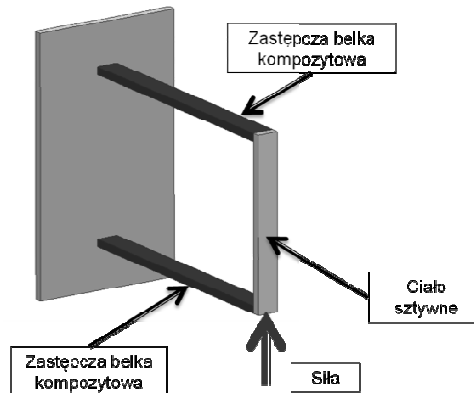
### 2 Model zawieszenia

Proponowane rozwiązanie układu zawieszenia (Rys. 1) zawiera dwa wahacze trójkątne wykonane z kompozytu szklano-epoksydowego. Od strony wewnętrznej wahacze są przymocowane nieruchomo do nadwozia samochodu, a z drugiej strony do zwrotnicy.



Rys. 1. Proponowany model zawieszenia z elementami kompozytowymi  
 Fig. 1. Proposed suspension model with composite elements

W celu przeprowadzenia wstępnych obliczeń w pracy wykorzystano uproszczony model (Rys. 2). Składa się on z dwóch równoległych belek kompozytowych odpowiadających pod względem charakterystyki wahaczom trójkątnym [2]. Jako że zwrotnica ma dużo większą sztywność niż elementy kompozytowe może być traktowana jako ciało idealnie sztywne.



Rys. 2. Model zawieszenia wykorzystany w pracy  
 Fig. 2. Suspension model used in the paper

### 3 Dobór parametrów elementów kompozytowych

Belka wykorzystana w obliczeniach jest laminowana antysymetrycznie. Oznacza to, że każdej warstwie powyżej płaszczyzny środkowej laminowanej pod kątem  $\theta^\circ$  odpowiada warstwa o tej samej grubości leżąca poniżej płaszczyzny środkowej i laminowana pod kątem  $-\theta^\circ$ . W takim laminacie nie występuje sprzężenie między ugięciem a skręceniem belki, co zapewnia ruch zwrotnicy tylko w kierunku pionowym.

Ugięcie belki liczymy z równania konstytutywnego laminatów [1] gdzie oś  $X$  jest wzdłuż belki a oś  $Y$  w poprzek:

*Wpływ tłumienia wewnętrznych elementów kompozytowych  
na charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe  
modelu zawieszenia samochodu*

---

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \bar{Q} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Równanie to w przypadku belki, w której występuje tylko zginanie można przekształcić na postać:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie  $A_{ij}$  to elementy macierzy sztywności w płaszczyźnie,  $B_{ij}$  – macierzy sztywności sprzęgającej i  $D_{ij}$  – macierzy sztywności giętno-skrętnej.

Następnie otrzymujemy

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\kappa_x = -D_{11}^* M_x \quad (3)$$

gdzie element  $D_{11}^*$  w belkach laminowanych pod dowolnym kątem jest równy

$$D_{11}^* = \frac{D_{11} - \frac{B_{16}^2}{A_{66}}}{(D_{11} - D_{12})(D_{11} + D_{12} - 2\frac{B_{16}^2}{A_{66}})} \quad (4)$$

Aby obliczyć drgania gięte belki kompozytowej z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego można zastosować typowe równanie ruchu belki drgającej:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E_0 J \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + c \frac{\partial w}{\partial t} = q(x, t) \quad (5)$$

gdzie  $E_0$  jest to zastępczy moduł Younga belki laminowanej,  $\rho$  oznacza średnią gęstość laminatu,  $A$  to pole przekroju poprzecznego,  $J$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego,  $c$  jest współczynnikiem oporów wiskotycznych w ośrodku,  $q$  – zewnętrznym obciążeniem poprzecznym. Jako, że belka ta drga w powietrzu, współczynnik  $c$  można przyjąć równy 0.

W równaniu (5) nie ma w sposób jawny uwzględnionego tarcia wewnętrznego w materiale kompozytowym. Właściwości tłumiące laminatu zależą od właściwości sprężystych i tłumiących poszczególnych warstw ortotropowych oraz ich ułożenia w kompozycie. Właściwości te można opisać za pomocą liniowego modelu reologicznego, w którym zamiast liczbowego modułu Younga  $E_0$  występuje moduł operatorowy  $E^*(s)$  będący pewną funkcją w dziedzinie transformaty Laplace'a. Równanie ruchu (5) można przekształcić w równanie różniczkowo-całkowe uwzględniające tłumienie wewnętrzne i spełniające zerowe warunki początkowe:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + J \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} dt + c \frac{\partial w}{\partial t} = q(x, t) \quad (6)$$

gdzie  $R(t)$  jest odwrotną transformatą Laplace'a operatorowego modułu Younga  $R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{E^*(s)\}$ .

Funkcje  $E^*(s)$  w najprostszy sposób można opisać za pomocą modelu Kelvina-Voigta. Każdy z trzech modułów sprężystości wykazuje odpowiedni współczynnik tłumienia. Otrzymujemy zatem moduły operatorowe:

$$\begin{cases} E_1^*(s) = E_1(1 + \beta_{11}s) \\ E_2^*(s) = E_2(1 + \beta_{22}s) \\ G_{12}^*(s) = G_{12}(1 + \beta_{12}s) \end{cases} \quad (7)$$

gdzie  $\beta_{ij}$  są wielkościami w wymiarze czasu i noszą nazwę czasów opóźnienia. Na podstawie badań [5] liczbę Poissona  $\nu_{12}$  można traktować jako liczbę stałą.

Na podstawie powyższych rozważań elementy macierzy sztywności  $Q_{ij}$  stają się następującymi operatorami:

$$\begin{aligned} Q_{11}^*(s) &= \frac{E_1(1 + \beta_{11}s)}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2(1 + \beta_{22}s)}{E_1(1 + \beta_{11}s)}} \\ Q_{12}^*(s) &= \frac{E_2(1 + \beta_{11}s)\nu_{12}}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2(1 + \beta_{22}s)}{E_1(1 + \beta_{11}s)}} \\ Q_{11}^*(s) &= \frac{E_2(1 + \beta_{11}s)}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2(1 + \beta_{22}s)}{E_1(1 + \beta_{11}s)}} \\ Q_{66}^*(s) &= G_{12}(1 + \beta_{12}s) \end{aligned} \quad (8)$$

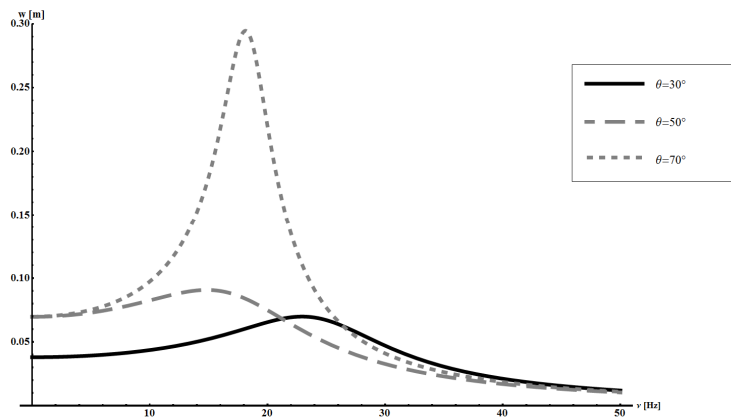
Wszystkie powyższe obliczenia umożliwiają wyznaczenie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych (Rys. 3) i charakterystyk czasowych (Rys. 4) zastępczej belki kompozytowej [4]. W obliczeniach uwzględniono trzy kąty laminowania, to jest  $70^\circ$ ,  $50^\circ$  i  $30^\circ$ .

Na podstawie charakterystyki czasowej (Rys. 4) został wyznaczony logarytmiczny dekrement tłumienia, a następnie współczynniki tłumienia wewnętrznego w zależności od kąta laminowania:

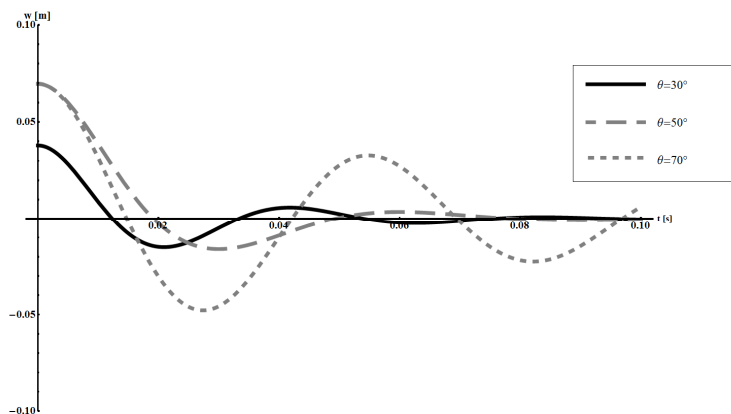
$$\begin{aligned} C_{30} &= 168,6 \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right] \\ C_{50} &= 186,1 \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right] \\ C_{70} &= 52,3 \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Wpływ tłumienia wewnętrznych elementów kompozytowych  
na charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe  
modelu zawieszenia samochodu

---



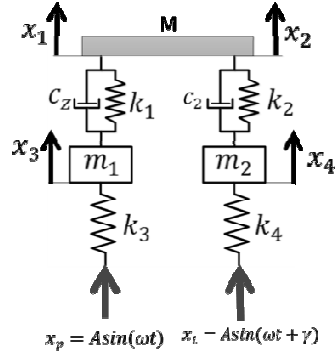
Rys. 3. Charakterystyka rezonansowa zastępczej belki kompozytowej  
Fig. 3. Resonance characteristic of the equivalent composite beam



Rys. 4. Charakterystyka czasowa zastępczej belki kompozytowej  
Fig. 4. Time characteristic of the equivalent composite beam

#### 4 Model dynamiczny układu

Po wyznaczeniu sztywności zastępczej, współczynnika tłumienia wewnętrznego i zastępczego modułu Younga belki laminowanej, model samochodu o 4 stopniach swobody (Rys. 5) został wykorzystany do wyznaczenia charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych całego układu.



Rys. 5. Model samochodu o 4 stopniach swobody

Fig. 5. 4-DOF model of a car

Równania ruchu całego układu zostały wyznaczone na podstawie równań Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (10)$$

Postać macierzowa powyższych równań jest następująca:

$$\mathbf{B}\ddot{\bar{x}} + \mathbf{C}\dot{\bar{x}} + \mathbf{K}\bar{x} = \mathbf{S}(t) \quad (11)$$

Podstawiając

$$\bar{x} = \bar{U}e^{i\alpha t} \quad (12)$$

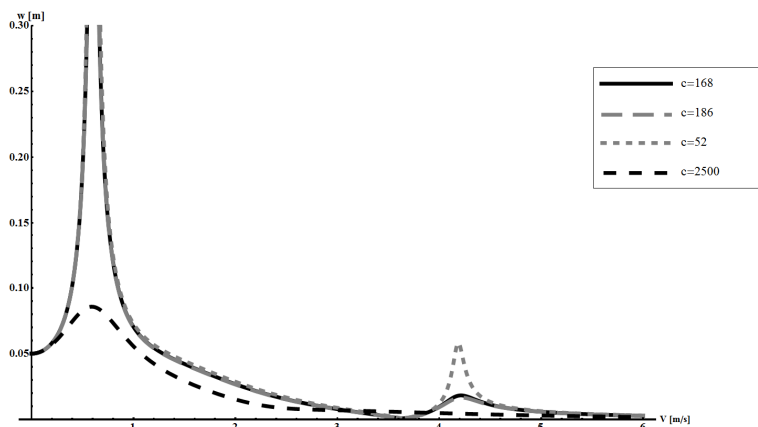
równanie (11) można zapisać w postaci

$$\bar{U}(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B} + i\omega \mathbf{C}) = \mathbf{S}_0 \quad (13)$$

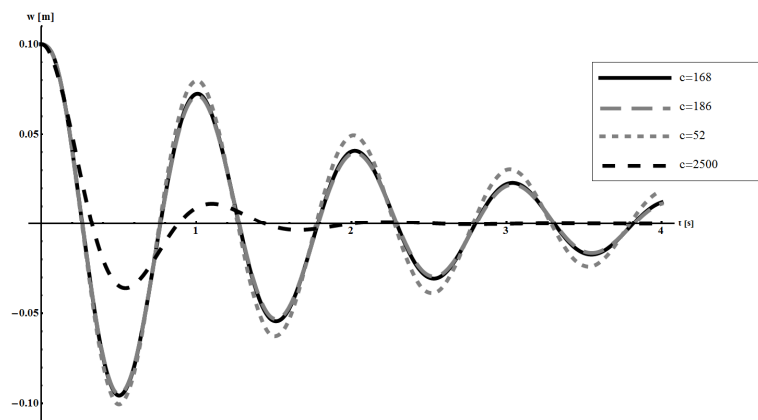
Równanie to jest już łatwo rozwiązać wyznaczając równania ruchu poszczególnych elementów. W celu zbadania wpływu tarcia wewnętrznego w elemencie kompozytowym na charakterystyki amplitudowo częstotliwościowe, zostało wyznaczone równanie na amplitudę przodu samochodu, przy czym za współczynnik tłumienia  $c_z$  podstawiono wyniki uzyskane z analizy belki (9) oraz tłumik który zapewnia pożądaną charakterystykę zawieszenia [3].

*Wpływ tłumienia wewnętrznych elementów kompozytowych  
na charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe  
modelu zawieszenia samochodu*

---



*Rys. 6. Charakterystyka rezonansowa modelu samochodu*  
*Fig. 6. Amplitude-frequency characteristics of the car model*



*Rys. 7. Charakterystyka czasowa modelu samochodu*  
*Fig. 7. Time characteristic of the car model*

## 5 Wnioski

Jak widać na charakterystyce amplitudowo-częstotliwościowej (Rys. 6), przy tłumieniu wynikającym tylko z tarcia wewnętrznego w materiałach kompozytowych występują dwa rezonanse. Drugi rezonans jest spowodowany drganiami masy nieresorowanej.

Dodatkowo dla pierwszego rezonansu amplitudy drgań są na tyle duże, że elementy kompozytowe mogłyby ulec zniszczeniu.

Drgania, ze względu na komfort kierowcy, powinny być wytłumione w czasie półtora okresu. Na charakterystyce czasowej widać wyraźnie niewystarczające tłumienie bez zastosowania dodatkowego amortyzatora, po czasie 3 okresów amplitudy drgań są dość znaczne.

Z przeprowadzonych symulacji wynika, że tarcie wewnętrzne występujące w elementach kompozytowych nie zapewnia odpowiedniego tłumienia. Dlatego w układzie zawieszenia musi być zastosowany dodatkowy tłumik wiskotyczny.

### Literatura

1. W. Kurnik, A. Tylikowski, *Mechanika elementów laminowanych*, Warszawa 1997, Oficyna Wydawnicza PW
2. L. Püst, *Dynamic deformations and stresses of beams connected by damping element*, Engineering MECHANICS, Vol. 16, 2009
3. C. B. Patel, P. P. Gohil, B. Borhade, *Modelling and vibration analysis of a road profile measuring system*, International Journal of Automotive and Mechanical Engineering, Volume 1, pp. 13-28, January-June 2010
4. Przybyłowicz P., Fudała W.: *Amplitude-frequency analysis of a model of the car suspension system with composite elements*, XXIV Polsko-Niemiecka Konferencja Naukowa "Development Trends in Design of Machines and Vehicles", Politechnika Warszawa 2012
5. Schultz A. B., Tsai S. W.: *Measurements of complex dynamic moduli for laminated fiber-reinforced composites*, J. of Composite Materials, Volume 3, pp 434-443, 1969

### Streszczenie

W pracy zaprezentowano nowe rozwiązanie układu zawieszenia samochodów. Zastosowano w nim wahacze kompozytowe, które nie tylko mają zadanie prowadzenia koła ale także są elementem sprężystym. W kompozytach występuje stosunkowo duże tarcie wewnętrzne. Zależy ono między innymi od kąta laminowania włókien w poszczególnych warstwach kompozytu. W pracy wyznaczono współczynniki tłumienia dla trzech wybranych zastępczych belek o różnych kątach laminowania. Następnie otrzymane wyniki posłużyły do analizy modelu samochodu o 4 stopniach swobody. Przeanalizowano wpływ tłumienia wewnętrznego występującego w belce na charakterystyki czasowe modelu samochodu.

**Słowa kluczowe:** układ zawieszenia, elementy kompozytowe, charakterystyki czasowe, tłumienie wewnętrzne



## **Effect of internal damping of composite elements on amplitude-frequency characteristics of a car suspension model**

### Summary

The paper presents a new approach to the problem of vehicle suspension system. It makes use of composite wishbones which not only control the geometry but also act as spring elements. The composites have relatively high internal friction properties. They depend, among other, on the angle of fiber lamination in the layers. Damping coefficients were determined for three equivalent composite beams with different lamination angles. Then the results were used to analyse the car model with 4 degrees of freedom. The influence of internal damping of the beam on the car model characteristic was presented.

**Keywords:** suspension system, composite elements, time characteristics, internal damping