Mariusz Poński, Jarosław Paluszyński, Kamil Dubała

MODELE PRZEPŁYWU CIEPŁA W CIAŁACH STAŁYCH

Wstęp

Podstawowym prawem wykorzystywanym podczas analizowania wielu praktycznych problemów termomechaniki ciała stałego oraz fizyki budowli [1-3] jest prawo Fouriera [4], wiążące gęstość strumienia ciepła z gradientem temperatury. Zestawione razem z równaniem bilansu energii w postaci różniczkowej tworzy model fizyczny przewodzenia ciepła w ciałach stałych, w postaci równania cząstkowego, parabolicznego. W wielu przypadkach, ze względu na duże gradienty temperatury, relatywnie krótki czas trwania nagrzewania oraz ekstremalnie dużą gęstość strumienia ciepła prawo Fouriera zawodzi i należy je zmodyfikować.

Prędkość propagacji fal temperatury w wielu jednorodnych i niejednorodnych materiałach jest skończona, co jest sprzeczne z założeniem przyjętym przez Fouriera. Modyfikacja tego prawa polega na wprowadzeniu relaksacji wektora gęstości strumienia ciepła lub retardacji gradientu temperatury.

Wartości czasu relaksacji mieszczą się w przedziale od 10^{-8} s do 10^{-12} s dla materiałów jednorodnych oraz od 10^{-3} s do 10^{3} s dla materiałów niejednorodnych.

Wprowadzenie czasu relaksacji prowadzi do hiperbolicznego równania różniczkowego przewodzenia ciepła co zostało zaproponowane niezależnie przez Cattaneo [5] oraz Vernotte [6]. Przykład praktycznego zastosowania tego modelu można znaleźć w pracach [7-9].

Natomiast czas retardacji (opóźnienia) uzależniony jest od czasu relaksacji oraz współczynników przewodności. Opierając się na doświadczeniu wyniesionym z analizy propagacji fal w płynach D.D. Joseph oraz L. Preziosi zaproponowali model [10] w postaci równania różniczkowego cząstkowego typu Jeffreysa.

W pracy [11] zaprezentowano ujednoliconą teorię łączącą wszystkie trzy modele.

Prezentowany artykuł jest pracą przeglądową.

1. Model Fouriera

Rozpatrując makroskopowe kontinuum materiałowe, Fourier zaproponował fenomenologiczny model dany równaniem

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\,\nabla T \tag{1}$$

gdzie **k** jest tensorem przewodności cieplnej, **q** jest gęstością strumienia ciepła, a T oznacza temperaturę.

Podstawienie równania (1) do równania bilansu energii (2) oraz uwzględnienie wewnętrznych źródeł ciepła

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

prowadzi do parabolicznego równania różniczkowego nieustalonego przewodzenia ciepła zwanego równaniem Fouriera-Kirchhoffa

$$\nabla \cdot \mathbf{k} \nabla T + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3}$$

gdzie Q oznacza wewnętrzne źródło ciepła, ρ - gęstość, a c - ciepło właściwe.

Dla różnych, specjalnych warunków, równanie (3) może przybierać różne formy. Wprowadzając dyfuzyjność termiczną lub inaczej współczynnik wyrównywania temperatury

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}$$

można otrzymać równanie Fouriera-Biota dla materiału izotropowego ze stałymi właściwościami termofizycznymi

$$\nabla^2 T + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4}$$

Brak wewnętrznych źródeł ciepła oraz stały współczynnik przewodności cieplnej prowadzi do równania różniczkowego Fouriera

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{5}$$

Z kolei przy ustalonym przewodzeniu ciepła i stałym współczynniku przewodności cieplnej otrzymujemy równanie różniczkowe Poissona

$$\nabla^2 T + \frac{Q}{k} = 0 \tag{6}$$

a przy ustalonym przewodzeniu ciepła oraz braku wewnętrznych źródeł ciepła równanie różniczkowe Laplace'a

$$\nabla^2 T = 0 \tag{7}$$

Równania (1-7) można znaleźć w obszernej literaturze dotyczącej wymiany ciepła [12, 13].

2. Model Cattaneo

Z powodu na anomalie związane z modelem Fouriera oraz występowanie skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła wprowadzony został model, w którym uwzględniono relaksację gęstości strumienia ciepła

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{q} - k\nabla T \tag{8}$$

gdzie τ oznacza czas relaksacji (Cattaneo pierwotnie odkrył ten model dla gazów).

Podstawienie równania (8) do równania bilansu energii (2) prowadzi do hiperbolicznego równania różniczkowego przewodzenia ciepła

$$\tau\rho c \frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

Wprowadzając prędkość propagacji temperatury

$$c_T = \sqrt{\frac{k}{\tau\rho c}}$$

równanie (9) można zapisać

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} - {c_T}^2 \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

Uwzględniając istnienie wewnętrznych źródeł ciepła równanie przewodzenia ciepła przybiera postać

$$\nabla^2 T(x,t) + \frac{1}{k}\left[Q(x,t) + \tau \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{1}{\alpha}\left[\tau \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial^2 t} + \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right] \tag{11}$$

Gdy czas relaksacji τ dąży do zera z równania (11) otrzymujemy równanie Fouriera-Biota (3).

3. Model typu Jeffreysa

Pierwotnie model Jeffreysa został wprowadzony w celu badania rozchodzenia się fal w płaszczu Ziemi. Zjawisko to zostało opisane równaniem

$$\sigma + \lambda_1 = -\eta_0 \left(\dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t}\right) \tag{12}$$

gdzie σ oznacza tensor naprężenia, $\dot{\gamma}$ tensor prędkości ścinania, η_0 współczynnik lepkości przy zerowym ścinaniu, λ_1 czas relaksacji, a λ_2 czas opóźnienia.

Równanie (12) zostało zaadaptowane przez Josepha i Preziosi do zagadnień związanych z przepływem ciepła [10] i zapisane w postaci

$$\mathbf{q} + \tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -k \left[\nabla T + K \frac{\partial (\nabla T)}{\partial t} \right] \tag{13}$$

gdzie

$$K = \frac{\tau k_1}{k}$$

jest czasem opóźnienia, k_1 współczynnikiem efektywnej przewodności cieplnej (Fouriera), k_2 współczynnikiem przewodności Cattaneo, a $k = k_1 + k_2$.

Równanie (13) często przedstawiane jest w postaci całkowej

$$\mathbf{q} = -k_1 \nabla T(\mathbf{x}, t) - \frac{k_2}{\tau} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-(t-s)}{\tau}} \nabla T(\mathbf{x}, s) ds \tag{14}$$

Podstawiając równanie (13) do równania (2) oraz uwzględniając wewnętrzne źródła ciepła otrzymujemy równanie przewodzenia ciepła dla modelu Jeffreysa

$$\frac{1}{c_T{}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + K \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 T) + \frac{1}{k} \left[Q(x,t) + \tau \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \right] \tag{15}$$

4. Model połączony C- i F-procesu

Kolejny model przedstawia liniową kombinację modelu Fouriera i modelu Cattaneo. Podstawowym założeniem jest równoczesne występowanie szybkiego procesu opartego na równaniu (1) oraz wolnego procesu związanego z równaniem (8). Model ten jest generalizacją rozważań prowadzonych w poprzednich punktach. Równania wiążące gęstość strumienia ciepła oraz temperaturę mają następującą postać:

$$\mathbf{q}_\mathrm{F} = -k_F \nabla T = -F_T k \nabla T \tag{16}$$

$$\mathbf{q}_\mathrm{C} + \tau \frac{\partial \mathbf{q}_\mathrm{C}}{\partial t} = -k_C \nabla T = -(1 - F_T) k \nabla T \tag{17}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_\mathrm{F} + \mathbf{q}_\mathrm{C} \tag{18}$$

Indeksy F i C przy współczynniku przewodności oraz przy wektorze gęstości strumienia ciepła odwołują się odpowiednio do modelu Fouriera z nieskończoną prędkością propagacji fal i modelu Cattaneo, zachodzących jednocześnie. Wprowadzona została również liczba modelowa $F_T \in [0{,}1]$. Można zauważyć, że dla $F_T \in [0{,}1]$ otrzymujemy model Jeffreysa, dla $F_T = 1$ model Fouriera, natomiast dla $F_T = 0$ równania redukują się do modelu Cattaneo.

$$F_T = \frac{k_F}{k_F + k_C} \tag{19}$$

Podstawiając równania (16)-(18) do równania (2) otrzymujemy uogólnione równanie przewodzenia ciepła

$$\frac{1}{c_T{}^2}\frac{\partial^2 T}{\partial^2 t} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \tau F_T \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 T) + \frac{1}{k}\left[Q(x,t) + \tau\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right] \tag{20}$$

Podsumowanie

Przedstawione rozważania wraz z zestawionymi równaniami dają wgląd w nowoczesne modele wykorzystywane w badaniach nad wpływem prędkości propagacji fal ciepła na rozkład temperatury w ciałach stałych.

Literatura

[1] Pokorska I., Parametry cieplno-wilgotnościowe przegrody budowlanej, ZN Politechniki Częstochowskiej 2004 nr 158, Seria Budownictwo 10, 157-163.

[2] Pokorska I., Własności cieplne betonu, ZN Politechniki Częstochowskiej 2004 nr 159, Seria Budownictwo 11, 95-101.

[3] Pokorska I., Stochastyczne równania przepływu ciepła, ZN Politechniki Częstochowskiej 2005 nr 160, Seria Budownictwo 12, 139-141.

[4] Fourier J.B.J., Théorie Analytique De La Chaleur, Paryż 1822.

[5] Cattaneo M.C., Sulla Conduzione de Calor, Materiały z seminarium matematyczno-fizycznego z Uniwersytetu w Modenie, 1949, 3, 83-101.

[6] Vernotte P., Les Paradoxes de la Théorie continue de l'équation de la chaleur, Comptes Rendus 1958, 246, 3154-3155.

[7] Jadidi M., Non-fourier heat conduction in a long cylindrical media with insulated boundaries and arbitrary initial conditions, Australian Journal of Basic and Applied Sciences 2009, 3, 652-663.

[8] Huan-Ying Xu, Hai-Tao Oi, Xiao-Yun Jiang, Fractional Cattaneo heat equation in a semi--infinite medium, Chinese Physics B 2013, 22.

[9] Hai-Tao Qi, Huan-Ying Xu, Xin-Wei Guo, The Cattaneo-type fractional heat conduction equation for laser heating, Journal Computers & Mathematics with Applications 2013, 66, 824-831.

[10] Joseph D.D., Preziosi L., Heat waves, Rev. Mod. Phys. 1989, 61, 41-73.

[11] Zhou X., Tamma K.K., Anderson V.D.R.C., On a new C- and F-precesses heat conduction constitutive model and the associated generalized theory of thermoelasticity, Journal of Thermal Stresses 2001, 24, 531-564.

[12] Gogół W., Wymiana ciepła: tablice i wykresy, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1972.

[13] Wiśniewski S., Wiśniewski T.S., Wymiana ciepła, WNT, Warszawa 2000.

Streszczenie

W pracy przedstawiono modele przepływu ciepła w ciałach stałych w zależności od prędkości propagacji fal ciepła, kładąc nacisk na praktyczne wykorzystanie równań opisujących przedstawione zagadnienie. Praca ma charakter przeglądowy.

Models of heat conduction in solids

Abstract

The paper presents a model of heat transfer in solids, depending on the propagation speed of thermal waves, with an emphasis on the practical use of the equations governing the presented issue. Work is a review.