

**Tomasz PIĄTKOWSKI**

## **APROKSYMACJA NIECIĄGŁOŚCI MODELI SIŁY TARCIA SUCHEGO**

### *Streszczenie*

*Artykuł dotyczy badań zastosowania funkcji gładkich w aproksymacji nieciągłości siły tarcia w statycznych modelach tarcia suchego ślizgowego. Aproksymację zrealizowano za pomocą funkcji gładkich reprezentowanych przez funkcje trygonometryczne i krzywe B-spline trzeciego rzędu. Celem badań jest określenie wpływu funkcji gładkich przyjętych w modelach tarcia na zbieżność obliczeń numerycznych równań ruchu ciał. Modele tarcia charakteryzujące się gładkim przebiegiem w warunkach tarcia stick-slip mogą być wykorzystane podczas rozwiązywania układów dynamicznych maszyn metodami przeznaczonymi dla układów ciągłych.*

### **WSTĘP**

Tarcie jest złożonym i nieliniowym zjawiskiem występującym powszechnie we wszelkich układach mechanicznych. Z jednej strony, jest zjawiskiem pożądanym, poprawiającym stabilność w pewnych reżimach pracy, a z drugiej strony – nieskompensowane tarcie prowadzi do ograniczenia funkcjonalności urządzeń technicznych do takiego stopnia, że stają się całkowicie bezużyteczne. Problemy pojawiają się przy małych prędkościach ruchu członów roboczych urządzeń (np. w robotach, układach sterownia pojazdów lotniczych, obrabiarkach) podczas wykonywania zadania precyzyjnego pozycjonowania.

Zrozumienie istoty tarcia, jej modelowania, identyfikacji i kompensacji są ciągle aktualnymi wyzwaniem stawianymi przed badaczami i projektantami układów sterowania napędów urządzeń.

Współcześnie proponowane modele opisujące przebieg sił tarcia można podzielić na dwie zasadnicze grupy 6, 5, 10: statyczne i dynamiczne.

W modelach dynamicznych (tzw. ciągłych) przyjęte jest założenie, że w warunkach tarcia statycznego, w miejscu kontaktu ciał, występuje niewielkie przemieszczenie (tzw. przemieszczenie przedpoślizgowe) 1. Dzięki temu, zapewnione jest ciągłe przejście pomiędzy stanami tarcia statycznego i kinetycznego. Większość współczesnych modeli dynamicznych wywodzi się z modelu Dahl'a 6. Jego blisko spokrewnionymi, bardziej rozbudowanymi następcami są m. in. modele: LuGre 5, 9, Leuven'a 8 i GMS 1, 7. Dynamiczne modele tarcia (w odróżnieniu od modeli statycznych) są w stanie odtworzyć procesy występujące w warunkach tarcia statycznego oraz przy bardzo małej prędkości poślizgu (np. histereza siły tarcia przy zmiennej i małej prędkości poślizgu o stałym zwrocie (frictional lag), zależność siły tarcia statycznego od prędkości narastania siły zewnętrznej (break-away force), histereza siły tarcia w zakresie przemieszczeń przedpoślizgowych).

Wadą modeli dynamicznych jest ich złożoność, z którą wiąże się duża czasochłonność obliczeniowa i wysoki koszt kalibracji [12, 13, 11].

W modelach statycznych (tzw. nieciągłych lub klasycznych – bazujących na modelu Coulomb'a) siła tarcia jest nieciągła przy prędkości poślizgu ocierających się ciał równej zero, tj., gdy panują warunki tarcia statycznego. Siła tarcia równoważy wtedy wszystkie siły zewnętrzne oddziałujące na ciało, powodując utrzymywanie tego ciała w bezruchu (tzw. utwierdzenie). W warunkach tarcia kinetycznego, gdy prędkość poślizgu jest różna od zera, siła tarcia przyjmuje wartość wynikającą ze statycznego odwzorowania współczynnika tarcia (zwykle zależnego od prędkości poślizgu).

Zaletą modeli statycznych jest ich intuicyjność i prostota, a wadą – trudność całkowania równań ruchu ciał przy prędkości poślizgu równej zero [14]. W obliczeniach numerycznych dokładna wartość zero uzyskiwana jest niezwykle rzadko. Nieciągłość klasycznego modelu Coulomb'a jest niewygodna przy numerycznym rozwiązywaniu układów dynamicznych, dlatego też nieciągłość tę aproksymuje się funkcją ciągłą lub funkcjami gładkimi. Często stosowanym podejściem w pokonywaniu trudności „około zerowego” zagadnienia zjawiska tarcia jest także stosowanie funkcji przełączających pomiędzy stanami tarcia statycznego i kinetycznego, z wykorzystaniem tzw. skończonej prędkości progowej  $\varepsilon$ , poniżej której mała prędkość poślizgu  $v$  traktowana jest jako zero. Zastosowanie funkcji przełączających pozwala jednoznacznie sprecyzować stan tarcia statycznego, umożliwiając spełnienie równań statyki układu.

Interesujący rezultat, ze względu na efektywność obliczeń numerycznych, uzyskano w pracy [4]. Przedstawiono w niej model tarcia, w którym jednocześnie zastosowano aproksymację nieciągłości siły tarcia gładką funkcją wielomianową w połączeniu z funkcjami przełączającymi – zmodyfikowano tzw. model Karnopp'a.

Idea „wygładzania” statycznych modeli tarcia stała się inspiracją do przeprowadzenia własnych badań, stanowiących przedmiot prezentowanego artykułu. Celem badań jest określenie wpływu różnych przebiegów funkcji gładkich na skuteczność obliczeniową modeli tarcia. Jako funkcje gładkie, przyjęte do niwelowania nieciągłości siły tarcia są: funkcje trygonometryczne oraz krzywa sklejana trzeciego rzędu.

## 1. WSPÓŁCZESNE STATYCZNE MODELE TARCIA

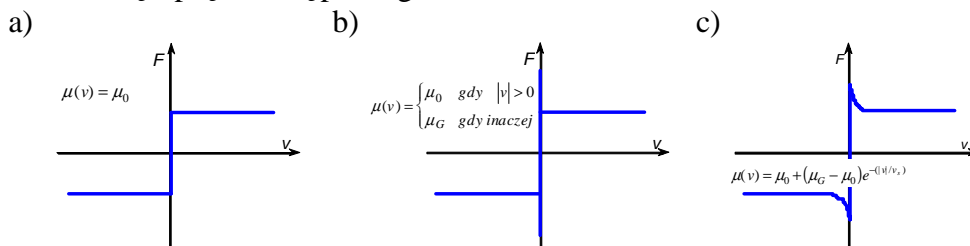
### 1.1. Wybrane przykłady modeli z funkcjami przełączającymi

Jedną z najprostszych metod aproksymacji nieciągłości modelu Coulomb'a (Rys. 1) jest wykorzystanie modelu wiskotycznego (o dużym współczynniku tłumienia) oraz funkcji  $\tanh$  (tab. 1) [2]. Główną wadą tych modeli jest założenie, że przy prędkości poślizgu równej zero – wartość siły tarcia również równa jest zero. Oznacza to, że siła tarcia pojawia się tylko wtedy, gdy występuje poślizg. Konsekwencją jest natychmiastowy ruch ciała po przyłożeniu sił zewnętrznych, nawet jeśli siły te nie przekraczają wartości siły tarcia spoczynkowego. Uzyskiwany efekt jest całkowicie sprzeczny z rzeczywistą naturą tarcia. W przypadku zaniku poślizgu ciał, siła tarcia powinna równoważyć oddziaływanie siły zewnętrznej. Z tego powodu, mimo że model wiskotyczny lub  $\tanh$  są łatwe i wygodne w implementacji numerycznej, to ich zastosowanie jest ograniczone ze względu na małą dokładność wyznaczanych torów ruchu ciał, w szczególności w przypadku oddziaływania przez długi czas sił zewnętrznych o małych wartościach.

**Tab. 1.** Wybrane statyczne modele tarcia

Równania modelu matematycznego	Objaśnienia
model Coulomb'a $F = \begin{cases} \operatorname{sgn}(v)\mu(v)N & \text{gdy }  v  > 0 \\ P_{ext} & \text{gdy inaczej} \end{cases}$	$\mu(v)$ – wsp. tarcia, $N$ – normalna siła nacisku, $P_{ext}$ – siła zewnętrzna, $v$ – prędkość poślizgu.
model wiskotyczny $F = F_0 \begin{cases} \min(v/\varepsilon, 1) & \text{gdy } v > 0 \\ \max(v/\varepsilon, -1) & \text{gdy inaczej} \end{cases}$	$\varepsilon$ – współczynnik tłumienia, $F_0$ – siła tarcia kinetycznego.
model tanh $F = F_0 \tanh(v/\varepsilon)$	$\varepsilon$ – współczynnik szybkości narastania zmian w funkcji tanh.
model Karnopp'a $F = \begin{cases} F_0 \operatorname{sgn}(v) & \text{gdy }  v  > \varepsilon \\ \left\{ \begin{array}{l} P_{ext} \text{ gdy } F_G >  P_{ext}  \\ F_G \operatorname{sgn}(P_{ext}) \text{ gdy inaczej} \end{array} \right\} & \text{gdy inaczej} \end{cases}$	$\varepsilon$ – prędkość progowa, poniżej której prędkość poślizgu $v$ traktowana jest jako zero, $F_0, F_G$ – siła tarcia kinetycznego i spoczynkowego.
model Quinn'a $F = \begin{cases} F_0 \operatorname{sgn}(\bar{v}) & \text{gdy }  \bar{v}  > \varepsilon \\ \frac{F_G \bar{v}}{\varepsilon} & \text{gdy inaczej} \end{cases}$	$\bar{v} = \begin{cases} v + \frac{\varepsilon P_{ext}}{F} & \text{gdy }  P_{ext}  \leq F_G \\ v + \operatorname{sgn}(P_{ext})\varepsilon & \text{gdy inaczej} \end{cases}$
model Kikuuwe'a $F = \begin{cases} F_0 \operatorname{sgn}\left(P_{ext} + \frac{mv}{T}\right) & \text{gdy } \left P_{ext} + \frac{mv}{T}\right  > F_G \\ P_{ext} + \frac{mv}{T} & \text{gdy inaczej} \end{cases}$	$T = \frac{m}{F_G} \varepsilon$ , $m$ – masa ładunku.

W literaturze przedmiotu proponowane są również statyczne modele tarcia, które usuwają nieciągłość siły tarcia bez utraty zgodności z modelem Coulomba. Należą do nich modele, które posiadają funkcje przełączające pomiędzy stanem tarcia statycznego i kinetycznego, np.: modele Karnopp'a, Quinn'a i Kikuuwe'a (tab. 1) 6, 2. Kluczowym elementem tych modeli jest zastosowanie prędkości progowej  $\varepsilon$ , traktowanej jako substytut prędkości poślizgu równej zero. Prędkość progowa  $\varepsilon$  nie ma sensu fizycznego – jej wartość dobierana jest na podstawie doświadczenia i intuicji badacza. Negatywnym skutkiem stosowania tej prędkości jest efekt dryfowania – obiekt, który powinien trwać w spoczynku, w rzeczywistości może przemieszczać się z prędkością poślizgu  $\varepsilon$ .



**Rys. 1.** Wykres siły tarcia wg modelu Coulomb'a 6: a) model klasyczny, b), c) modele uwzględniające efekt Stribeck

## 1.2. Przykład modelu tarcia gładkiego w fazie utwierdzenia

Przykład zastosowania funkcji gładkiej w aproksymacji nieciągłości siły tarcia w modelu tarcia z funkcjami przełączającymi przedstawiono w pracy 4. W pracy tej dokonano modyfikacji modelu Karnopp'a (w dalszej części artykułu nazwanego modelem Awrejcewicza), polegającej na wprowadzeniu funkcji gładkiej  $A_I$  (2), usuwającej nieciągłość siły tarcia w fazie utwierdzenia:

$$F = \begin{cases} F_0 \operatorname{sgn}(v) & \text{gdy } |v| > \varepsilon \\ \left. \begin{cases} A_1(v, \varepsilon)(-P_{ext} + F_G \operatorname{sgn}(v)) + P_{ext} & \text{gdy } F_G > |P_{ext}| \\ \left. \begin{cases} F_G \operatorname{sgn}(P_{zew}) & \text{gdy } \operatorname{sgn}(v) \operatorname{sgn}(P_{ext}) > 0 \\ (2A_1(v, \varepsilon) - 1)F_G \operatorname{sgn}(v) & \text{gdy inaczej} \end{cases} \right\} & \text{gdy inaczej} \end{cases} \right\} \text{gdy inaczej} \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

$$A_1(a, b) = \frac{a^2}{b^2} \left( 3 - 2 \frac{|a|}{b} \right), \quad a \in \langle -b; b \rangle \quad (2)$$

Określenie „funkcja gładka” jest terminem umownym, oznaczającym jeden z dwóch rodzajów regularności: albo funkcję różniczkowalną, której pochodna jest funkcją ciągłą, albo funkcję mającą ciągle pochodne wszystkich rzędów. Już pierwszy (słabszy) z tych warunków gwarantuje, że wykres funkcji nie ma załamań ani poważniejszych osobliwości, co uzasadnia przyjętą nazwę "gładka".

## 2. BADANIA WŁASNE

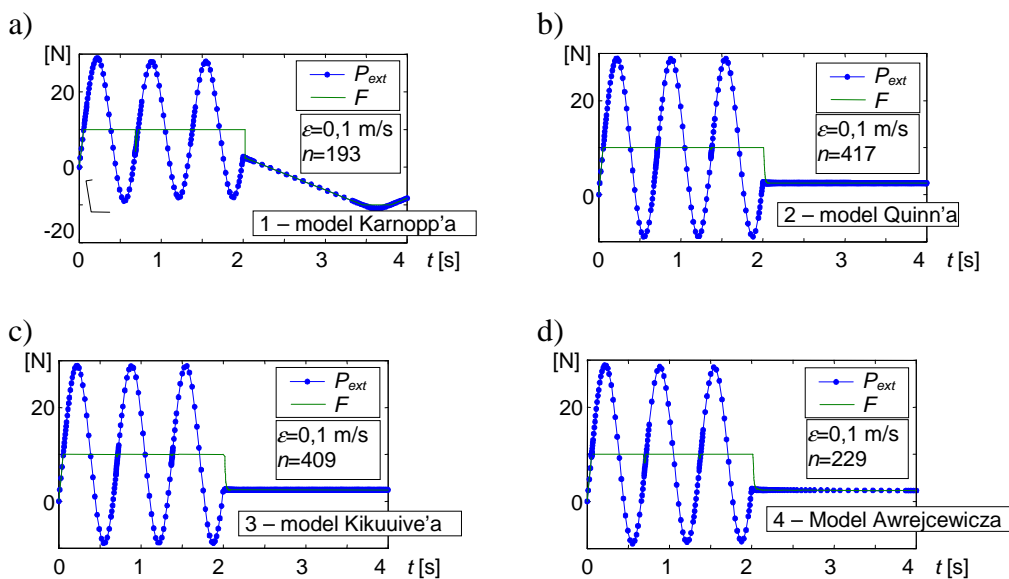
### 2.1. Efektywność obliczeniowa modeli tarcia

Efektywność obliczeniową modeli tarcia Karnopp'a, Quinn'a, Kikuuive'a oraz Awrejcewicza (identyfikowane w dalszej części pracy odpowiednio jako model 1, 2, 3, i 4) kreślono na podstawie wyników symulacji ruchu układu mechanicznego reprezentowanego równaniem

$$m\ddot{x} = -k(x - \dot{z}) - F \quad (3)$$

gdzie:  $\dot{z} = \begin{cases} 2 \text{ m/s} & \text{gdy } t \leq 2 \text{ s} \\ 0 \text{ m/s} & \text{gdy inaczej} \end{cases}$ ,  $m=1 \text{ kg}$ ,  $k=90 \text{ N/m}$ ,  $F=10 \text{ N}$ .

Powyższe równanie rozwiązano w środowisku Matlab'a za pomocą narzędzi do rozwiązywania równań różniczkowych – wykorzystując funkcję ode45 z zaimplementowaną metodą Runge-Kutta (4,5) o standardowych ustawieniach parametrów: zmienny krok całkowania, błąd względny  $10^{-3}$  i bezwzględny  $10^{-6}$ . Obliczenia wykonywano dla pierwszych 4 sekund ruchu obiektu, przyjmując parametry początkowe:  $x_{(t=0)} = 0$  i  $\dot{x}_{(t=0)} = 0$ .



**Rys. 2.** Wyniki symulacji ruchu ciała dla modeli: a) Karnopp'a, b) Quinn'a, c) Kikuuive'a, d) Awrejcewicza;  $n$  – ilość iteracji

Na podstawie analizy Rys. 2a wynika, że zastosowanie w modelu Karnopp'a parametru  $\varepsilon=0,1$  m/s powoduje wyraźny efekt dryfowania. Efekt ten znika, gdy  $\varepsilon \leq 0,001$  m/s (dane nie reprezentowane na rysunku). Ponadto, model ten wyróżnia się brakiem tendencji do wzrostu liczby iteracji obliczeń w przypadku przyjęcia małej wartości  $\varepsilon$  ( $n=193$ , gdy  $\varepsilon=0,1$  m/s, a gdy  $\varepsilon=0,001$  m/s to  $n=189$ ).

Z kolei, model Quinn'a (Rys. 2b) wykazuje dużą zbieżność rozwiązania przy zastosowaniu nawet dużych wartości parametru  $\varepsilon=0,1$  m/s. Rezultat ten okupiony jest jednak zwiększoną liczbą iteracji ( $n=417$ , gdy  $\varepsilon=0,1$  m/s). Podobny efekt uzyskiwany jest przy zastosowaniu modelu Kikuuwe'a (Rys. 2c).

Lepszą zbieżność, w porównaniu z modelami 1÷3, wykazuje model Awrejcewicza (Rys. 2d). Akceptowalny „wizualnie” wynik rozwiązania równania (3) uzyskiwany jest już, gdy  $\varepsilon=0,1$  m/s oraz po wykonaniu zaledwie  $n=229$  iteracji.

## 2.2. Propozycja modeli o gładkim przebiegu sił tarcia na etapie utwierdzenia

W dalszej części pracy podjęto próbę zastosowania własnych funkcji gładkich w modelach 1÷4 oraz zbadania wpływu wprowadzonych zmian na efektywność numeryczną otrzymanych modeli.

Model Quinn'a został poddany modyfikacji trzema rodzajami funkcji ciągłych. Powstałe modele identyfikowane są kolejno jako model 5, 6 i 7. Modele identyfikowane jako 8 i 9 dotyczą modyfikacji modeli, odpowiednio: Kikuuwe'a i Awrejcewicza.

- 5 – model Quinn'a I

Pierwsza modyfikacja modelu Quinn'a prowadzi do uzyskania zależności

$$F = \begin{cases} F_0 \operatorname{sgn}(\bar{v}) & \text{gdy } |\bar{v}| > \varepsilon \\ F_G A_3(\bar{v}, \varepsilon) & \text{gdy inaczej} \end{cases} \quad (4)$$

gdzie:

$$\bar{v} = \begin{cases} v + \varepsilon A_3(P_{ext}, F) & \text{gdy } |P_{ext}| \leq F_G \\ v + \operatorname{sgn}(P_{ext})\varepsilon & \text{gdy inaczej} \end{cases} \quad (5)$$

W modelu tym zastosowano gładką funkcję  $A_3$

$$A_3(a, b) = \cos\left(0,5\pi\left(3 + \frac{a}{b}\right)\right), \quad a \in \langle -b; b \rangle \quad (6)$$

- 6 – model Quinn'a II

Druga modyfikacja modelu Quinn'a polega na wprowadzeniu do poprzedniego modelu (do zależności (4)) gładkiej funkcji  $A_4$

$$A_4(a, b) = A_2(a, b) \operatorname{sgn}(a), \quad a \in \langle -b; b \rangle \quad (7)$$

Otrzymany model tarcia jest postaci

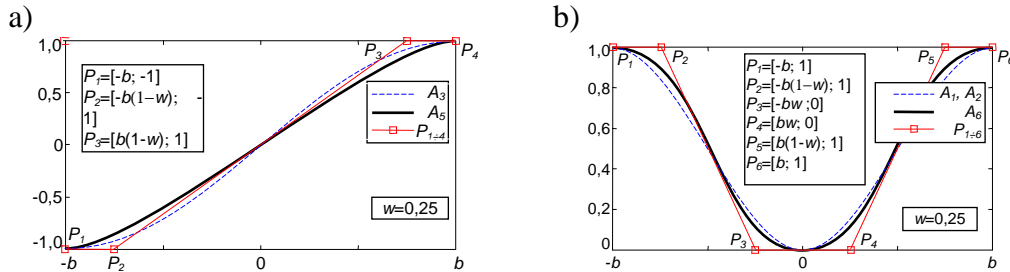
$$F = \begin{cases} F_0 \operatorname{sgn}(\bar{v}) & \text{gdy } |\bar{v}| > \varepsilon \\ F_G A_4(\bar{v}, \varepsilon) & \text{gdy inaczej} \end{cases} \quad (8)$$

- 7 – model Quinn'a III

Trzecia modyfikacja modelu Quinn'a polega na zastąpieniu w zależnościach (4) i (5) funkcji  $A_3$ , funkcją  $A_5$

$$A_5(a, b) = \text{krzywa\_sklejana}(a, b, w, 4), \quad a \in \langle -b; b \rangle \quad (9)$$

Funkcja  $A_5$  jest krzywą sklejaną trzeciego rzędu, która rozpięta jest na wieloboku wyznaczonym przez cztery punkty kontrolne (Rys. 3a). Współrzędne tych punktów zostały tak dobrane by uzyskać styczność początkowego i końcowego przebiegu funkcji  $A_5$  do osi odciętych (do poziomych linii wykresu). Położenie wewnętrznych punktów kontrolnych ( $P_2, P_3$ ), względem zewnętrznych ( $P_1, P_4$ ), sterowane jest parametrem  $w$  – decydującym o kształcie krzywej sklejaney. Gdy  $w=0$ , kształt krzywej sklejaney zbliżony jest do linii prostej.



**Rys. 3.** Krzywe sklejanie zastosowane w zmodyfikowanych modelach: a) 7-Quinn’a III i 8-Kikuuwe’a I, b) 9-Awrejcewicza I;  $P_i$  – punkty kontrolne krzywej sklejaney,  $A_5, A_6$  – krzywa sklejana,  $w$  – parametr określający położenie wewnętrznych punktów kontrolnych

- 8 – model Kikuuwe’a I

Modyfikacja modelu Kikuuwe’a polega na przyjęciu zapisu

$$F = \begin{cases} F_0 \operatorname{sgn}\left(P_{ext} + \frac{mv}{T}\right) & \text{gdy } \left|P_{ext} + \frac{mv}{T}\right| > F_G \\ F_G A_5\left(P_{ext} + \frac{mv}{T}, F_G\right) & \text{gdy inaczej} \end{cases} \quad (10)$$

w którym funkcja  $A_5$  jest określona zależnością (9).

- 9 – model Awrejcewicza I

W modelu Awrejcewicza (1) dokonano modyfikacji polegającej na zastąpieniu funkcji  $A_1$  funkcją  $A_6$

$$A_6(a, b) = \text{krzywa\_sklejana}(a, b, w, 6), \quad a \in \langle -b; b \rangle \quad (11)$$

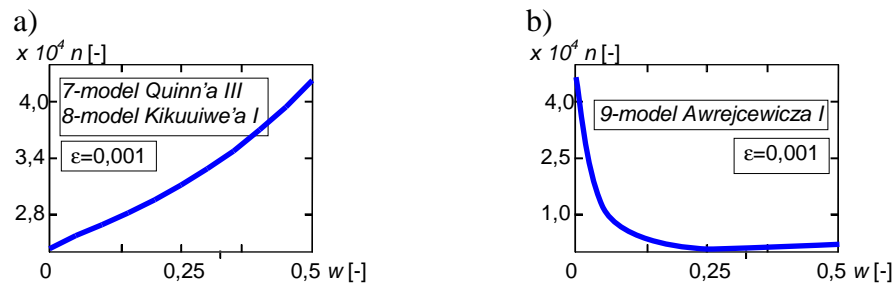
reprezentującą krzywą sklejaną trzeciego stopnia rozpiętą na wieloboku określonym przez sześć punktów kontrolnych (Rys. 3b). Krzywa ta jest symetryczna względem osi pionowej przechodzącej przez środek układu współrzędnych.

## 2.3. Weryfikacja numeryczna zmodyfikowanych modeli tarcia

Funkcje gładkie  $A_5, A_6$  reprezentowane są przez krzywe sklejanie, których krzywizna sterowana jest parametrem  $w$ . Parametr ten wykorzystano podczas poszukiwania optymalnego kształtu krzywej sklejaney ze względu na minimalizację ilości iteracji wykonywanych podczas rozwiązywania testowego równania ruchu (3). W celu określenia optymalnej wartości tego parametru, wykorzystano wykresy z Rys. 4. Wykresy te ilustrują ilość iteracji wykonanych podczas rozwiązywania równania ruchu (3), wyznaczonych w funkcji parametru  $w$ . Obliczenia wykonano za pomocą algorytmu Runge-Kutty (4,5), przy założeniu  $\varepsilon=0,001$ .

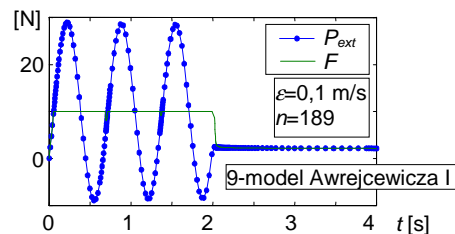
Z analizy Rys. 4a wynika, że efektywność obliczeniowa modeli 7 i 8 (modeli Quinn’a i Kikuuwe’a zmodyfikowanych funkcją  $A_5$ ) jest porównywalna (podobnie jak w przypadku modeli sprzed modyfikacji – Rys. 2b,c). Ponadto, wraz ze wzrostem wartości parametru  $w$  (krzywizny krzywej sklejaney) maleje efektywność obliczeniowa tych modeli. Inny efekt uzyskiwany jest w przypadku zastosowania funkcji  $A_6$  (Rys. 4b). Maksymalna efektywność obliczeniowa modelu 9 (Awrejcewicza z funkcją  $A_6$ ) jest osiągnięta, gdy parametr  $w$  przyjmuje

wartość 0,25. Taką też wartość  $w=0,25$  przyjęto na potrzeby dalszych obliczeń – także w odniesieniu do funkcji  $A_5$  zastosowanej w modelach 7 i 8.



**Rys. 4.** Wpływ współczynnika  $w$  na liczbę iteracji obliczeń numerycznych wykonanych przy pomocy: a) 7 – modelu Quinn'a III i 8 – modelu Kikuiwe'a I, b) 9 – modelu Awrejcewicza I

Model 9 (model Awrejcewicza zmodyfikowany funkcją gładką  $A_6$  – krzywą sklejaną) wykazuje dobrą zbieżność obliczeniową już przy  $\epsilon=0,1$  m/s (Rys. 5). Ponadto, ilość wykonanych iteracji jest mniejsza o ok. 20% w porównaniu do modelu sprzed modyfikacji (Rys. 2d).



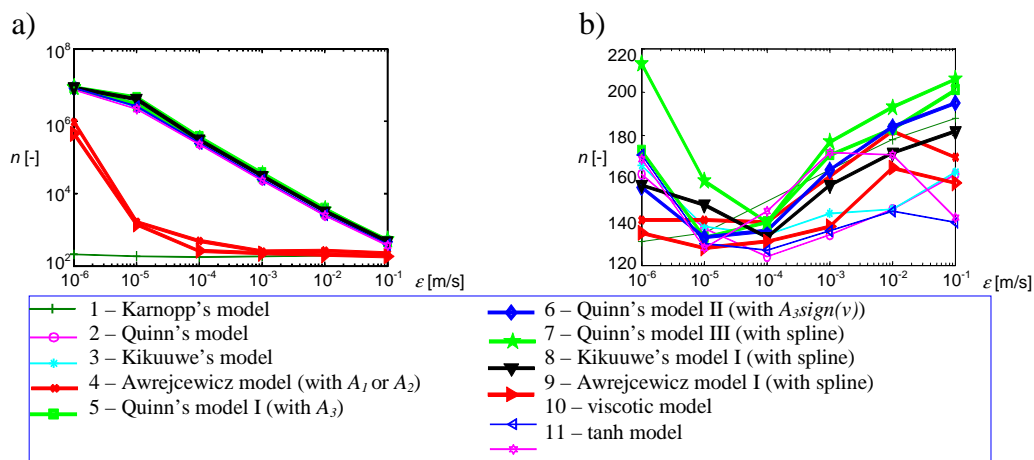
**Rys. 5.** Wyniki symulacji ruchu ciała wg modelu 9-Awrejcewicza I;  $w=0,25$

Na Rys. 6 przedstawione zostały wykresy ilości wykonanych iteracji w funkcji parametru  $\epsilon$  uzyskanych podczas rozwiązywania równania (3) z wykorzystaniem wszystkich rozpatrywanych w pracy modeli tarcia. Obliczenia wykonano dwiema metodami: Runge-Kutty (4,5) (Rys. 6a) oraz zmodyfikowaną Rosenbrocka drugiego rzędu (Rys. 6b). Pierwsza metoda dedykowana jest do rozwiązywania tzw. równań różniczkowych niesztywnych (w środowisku Matlab'a reprezentowana funkcją ode45), a druga – do tzw. równań sztywnych (funkcja ode23s). Algorytmy przeznaczone do rozwiązywania równań różniczkowych sztywnych wykorzystywane są wtedy, gdy zawodzą algorytmy standardowe. Równania różniczkowe sztywne opisują procesy dynamiczne, które wyróżniają się długimi monotonnymi przebiegami zakłócanymi drastycznymi skokami wartości, jak np. w funkcji o przebiegu prostokątnym. Rozwiązywanie takich równań jest bardzo kłopotliwe – konieczne jest stosowanie specjalizowanych algorytmów, nie zawsze kończące się powodzeniem. Procesy dynamiczne z tarcie suchym uzyskują charakter równań różniczkowych sztywnych, gdy następuje nagle zmiana wartości siły tarcia, spowodowana np. przyjęciem bardzo małych wartości parametru  $\epsilon$  (przy przejściu pomiędzy stanami tarcia statycznego i kinetycznego).

Z analizy Rys. 6 wynika, że zmodyfikowany model Awrejcewicza z funkcją gładką definiowaną krzywą sklejaną (model 9) wykazuje największą efektywność obliczeniową spośród wszystkich analizowanych w pracy modeli.

Wpływ parametru  $\epsilon$  na ilość wykonywanych iteracji  $n$  (dla poszczególnych modeli tarcia) uzależniony jest od rodzaju zastosowanej metody całkowania. W przebadanym zakresie parametru  $\epsilon \in \langle 10^{-6}; 10^{-1} \rangle$  m/s, w przypadku metody całkowania reprezentowanej funkcją ode45 (Rys. 6a), zmniejszanie wartości parametru  $\epsilon$  powoduje gwałtowny wzrost ilości iteracji (wyłączając model 1, a gdy  $\epsilon > 10^{-5}$  m/s – także modele 4 i 9). Z kolei, w przypadku

zastosowania funkcji ode23s (Rys. 6b) ilość iteracji jest zdecydowanie mniejsza niż dla ode45, przy czym minimalna ilość iteracji uzyskiwana jest (w większości analizowanych modeli tarcia) gdy parametr  $\varepsilon$  przyjmuje wartość ok.  $10^{-5} \div 10^{-4}$  m/s.



**Rys. 6.** Ilość iteracji uzyskana podczas rozwiązywania równania ruchu (3) wg algorytmów oferowanych w środowisku Matlab'a: a) dla ode45, b) dla ode23s; 1÷3 i 10 – modele tarcia bez funkcji gładkich, 4÷9 i 11 – modele tarcia z funkcjami gładkimi;  $w=0,25$

## PODSUMOWANIE

- Zaproponowano modyfikacje statycznych modeli tarcia suchego z funkcjami przełączającymi, polegające na aproksymacji nieciągłości siły tarcia funkcjami gładkimi: trygonometrycznymi oraz krzywą sklejaną trzeciego rzędu.
- Zastosowanie krzywej sklejaney umożliwia dobór optymalnego przebiegu funkcji gładkiej ze względu na maksymalizację efektywności obliczeniowej modeli tarcia.
- Opracowane modele mogą być wykorzystane podczas rozwiązywania układów dynamicznych metodami przeznaczonymi dla układów ciągłych, np. podczas wyznaczania wykładników Lapunowa standardowymi metodami, w celu badania chaotyczności układu lub w przypadku stosowania gradientowych technik optymalizacyjnych.
- Spośród przebadanych w pracy modeli tarcia, najbardziej efektywnym pod względem poprawności uzyskiwanych wyników i ilości iteracji wykonywanych podczas rozwiązywania testowego równania ruchu jest model Awrejcewicza zmodyfikowany krzywą sklejaną.

## APPROXIMATION OF DISCONTINUITY OF DRY FRICTION FORCE MODELS

### Abstract

The paper deals with the research of friction force discontinuity in the static friction models. Approximation was realized by means of smooth functions represented by trigonometric functions and B-spline curve of third order. The aim of research is to determine the influence of smooth functions adopted in the friction models on the convergence of numerical calculations of motion equations. The friction models of smooth course in the stick-slip friction phase can be used when solving the dynamic systems of machines with the help of method designed for continuous systems.



## BIBLIOGRAFIA

1. Al-Bender F., Lampaert V., Swevers J.: *The generalized Maxwell-slip model: A novel model for friction simulation and compensation*. IEEE Transactions on Automatic Control, 50 (11), 2005, 1883-1887.
2. Anderson S., Söderberg A., Björklund S.: *Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts*. Tribology International, 40, 2007, 580-587.
3. Awrejcewicz J., Grzelczyk D., Pyryev Y.: *A novel friction modeling and its impact on differential equations computation and Lyapunov exponents estimation*. Vibromechanika, Journal of Vibroengineering, 10(4), 2008, 475-482.
4. Awrejcewicz J., Grzelczyk D., Pyryev Y.: *Modelowanie tarcia suchego podczas symulacji drgań typu utwierdzenie-poślizg*. V Międzynarodowa Konferencja "Tarcie 2008", Warszawa 2008, 6-13.
5. Canadus de Wit C., Olson H., Åström K.J., Lischinsky P.: *A new Model for control of systems with friction*. IEEE Transactions on Automatic Control, 40 (3), 1995, 419-425.
6. Kikuuwe R., Takesue N., Sano A., Mochiyama H., Fujimoto H.: *Fixed-step friction simulation: from classical Coulomb model to modern continuous models*. Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Edmonton, 2-6 Aug., Canada, 2005, 3910-3917.
7. Lampaert V., Al-Bender F., Swevers J.: *A novel generic model at asperity level for dry friction force dynamics*. Tribology Letters, 16, 2004, 81-93.
8. Lampaert V., Swevers J., Al-Bender F.: *Modification of the Leuven integrated friction model structure*. IEEE Transactions on Automatic Control 47 (4) 2002, 683-687.
9. Padthe A.K., Oh J., Bernstein D.S.: *On the LuGre model and friction-induced hysteresis*. Proceedings of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006, 3247-3252.
10. Piątkowski T.: *Analysis of translational positioning of unit loads by directionally-oriented friction force fields*. Mechanism and Machine Theory, Elsevier, 46, 2011, 201-217.
11. Richard C., Cutkosky M. R.: *Friction modeling and displaying in haptic applications involving user performance*. Proceedings of the 2002 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 2002, 605-611.
12. Rizos D. D., Fassois S. D.: *Friction identification based upon the LuGre and Maxwell slip models*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 17(1), 2009, 153-160.
13. Tjahjowidodo T., Al-Bender F., Van Brussel H.: *Symens W., Friction characterization and compensation in electro-mechanical systems*, Journal of Sound and Vibration, 308, 2007, 632-636.
14. Wojewoda J.: *Efekty histerezy w tarciu suchym*. Rozprawy naukowe, Z. 366, Politechnika Łódzka, 2008, 124 strony.

### **Autorzy:**

**dr hab. inż. Tomasz PIĄTKOWSKI** – Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy  
w Bydgoszczy