



## Podstawy teorii elektropiezospężystości silników piezoelektrycznych o kinematyce postępowej i obrotowej

WŁODZIMIERZ PRZYBOROWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Systemów Elektronicznych,  
ul. Gen. Witolda Urbanowicza 2, 01-908 Warszawa, wlodzimierz.przyborowski@wat.edu.pl

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono podstawy teorii elektropiezospężystości i przystosowanie tej teorii do opisu przetworników elektromechanicznych — silników elektrycznych typu piezoelektrycznego. Ponieważ równania piezoelektryczności i sprężystości są sprzężone przez złożone związki konstytutywne, to sformułowanie ogólnego modelu matematycznego dla tych silników nie jest możliwe. Dlatego w pracy przedstawiono równania dla prostych strukturalnie silników piezoelektrycznych o ruchu postępowym i obrotowym. Silniki o ruchu postępowym charakteryzują się formą płaską lub tubową. Natomiast silniki o ruchu obrotowym mają formę cylindryczną lub tarczową.

Pole elektryczne, w przyjętych formach silników piezoelektrycznych, generujące efekt piezoelektryczny, jest polem jednoskładowym prostopadłym do kierunku ruchu.

Wyznaczone równania można uprościć w wyniku redukcji niektórych parametrów konstytutywnych, ale wymaga to szczegółowej analizy związków materiałowych i uwzględnienia w oddziaływaniach sił i momentów, w tych silnikach, dominujących naprężeń piezoelektrycznych, które determinują określoną kinetykę.

**Słowa kluczowe:** silniki piezoelektryczne o ruchu postępowym i obrotowym, równania elektropiezospężystości

DOI: 10.5604/01.3001.0012.8504

### 1. Wstęp

Silniki piezoelektryczne są nową dziedziną przetworników elektromechanicznych zapoczątkowaną i rozwijaną od około pięćdziesięciu lat, przyjmując umownie za początek tego kierunku badań patent A. Williamsa i W. Browna [1] oraz monografię

W.W. Lawrenki (i in.) [2] opublikowaną w roku 1980. Opisy konstrukcji tych przetworników — silników w wymienionych pozycjach bibliograficznych są bardzo poglądowe, a opis formalny działania silników piezoelektrycznych przedstawiony w monografii [2] ujmuje współzależności oddziaływań mechanicznych i elektrycznych na podstawie modelu obwodowego silnika. Natomiast po raz pierwszy równania dla przetworników piezoelektrycznych, na bazie teorii fenomenologicznej ośrodków piezosprężystych (a w zasadzie sprężystych dielektryków) sformułowanej przez R.D. Mindlina [3] i R.A. Toupiną [4, 5], zostały zaprezentowane w monografiach S. Ueha i in. [6], T. Sashida i in. [7], ale bez bezpośredniego związku z silnikami piezoelektrycznymi. Należy podkreślić, że efekt elektropiezospężystości znany jest od ponad wieku, a dokonali tego odkrycia bracia P. i J. Curie. Pierwszy formalny opis oddziaływań elektropiezospężystych przedstawiony jest w pracy W. Voigta [8]. Pełne sformułowanie równań elektropiezospężystości i odpowiadający tym równaniom układ związków konstytutywnych zostały opublikowane w wymienionych pracach R.D. Mindlina [3] i R.A. Toupiną [4]. Wypada odnotować, że teorią pól sprzężonych elektromagnetospężystych zajmowali się również polscy uczeni, S. Kaliski i W. Nowacki, a zwieńczeniem badań w tej dziedzinie prof. W. Nowackiego jest monografia [9]. Prace z dziedziny elektrosprężystości są zorientowane przede wszystkim na zagadnienia efektów falowych w ośrodkach piezoelektrycznych oraz problemy wytrzymałościowe konstrukcji inżynierskich wyposażonych w materiały piezoelektryczne. Jest również wiele prac w dziedzinie elektromechanicznych przetworników sygnałów, tzw. akcelerometrów, na bazie efektu piezoelektrycznego.

Badania w dziedzinie maszyn elektrycznych z efektem piezoelektrycznym są ukierunkowane dotychczas na tworzenie modeli o parametrach skupionych, a więc stosuje się opis tych efektów równaniami zintegrowanymi i funkcjami stanu w zależności od zmiennej czasu i jednej zmiennej przestrzennej. Jako znaczące publikacje w dziedzinie silników piezoelektrycznych, osobiście określanymi w literaturze anglosaskiej nazwą silniki ultradźwiękowe (*ultrasonic motor*), można wymienić monografie [6], [7] oraz publikacje zagraniczne i krajowe, spośród których do interesujących można zaliczyć [10-14]. Niewątpliwie trudnością w ujęciu polowym tych silników jest złożoność teorii piezoelektryczności ze względu na sprzężenie pola elektrycznego i sprężystego przez związki konstytutywne elektrosprężyste. Wypada jednak z satysfakcją stwierdzić, że pomimo złożoności teorii i technologii silników piezoelektrycznych imponujące są: rozwój ich konstrukcji i bardzo szerokie zastosowania. Szczególne cechy przemian energii zachodzących w tych silnikach, wyjątkowe parametry eksploatacyjne i właściwości użytkowe (w porównaniu do silników elektromagnetycznych) decydują o ich specjalnych zastosowaniach. Wykorzystanie tych przetworników jest coraz bardziej wszechstronne, ale do najważniejszych należy zaliczyć zastosowanie w przemyśle medycznym i biotechnologicznym i oczywiście w medycynie oraz w robotyce, w układach miniaturowych serwonapędów, przetwarzania sygnałów itp.

Spśród najistotniejszych właściwości silników piezoelektrycznych wymienia się:

- wysoki stopień miniaturyzacji,
- mały pobór mocy,
- brak potrzeby konserwacji,
- mały pobór mocy w stanach pracy statycznej,
- brak generacji fal elektromagnetycznych,
- wysoki stopień pozycjonowania bez mechanizmów pośredniczących,
- duży stopień gęstości energii w porównaniu z silnikami elektromagnetycznymi,
- niepalność i bezpieczeństwo w sytuacjach przeciążenia,
- możliwość pracy w bardzo niskich temperaturach (kriogenicznych) i w próżni,
- brak emisji ciepła i efektów wibracyjnych.

Silniki piezoelektryczne odznaczają się stałym poziomem sprawności w szerokim zakresie zmian wymiarów geometrycznych oraz charakteryzują się wysoką dynamiką obrotów lub przemieszczeń w odpowiedzi na sygnały sterujące.

Ważną własnością przetworników elektropiezomechanicznych jest, jak wszystkich maszyn elektrycznych, odwracalność ich pracy, a więc mogą również pracować jako minigeneratory energii elektrycznej.

Wiele prac na temat przetworników piezoelektrycznych i zrealizowane silniki typu piezoelektrycznego dowodzą intensywności rozwoju tej dziedziny i coraz powszechniejszych zastosowań [11].

Istota elektropiezospężystości polega na sprzężeniu pola elektrycznego i sprężystego w pewnego rodzaju materiałach cechujących się polaryzacją elektryczną, wskutek oddziaływań mechanicznych — sprężystych — na pole elektryczne  $\sigma \Rightarrow E$  i odwrotnie. Ciało piezoelektryczne zmienia swoje wymiary (formę) pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego  $E \Rightarrow \bar{\epsilon}$  ( $\bar{\sigma}, E, \bar{\epsilon}$  oznaczają odpowiednio: tensor naprężeń, wektor natężenia pola elektrycznego i tensor odkształceń).

Prezentowana publikacja jest rozszerzeniem formalnym i interpretacyjnym pracy autora [17] i ma na celu sformułowanie podstaw, na bazie równań pól sprzężonych, połowych równań silników piezoelektrycznych.

## 2. Podstawowe równania elektropiezospężystości

Zestaw równań pola elektromagnetycznego i pola sprężystości w zapisie wskaźnikowym z notacją tensorową, stosowaną powszechnie w teorii sprężystości [6, 9], ma postać i obejmuje:

- równania elektromagnetyzmu:

$$\epsilon_{ijk} H_{j,k} = J_i + \dot{D}_i \quad (\Leftrightarrow \text{rot}H = J + \frac{\partial D}{\partial t})^1 \quad (1)$$

$$\epsilon_{ijk} E_{k,j} = -\dot{B}_i \quad (\Leftrightarrow \text{rot}E = -\frac{dB}{dt})^1 \quad (2)$$

$$B_{k,k} = 0 \quad (\Leftrightarrow \text{div}B = 0)^{1*} \quad (3)$$

$$D_{k,k} = \rho \quad (4)$$

$$J_{k,k} + \dot{\rho} = 0 \quad (5)$$

gdzie wektory  $H_k$ ,  $B_k$ ,  $E_k$ ,  $D_k$ ,  $J_k$  to odpowiednio: natężenie pola magnetycznego, indukcja magnetyczna, natężenie pola elektrycznego, indukcja elektryczna,  $\rho$  oznacza gęstość ładunku,  $\epsilon_{ijk}$  — symbol permutacyjny Ricciego, przecinek —, — przy dolnych wskaźnikach symboli rdzeniowych oznacza różniczkowanie po współrzędnej przestrzennej, a po wskaźnikach powtarzających się dokonuje się sumowania, kropka nad symbolem funkcji oznacza pochodną czasową;

— równania elastokinetyczne

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho_m \ddot{u}_i \quad (6)$$

$$\epsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}$  — tensor naprężenia,  
 $u_i$  — wektor przemieszczenia,  
 $\epsilon_{ij}$  — tensor odkształcenia,  
 $f_i$  — wektor siły objętościowej,  
 $\rho_m$  — gęstość ośrodka; pierwszy wskaźnik w indeksie naprężeń tensorowych oznacza współrzędną normalnej do powierzchni przyłożonego naprężenia, a drugi wskaźnik współrzędną naprężenia.

Główną trudnością w analizie oddziaływań elastopiezoelektrycznych, jak we wszystkich zagadnieniach technicznych pól fizycznych, są związki konstytutywne definiujące rozważane ośrodki i jednocześnie w tym zagadnieniu sprzęgające efekty mechaniczne z elektrycznymi. Związki konstytutywne w teorii fenomenologicznej wyznacza się na podstawie analizy funkcji entalpii. Funkcja ta jest określana, w przypadku kryształicznych ośrodków piezoelektrycznych, jako entalpia elektryczna i definiowana jest wzorem

$$\mathcal{E}_e = U - E_i D_i, \quad (8)$$

<sup>1</sup> Równania w nawiasach są zapisane w konwencji operatorowej stosowanej powszechnie w teorii pola elektromagnetycznego, ale zapis wskaźnikowy stosowany w teorii ośrodków ciągłych jest dogodniejszy, ponieważ uwidacznia bezpośrednio operacje matematyczne.

w którym  $U$  jest energią wewnętrzną środowiska o własnościach elektropiezoprzężystych.

W procedurze wyznaczania związków konstytutywnych funkcję entalpii wyraża się w zależności od natężenia pola elektrycznego i odkształceń, przyjmując, że naprężenia  $\sigma_{ij}$  zależą od odkształceń  $\varepsilon_{ij}$ , a indukcja elektryczna  $D_i$  od natężenia pola elektrycznego  $E_i$ . Związki konstytutywne mają postać

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \quad (9)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ik} E_k \quad (10)$$

gdzie:  $C_{ijkl}$  jest tensorem sztywności o walencji 4 i przy uwzględnieniu symetrii zawiera 21 składowych,  $e_{ikl}$  to tensor piezoelektryczny o walencji 3, o 18 składowych przy symetrii względem dwu wskaźników  $k$  i  $l$ ,  $\beta_{ik}$  — tensor przenikalności dielektrycznej o walencji 2, symetryczny o 6 składowych.

Należy nadmienić, że znaczną trudnością w analizie związków konstytutywnych jest brak szerszych informacji odnośnie do wartości liczbowych parametrów konstytutywnych, przede wszystkim składowych tensora piezoelektryczności, jak również tensora sztywności dla tych materiałów. Obserwuje się jednak istotny postęp w tej dziedzinie w okresie ostatniego półwiecza [15, 16], a dotyczy to wykrycia lub „zsyntetyzowania” materiałów piezoelektrycznych o bogatszych formach, w znaczeniu ich osi i płaszczyzn krystalograficznych.

Przed kolejnymi uproszczeniami równań elastopiezoelektryczności należy nadmienić, że teorię piezoelektryczności można rozszerzyć przez wprowadzenie w pierwszej kolejności wektora polaryzacji elektrycznej, określonego wzorem

$$P_i = D_i - \beta_0 E_i, \quad (11)$$

jeśli środowisko to wykazuje takie właściwości;  $\beta_0$  jest przenikalnością elektryczną próżni.

Dalsze rozwinięcie teorii piezoelektryczności może dotyczyć wprowadzenia oddziaływań (naprężeń) wyrażonych przez tensor Maxwella pola elektrycznego (a więc oddziaływań dielektrycznych), określonego wzorem

$$T_{Eij} = 0,5[E_i D_j + D_i E_j - \delta_{ij} (D_k E_k)], \quad (12)$$

którego dywergencja może stanowić dodatkowy składnik gęstości siły objętościowej w równaniu (6).

Stosując przyjmowane założenia upraszczające dotyczące braku ładunków i sił objętościowych, układ równań piezosprężystości dla przetworników elektromechanicznych silników — przyjmuje postać

$$\sigma_{ji,j} = \rho_m \ddot{u}_i \quad (13)$$

$$D_{i,i} = 0, \quad (14)$$

natomiast związki konstytutywne (7, 8) pozostają bez zmian.

Należy nadmienić, że tak jak standardowe maszyny elektryczne działają w oparciu o przemiany pola (elektro)magnetycznego i indukcji magnetycznej, tak silniki piezoelektryczne działają na podstawie indukcji elektrycznej.

Układ równań (13, 14) uzupełnia się warunkami brzegowymi. Z zasady warunki te określone są w naprężeniach, ponieważ silnik piezoelektryczny wymaga docisku wirnika do stojana w ruchu obrotowym lub bieźnika do wzbudnika w ruchu postępowym

$$p_i = \sigma_{ji}(\xi_k, t) n_j(\xi_k). \quad (15)^2$$

Dla pola elektrycznego warunki brzegowe mogą być zadane w reprezentacji potencjału elektrycznego  $V$  lub natężenia pola elektrycznego  $E_i$ , które określa się gradientem tego potencjału  $E_i = -V_{,i}$  ( $E = -\text{grad } V$ )

$$V_{,i}(\xi_b, t) = E_i(\xi_b, t), \quad (16)$$

$\xi_b$  jest współrzędną ustalonego układu współrzędnych parametryzującą powierzchnię brzegową.

Cechą różniącą działanie maszyn piezoelektrycznych od elektromagnetycznych (z wyjątkiem silników z toczącym się wirnikiem i elastycznym wirnikiem) jest kontakt (styk) bezpośredni lub pośredni (w formie pierścieni dystansowych umieszczonych między stojanem a wirnikiem) oraz sprzężenie naprężeniowe (docisk) między podukładem ruchomym i stojanowym. Natomiast cechą wspólną jest konieczność wzbudzenia pola elektrycznego wirującego  $[\omega t - \lambda \varphi]$  lub postępującego  $[\omega t - \lambda x]$ , co w reprezentacji składowej wektora natężenia elektrycznego dla dowolnej kinematyki o kierunku współrzędnej  $\xi$  można zapisać wzorem

$$E(\xi, t) = E_m(\xi) e^{j(\omega t - \lambda \xi)} \quad (17)$$

gdzie:  $\omega$  jest częstością pola,  $\lambda$  współczynnikiem falowym propagacji w kierunku zmiennej  $\xi$ ,  $j^2 = -1$ .

Należy w tym miejscu podkreślić, że ważnym zadaniem w efekcie działania silników piezoelektrycznych jest sprzężenie rezonansowe pod względem częstotliwości i rzędu falowego oddziaływań elektrycznych i sprężystych.

Uwzględniając związek konstytutywny dla indukcji elektrycznej i natężenia pola elektrycznego oraz wyrażając pole elektryczne przez potencjał i wykorzystując

<sup>2</sup>  $\langle \xi_k \rangle$  oznaczają współrzędne dowolnego układu współrzędnych związanego z częścią stojanową przetwornika. Odnosząc wskazane zmienne przestrzenne do układu parametryzującego przetwornik, przyjmuje się oznaczenia:  $\langle x, y, z \rangle$  dla liniowego,  $\langle r, \varphi, z \rangle$  dla cylindrycznego.

naprężeniowy związek konstytutywny piezosprężystości, a także zastępując tensor odkształceń przez przemieszczenia, równania piezoelektryczności mają postać

$$C_{ijkl} u_{k,lj} + e_{kij} V_{,kj} + f_i = \rho_m \ddot{u}_i$$

$$e_{ikl} u_{k,li} - \beta_{ik} V_{,ki} = 0$$
(18)

Układ równań (18) i warunki brzegowe mogą być zmodyfikowane w wyniku wprowadzenia wektora polaryzacji dielektrycznej (11) i tensora Maxwella pola elektrycznego (12), co jest rozszerzeniem opisu efektów elektropiezosprężystych. W analizach stanu pracy silników piezoelektrycznych rozważane są związki bez efektu polaryzacji.

Należy nadmienić, że w większości prac dotyczących silników piezoelektrycznych (ultrasonicznych) nie są *explicite* wypisywane ogólne równania pola elektrycznego i sprężystego tych przetworników, tylko określane są postulatycznie zastępcze schematy obwodowe.

Ostatecznie można uznać, że opis działania silnika piezoelektrycznego o dowolnej formie kinetycznej ujmują równania (18), stanowiące cztery równania dość silnie sprzężone. Ze względu na symetrię funkcji elastokinetycznych (naprężeń i odkształceń) oraz symetrię, według niektórych wskaźników, parametrów konstytutywnych: sprężystości, piezoelektryczności i przenikalności elektrycznej, można uprościć notację, zespalaając w jedno oznaczenie pary indeksów, względem których rozpatrywany tensor jest symetryczny. Zmniejszają się jednocześnie liczby stałych materiałowych w związkach konstytutywnych (6, 7) i równania przyjmują formę *syntetyczną*.

Dla naprężeń i odkształceń przyjmuje się odpowiednie oznaczenia,  $t_n \leftrightarrow \sigma_{ij}$   
 $d_n \leftrightarrow \varepsilon_{ij}$

$$t_n = \begin{cases} \sigma_{ij} & n = 1, 2, 3; i = j \\ \text{dla} & \\ \sigma_{ij} & n = 4, 5, 6; i \neq j \end{cases} \quad d_n = \begin{cases} \varepsilon_{ij} & n = 1, 2, 3; i = j \\ \text{dla} & \\ \varepsilon_{ij} & n = 4, 5, 6; i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

A zatem:  $t_1 = \sigma_{11}$ ,  $t_2 = \sigma_{22}$ ,  $t_3 = \sigma_{33}$ ,  $t_4 = \sigma_{23}$ ,  $t_5 = \sigma_{31}$ ,  $t_6 = \sigma_{12}$ ,

$$d_1 = \varepsilon_{11}$$
,  $d_2 = \varepsilon_{22}$ ,  $d_3 = \varepsilon_{33}$ ,  $d_4 = 2\varepsilon_{23}$ ,  $d_5 = 2\varepsilon_{31}$ ,  $d_6 = 2\varepsilon_{12}$

Dla parametrów konstytutywnych wprowadza się oznaczenia:  $C_{ijkl} \leftrightarrow c_{ik}$ ,  
 $e_{ikl} \leftrightarrow e_{im}$ ,  $\beta_{ij} \leftrightarrow \beta_{ji}$ .

Z zastosowanej notacji (Voigta) do zapisu naprężeń i odkształceń wynika, że wielkości te z indeksem o numeracji  $n = 1, 2, 3$  oznaczają wielkości główne — normalne, a z indeksem o numeracji  $n = 4, 5, 6$  są wielkościami stycznymi.

Równania stanu sprężystego i elektrycznego mają postać:

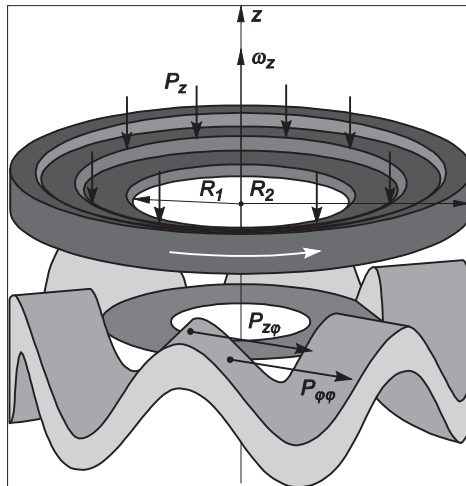
$$\begin{aligned} t_{1,1} + t_{6,2} + t_{5,3} &= \rho_m \ddot{u}_1 \\ t_{6,1} + t_{2,2} + t_{4,3} &= \rho_m \ddot{u}_2 \\ t_{5,1} + t_{4,2} + t_{3,3} &= \rho_m \ddot{u}_3 \\ D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3} = 0 \quad (21)$$

Są to cztery równania przemieszczeniowo-naprężeniowe i równanie dywergencji indukcji elektrycznej. Sprężenie tych równań następuje przez związki konstytutywne (9), (10). Układ (20, 21) można przyjąć jako równania wyjściowe do dalszego formułowania opisu silników piezoelektrycznych, chociaż biorąc pod uwagę jednokierunkową kinematykę silnika piezoelektrycznego, układ równań (20) można zredukować do dwu równań kinetycznych.

### 3. Poglądowy model silnika piezoelektrycznego

Efekty oddziaływań naprężeniowych w silnikach piezoelektrycznych można poglądowo zilustrować na przykładzie struktury silnika tarczowego (rys. 1). W silniku tarczowym elektrody polaryzacyjne wzbudzające fałę obrotową rozłożone są na obwodzie pierścienia statora i mają formę wycinków radialnych.



Rys. 1. Szkic modelowy i poglądowy silnika piezoelektrycznego tarczowego



Spolaryzowane pole elektryczne (indukcja elektryczna) generuje efekt piezoelektryczny i w jego następstwie wytworzone są główne siły w formie naprężeń powierzchniowych, określonych składowymi naprężeniami tensorowych o postaci

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \sigma_{\varphi\varphi} n_\varphi + \sigma_{z\varphi} n_z \\ p_z &= \sigma_{\varphi z} n_\varphi + \sigma_{zz} n_z \end{aligned} \quad (22)$$

Naprężenie powierzchniowe tangencjalne  $p_\varphi$  (styczne) stanowi o momencie obrotowym, a naprężenie aksjalne  $p_z$  (osiowe) o sile dociskowej. Ruch obrotowy jest wyznaczony przemieszczeniem aksjalnym  $u_\varphi$ , ale odkształcenia (przemieszczenia) następują również w kierunku osi obrotu  $z$ . Tak więc przyporządkowując indeksom numerycznym  $\langle 1, 2, 3 \rangle$  indeksy literowe odpowiadające cylindrycznemu układowi współrzędnych  $\langle r, \varphi, z \rangle$ , należy uwzględnić równanie drugie i trzecie układu (20).

#### 4. Podstawowe równania dla prostych form silników piezoelektrycznych

Formy konstrukcyjne silników piezoelektrycznych można tworzyć na podstawie konwencjonalnych silników elektrycznych działających w oparciu o prawo indukcji elektromagnetycznej określone równaniami Maxwella (1) i (2). Uniwersalnością silników konwencjonalnych jest realizowanie, w ich kinetyce, ruchu obrotowego, postępowego (liniowego) i ruchu o dwu stopniach swobody przez wirnik silnika z toczącym się wirnikiem. Bez trudu można konstruować silniki elektromagnetyczne o ruchu postępowo-obrotowym, a nawet silniki o trzech stopniach swobody. Na obecnym etapie wiedzy i technologii taka różnorodność konstrukcji w dziedzinie silników piezoelektrycznych nie jest jeszcze możliwa, a w celu upowszechnienia opisu *polowego* działania tych silników należy odnieść się do struktur najprostszych.

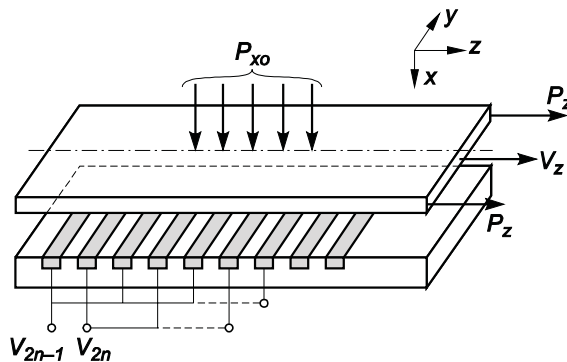
Proste strukturalnie są cztery konstrukcje silników piezoelektrycznych — dwie realizujące ruch postępowy (liniowy) i dwie o ruchu obrotowym. Silniki o ruchu postępowym mogą mieć strukturę płaską lub walcową — tubową o elektrodach wzbudzających, które położone są w płaszczyznach prostopadłych do kierunku ruchu. Silnikami piezoelektrycznymi o ruchu obrotowym jest silnik walcowy o elektrodach wzbudzających położonych na wewnętrznej powierzchni walcowej stojana oraz silnik tarczowy z radialnie skierowanymi elektrodami na obwodzie tarczy. Przez analogie do silników elektromagnetycznych można zauważyć możliwość sprzężenia tych ruchów w jednej konstrukcji, ale znacznie wzrosną trudności w ich opisie formalnym oraz pod względem konstrukcyjnym i technologicznym.

#### 4.1. Struktura konstrukcyjna oraz równania płaskiego i walcowego silnika o ruchu postępowym

Najprostsze pod względem strukturalnym są przetworniki liniowe realizujące ruch postępowy. W grupie tych przetworników można wyróżnić dwa rodzaje: o strukturze płaskiej i walcowej — tubowej. Piezoelektryczny silnik płaski i tubowy o ruchu postępowym mają najprostsze formy konstrukcyjne, ponieważ linie i płaszczyzny parametryczne układów współrzędnych (kartezjańskiego  $\langle x, y, z \rangle$  i cylindrycznego  $\langle r, \varphi, z \rangle$ ) parametryzujące te struktury pokrywają się z elementami konstrukcyjnymi tego typu silników.

W silniku płaskim oś współrzędnej  $x$  zorientowana jest prostopadłe do ruchu i płaszczyzn podukładów konstrukcyjnych — stojana i biegnika (elementu ruchomego). Oś  $y$  wyznacza miarę szerokości podukładów. Oś  $z$  skierowana jest w kierunku ruchu biegnika. Pole wzbudzające efekt piezoelektryczny zdeterminowane jest układem elektrod polaryzacyjnych  $V_k$  położonych wzdłuż szerokości konstrukcji z przemienną polaryzacją w kierunku ruchu.

Silnik tubowy utworzony jest przez transformację przetwornika płaskiego w wyniku sklejenia powierzchni brzegowych  $y = \text{const}$ . Pasma piezoelektryczne ( $V_k$ ) z formy prętowej (o strukturze prostokątnej — prostopadłościennej) przekształcają się w formę torusów okalających wewnętrzny walcowy bieżnik.



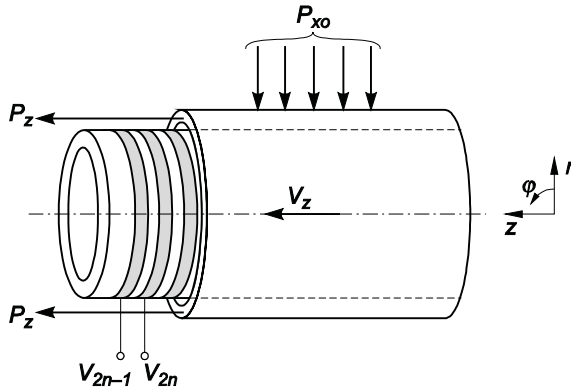
Rys. 2. Szkic przetwornika piezoelektrycznego płaskiego o ruchu postępowym

Dla wskazanych na rysunkach układów współrzędnych: prostokątnego  $\langle x, y, z \rangle$  i walcowego  $\langle r, \varphi, z \rangle$ , których współrzędne odpowiadają wskaźnikom numeracyjnym  $\langle 1, 2, 3 \rangle$ , można zapisać jednolite formy równań.

Podstawowym założeniem przy formułowaniu równań dla tych przetworników jest przyjęcie płaskiego pola przemieszczeń i pominięcie zależności funkcji pola od współrzędnej, której oś jest zorientowana ortogonalnie do kierunku fali przemieszczeń. Oznacza to pominięcie efektu brzegowego. Zaniedbuje się także

efekt krańcowy w tego typu silnikach, występujący wskutek otwartości wzdłużnej obwodu elektrosprężystego (w przeciwieństwie do silników o ruchu obrotowym).

Przy orientacji wprowadzonych układów współrzędnych można sformułować jednolite równania w notacji wskaźnikowej (numeracyjnej) dla obu typów silników. Zakłada się płaski stan naprężeń, a więc odpowiednio dla silnika płaskiego zmienne stanu nie zależą od współrzędnej  $y$ , a w silniku tubowym od współrzędnej tangencjalnej  $\varphi$ .



Rys. 3. Szkic przetwornika piezoelektrycznego tubowego o ruchu postępowym

Równania stanu sprężystego i elektrycznego mają postać:

$$\begin{aligned} t_{1,1} + t_{5,3} &= \rho_m \ddot{u}_1 \\ t_{5,1} + t_{3,3} &= \rho_m \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad (23)$$

$$D_{3,3} = 0 \quad (24)$$

Równania przemieszczeniowo-naprężeniowe i piezoelektryczne dla tych przetworników mają postać:

$$\begin{aligned} \rho_m \ddot{u}_3 &= c_{55} u_{3,11} + 2c_{35} u_{3,31} + c_{33} u_{3,33} + c_{15} u_{1,11} \\ &+ (c_{13} + c_{55}) u_{1,31} + c_{35} u_{1,33} - e_{35} E_{3,1} - e_{33} E_{3,3} \\ \rho_m \ddot{u}_1 &= c_{11} u_{1,11} + 2c_{15} u_{1,31} + c_{55} u_{1,33} + c_{15} u_{3,11} \\ &+ (c_{13} + c_{55}) u_{3,31} + c_{35} u_{3,33} - e_{31} E_{3,1} - e_{35} E_{3,3} \end{aligned} \quad (25)$$

$$D_{3,3} = e_{31} u_{1,13} + e_{35} (u_{1,33} + u_{3,13}) + e_{33} u_{3,33} + \beta_3 E_{3,3} = 0 \quad (26)$$

Należy zaznaczyć, że pierwsze równanie przemieszczeniowe odnosi się do wielkości kinematycznej wyróżnionego ruchu, czyli współrzędnej  $z \leftrightarrow 3$ , w układzie prostokątnym i walcowym. Drugie równanie dotyczy przemieszczenia w kierunku współrzędnej  $x$  układu prostokątnego i odpowiednio współrzędnej  $r$  układu walcowego.

Jednoskładowe pole elektryczne jest skierowane współliniowo do kierunku ruchu, a więc stanowi składową  $E_z$  ( $3 \leftrightarrow z$ ) dla przypadku przetwornika płaskiego i tubowego.

#### 4.2. Struktura konstrukcyjna oraz równania silnika cylindrycznego o ruchu obrotowym

Silnik cylindryczny ma typową strukturę przetwornika obrotowego (rys. 4). Zespoły elektrod stanowią tworzące na poboczniczy walcowej. Natężenie pola elektrycznego jest skierowane tangencjalnie, a przemieszczenia w strefie wirnika mają składową radialną i tangencjalną  $u_r$ ,  $u_\varphi$  i nie zależą od zmiennej osiowej  $z$ .

$$\begin{aligned} t_{1,1} + t_{6,2} &= \rho_m \ddot{u}_1 \\ t_{6,1} + t_{2,2} &= \rho_m \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (27)$$

$$D_{2,2} = 0 \quad (28)$$

Równania w notacji wskaźnikowej, ale odniesione do cylindrycznego układu współrzędnych mają postać:

— równania przemieszczeniowe

$$\begin{aligned} \rho_m \ddot{u}_\varphi &= c_{66} u_{\varphi,rr} + 2c_{26} u_{\varphi,\varphi r} + c_{22} u_{\varphi,\varphi\varphi} + c_{16} u_{r,rr} + \\ &+ (c_{12} + c_{66}) u_{r,r\varphi} + c_{26} u_{r,\varphi\varphi} - e_{26} E_{\varphi,r} - e_{22} E_{\varphi,\varphi} \end{aligned} \quad (29)$$

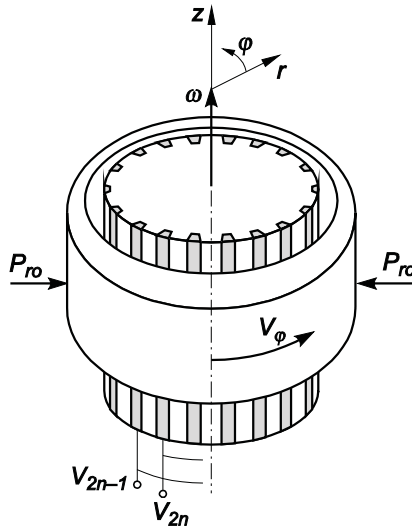
$$\begin{aligned} \rho_m \ddot{u}_r &= c_{11} u_{r,rr} + 2c_{16} u_{r,r\varphi} + c_{66} u_{r,\varphi\varphi} + c_{26} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \\ &+ (c_{12} + c_{66}) u_{\varphi,r\varphi} + c_{16} u_{\varphi,rr} - e_{21} E_{\varphi,r} - e_{26} E_{\varphi,\varphi} \end{aligned}$$

— równanie piezoelektryczne

$$D_{\varphi,\varphi} = e_{21} u_{r,r\varphi} + e_{22} u_{\varphi,\varphi\varphi} + e_{26} (u_{r,\varphi\varphi} + u_{\varphi,r\varphi}) + \beta_2 E_{\varphi,\varphi} = 0 \quad (30)$$

Pomimo zastosowania alfabetycznych wskaźników przy symbolach wielkości polowych, pozostawiono wskaźniki numeryczne w indeksowaniu parametrów konstytutywnych w celu ułatwienia odniesienia tych wielkości do ich zapisu macierzowego.

Silnik o przedstawionej strukturze można uznać za konstrukcję standardową. Może być jednak łatwo zmodyfikowany przez zmianę struktury elektrod, czyli zmianę kierunku polaryzacji pola elektrycznego.



Rys. 4. Szkic przetwornika piezoelektrycznego cylindrycznego o ruchu obrotowym

#### 4.3. Struktura konstrukcyjna oraz równania silnika tarczowego

Przetwornik tarczowy cechuje się dwuskładowym polem przemieszczeń w strefie wirnika — tangencjalnym i osiowym oraz tangencjalnym polem elektrycznym. Zgodnie z przyjętymi założeniami rozważa się dla tego przetwornika przemieszczenia tangencjalne i aksjalne  $u_\varphi$ ,  $u_z$ . W celu uproszczenia form równań przemieszczeniowych dla tego silnika przyjmuje się jednakowy rozkład przemieszczeń na szerokości tarczy w kierunku radialnym, czyli niezależność funkcji elastokinetycznych od zmiennej radialnej. Wielkości te są więc funkcjami tylko zmiennej  $z$  i  $\varphi$ .

Równania przemieszczeniowe i elektryczne mają postać:

$$\begin{aligned} t_{2,2} + t_{4,3} &= \rho_m \ddot{u}_2 \\ t_{4,2} + t_{3,3} &= \rho_m \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad (31)$$

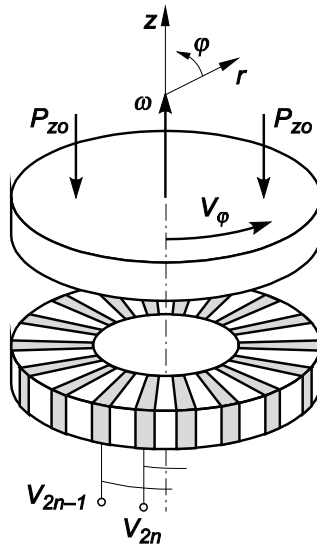
$$D_{2,2} = 0 \quad (32)$$

Uwzględniając zależności na tensory naprężeń (w związkach konstytutywnych) i na odkształcenia oraz wyrażając wielkości elektryczne przez potencjał, można równania elektropiezonaprężeniowe w reprezentacji przemieszczeń i potencjału elektrycznego zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \rho_m \ddot{u}_\varphi &= c_{44} u_{\varphi,zz} + 2c_{24} u_{\varphi,\varphi z} + c_{22} u_{\varphi,\varphi\varphi} + c_{34} u_{z,zz} + \\ &+ (c_{23} + c_{44}) u_{z,\varphi z} + c_{24} u_{z,\varphi\varphi} - e_{24} E_{\varphi,z} - e_{22} E_{\varphi,\varphi} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \rho_m \ddot{u}_z &= c_{33} u_{z,zz} + 2c_{34} u_{z,z\varphi} + c_{44} u_{z,\varphi\varphi} + c_{34} u_{\varphi,zz} + \\ &+ (c_{23} + c_{44}) u_{\varphi,\varphi z} + c_{24} u_{\varphi,\varphi\varphi} - e_{23} E_{\varphi,z} - e_{24} E_{\varphi,\varphi} \end{aligned}$$

$$D_{\varphi,\varphi} = e_{23} u_{z,z\varphi} + e_{24} (u_{\varphi,z\varphi} + u_{z,\varphi\varphi}) + e_{22} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \beta_2 E_{\varphi,\varphi} = 0 \quad (34)$$



Rys. 5. Szkic przetwornika piezoelektrycznego tarczowego o ruchu obrotowym

Przedstawione równania przemieszczeniowo-piezoelektryczne dla określonych prostych przetworników elektromechanicznych są złożone i silnie sprzężone, co praktycznie uniemożliwia ich bezpośrednie analityczne rozwiązanie. Należy jednak zauważyć, że podstawowa złożoność odnosi się do zależności funkcji przemieszczeń od współrzędnej normalnej do kierunku ruchu. W dalszej analizie równań przyjmuje się harmoniczną zmienność funkcji pola od czasu i współrzędnej wyznaczającej kierunek kinematyczny części ruchomej silnika.

## 5. Równania elektropiezosprężystości silników z uwzględnieniem funkcji pól o formach przemieszczających

W ogólnej postaci pole elektryczne i elastokinetyczne przemieszczające się (postępujące lub wirujące) można, dla pierwszej harmonicznej, przedstawić w postaci

$$P = P_m \exp j(\lambda \xi - \omega t) \quad (35)$$

gdzie:  $\xi$  oznacza współrzędną przestrzenną, w kierunku której propaguje się fala ( $\xi \leftrightarrow z$ ,  $\xi \leftrightarrow \varphi$ ),  $\lambda$  — liczba falowa propagacji fali zdeterminowana rozkładem elektrod,  $\omega$  — częstość propagacji fali.

Wskazana postać pól dla określonej formy argumentu przestrzenno-czasowego odnosi się do pola: elektrycznego, naprężeń i przemieszczeń —  $P \leftrightarrow \{E, u, \sigma\}$ . W przetwornikach o ruchu postępowym, zgodnie z przyjętym układem współrzędnych, współrzędną  $\xi$  utożsamia się ze współrzędną  $z$  —  $\xi \equiv z$ , a dla przetworników o ruchu obrotowym przyjmuje się tożsamość  $\xi \equiv \varphi$ .

Korzystając z argumentu przestrzenno-czasowego funkcji pola, równania przemieszczeniowe i elektryczne przekształca się do form zależnych od zmiennej ortogonalnej do kierunku ruchu bieźnika lub wirnika.

### 5.1. Równania przemieszczeniowo-potencjałowe silników o ruchu postępowym

Równania przemieszczeniowo-potencjałowe przetworników o ruchu postępowym, po zastosowaniu funkcji falowej (35) i zależności (16), mają postać:

$$\begin{aligned} c_{55}u_{z,11} + 2j\lambda c_{35}u_{z,1} + (\rho_m \omega^2 - \lambda^2 c_{33})u_z + c_{15}u_{1,11} + \\ j\lambda(c_{13} + c_{55})u_{1,1} - \lambda^2 c_{35}u_1 - j\lambda e_{35}V_{,1} + \lambda^2 e_{33}V = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} c_{11}u_{1,11} + 2j\lambda c_{15}u_{1,1} + (\rho_m \omega^2 - \lambda^2 c_{55})u_1 + c_{15}u_{z,11} + \\ j\lambda(c_{13} + c_{55})u_{z,1} - \lambda^2 c_{35}u_z - j\lambda e_{31}V_{,1} + \lambda^2 e_{35}V = 0 \end{aligned}$$

$$j\lambda e_{35}u_{z,1} - \lambda^2 e_{33}u_z + j\lambda e_{31}u_{1,1} - \lambda^2 e_{35}u_1 - \lambda^2 \beta_3 V = 0 \quad (37)$$

Dla silnika płaskiego wskaźnikowi 1 odpowiada współrzędna  $x$ . W przypadku silnika tubowego wskaźnikowi 1 odpowiada współrzędna  $r$ .

### 5.2. Równania przemieszczeniowo-potencjałowe silnika cylindrycznego o ruchu obrotowym

Analogiczne równania przemieszczeniowe i piezoelektryczne dla silnika cylindrycznego o ruchu obrotowym, po zastosowaniu funkcji falowej, przybierają postać:

$$\begin{aligned}
 & c_{66}u_{\varphi,rr} + 2j\lambda c_{26}u_{\varphi,r} + (\rho_m \omega^2 - \lambda^2 c_{22})u_{\varphi} + c_{16}u_{r,rr} + \\
 & + j\lambda(c_{12} + c_{66})u_{r,r} - \lambda^2 c_{26}u_r - j\lambda e_{12}V_{,r} + \lambda^2 e_{16}V = 0 \\
 & c_{11}u_{r,rr} + 2j\lambda c_{16}u_{r,r} + (\rho_m \omega^2 - \lambda^2 c_{66})u_r + c_{16}u_{\varphi,rr} + \\
 & + j\lambda(c_{12} + c_{66})u_{\varphi,r} - \lambda^2 c_{26}u_{\varphi} - j\lambda e_{21}V_{,r} + \lambda^2 e_{26}V = 0
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$j\lambda e_{26}u_{\varphi,r} - \lambda^2 e_{22}u_{\varphi} + j\lambda e_{21}u_{r,r} - \lambda^2 e_{26}u_r - \lambda^2 \beta_2 V = 0 \tag{39}$$

### 5.3. Równania przemieszczeniowo-potencjałowe silnika tarczowego

Analogiczne równania dla silnika tarczowego przybierają postać:

$$\begin{aligned}
 & c_{44}u_{\varphi,zz} + 2j\lambda c_{24}u_{\varphi,z} + (\rho_m \omega^2 - \lambda^2 c_{22})u_{\varphi} + c_{34}u_{z,zz} + \\
 & + j\lambda(c_{23} + c_{44})u_{z,z} - \lambda^2 c_{24}u_z - j\lambda e_{24}V_{,z} + \lambda^2 e_{22}V = 0
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 & c_{33}u_{z,zz} + 2j\lambda c_{34}u_{z,z} + (\rho_m \omega^2 - \lambda^2 c_{44})u_z + c_{34}u_{\varphi,zz} + \\
 & + j\lambda(c_{23} + c_{44})u_{\varphi,z} - \lambda^2 c_{24}u_{\varphi} - j\lambda e_{23}V_{,z} + \lambda^2 e_{24}V = 0 \\
 & j\lambda e_{24}u_{\varphi,z} - \lambda^2 e_{22}u_{\varphi} + j\lambda e_{23}u_{z,z} - \lambda^2 e_{24}u_z - \lambda^2 \beta_2 V = 0
 \end{aligned} \tag{41}$$

W zakończeniu prezentowanych rozważań i równań przemieszczeniowo-piezoelektrycznych należy nadmienić, że połączenie równań (36, 37) odniesionych do silnika tubowego z równaniami (38, 39) stanowi podstawę równań silnika o ruchu liniowo-obrotowym. Wymaga to jednak wprowadzenia potencjału elektrycznego reprezentującego, w wymiarze natężenia pola elektrycznego, funkcję o argumentie ujmującym pole wirująco-postępujące

$$E(t, \varphi, z) = E_m \exp j(\omega t - \lambda_{\varphi} \varphi - \lambda_z z) \tag{42}$$

którego następstwem jest objętościowa fala piezoelektryczna, co niewątpliwie podnosi poziom trudności przedstawionych zagadnień.



## 6. Wnioski i uwagi końcowe

Przedstawione równania naprężeniowo-przemieszczeniowe i elektryczne (36-41) sformułowane na podstawie teorii elektropiezospężystości są podstawą do opisu, na gruncie teorii polowej, działania silników piezoelektrycznych. Sformułowane równania przystosowano do czterech struktur silników o kinematyce postępowej i obrotowej. Pomimo odmiennej struktury konstrukcyjnej w określonych klasach kinematyki — postępowej i obrotowej przedstawione równania charakteryzują się podobieństwem związków naprężeniowych i elektrycznych. Uproszczenie ogólnych równań przeprowadzono, wprowadzając funkcje fali przemieszczającej się o argumentie przestrzenno-czasowym, co jest warunkiem podstawowym działania tego typu silników. W wyznaczonych równaniach pozostawiono ogólne współzależności z parametrami konstytutywnymi. Kolejnym etapem porządkowania równań elektropiezoprzemieszczeniowych dla określonych typów przetworników jest przeanalizowanie parametrów konstytutywnych, w szczególności składowych tensora piezoelektrycznego  $e_{ijk}$ . Macierz tych parametrów zawiera wartości zerowe dla materiałów o różnych osiach i płaszczyznach symetrii, co niewątpliwie uprości (zredukuje) składniki równań. Interesujące jest również rozpatrzenie materiałów prostych w rodzaju izotropowych i centrosymetrycznych wykazujących efekt piezoelektryczności. Należy w tym miejscu nadmienić, że konstituowane są materiały piezoelektryczne o strukturze organicznej.

Odnośnie do związków materiałowych dotyczących właściwości sprężystych, można przyjąć wstępnie struktury ortotropowe. Również uzasadnione jest przyjęcie struktury ortotropowej w odniesieniu do własności dielektrycznych.

W kolejnych analizach modeli silników piezoelektrycznych można rozpatrywać odmienną polaryzację elektrod piezoelektrycznych, czyli ortogonalną do kierunku ruchu polaryzację pola elektrycznego, co stosunkowo łatwo można dokonać na podstawie wyprowadzonych równań.

Bazując na sformułowanych zależnościach można również uogólnić przedstawione równania dla silników o ruchu złożonym, nawet o trzech stopniach swobody.

Należy podkreślić, że polowy opis silników piezoelektrycznych jest podstawą do wyprowadzenia modeli obwodowych (modeli o parametrach skupionych) tych przetworników, które obecnie są formułowane, zdaniem autora, w sposób *intuicyjny*, bez gruntowego usankcjonowania formalnego.

W zakończeniu należy zwrócić uwagę na dwa kierunki badań, na które w małym stopniu wskazuje się w dotychczasowych publikacjach. Bardzo ważnym zagadnieniem jest wyznaczenie częstotliwości i postaci drgań własnych elementów kinematycznych, co łączy się z prędkością przemieszczania się pola elektrycznego. Jest to silnie związane z parametrami konstytutywnymi i oczywiście strukturą tych elementów. Drugim ważnym zagadnieniem jest forma i rozkład elektrod oraz dobór parametrów

generatorów sygnałów — źródeł — zasilających obwody wzbudzające silników, co niewątpliwie należy do ich oprząrdowania.

Źródło finansowania pracy — środki własne autora.

Artykuł wpłynął do redakcji 20.04.2018 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 8.11.2018 r.

#### LITERATURA

- [1] WILLIAMS A., BROWN W., *Piezoelectric Motor Patent*, No 2439499, USA 1948.
- [2] LAWRENKO W.W., KARTASZIEW I.A., WISZNIEWSKI W.S., *Piezoelektriczeskije dwigateli*, Energija, Moskwa, 1980.
- [3] MINDLIN R.D., *On the equation of motion piezoelectric crystals*, Problem of Continuum Mechanics, SIAM Philadelphia, Pensylwania, 1961.
- [4] TOUPIN R.A., *The elastic dielectrics*, J. Rat. Mech. Anal. 5, 849, 1956.
- [5] TOUPIN R.A., *A dynamical theory of elastic dielectrics*, Int. J. Engn. Sci. 1, 101, 1963.
- [6] UEHA S., TOMIKAWA M., KUROSAWA M., NAKAMURA N., *Ultrasonic Motors. Theory and Application*, Clarendon Press, Oxford 1993.
- [7] SASHIDA T., KENJO T., *An introduction to ultrasonic motors*, Clarendon Press, Oxford 1993.
- [8] VOIGT W., *Lehrbuch der Kristall-physik*, Taubner, Leiptzig 1910.
- [9] NOWACKI W., *Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych*, PWN, Warszawa 1983.
- [10] DĄBROWSKI M., *Evolution of the theory and application of ultrasonic motors*, Prace Instytutu Elektrotechniki, 208, 2001.
- [11] HAO M., CHEN W., *Analysis and Design of a Ring-type Traveling Ultrasonic Motor*, Proceeding of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Luoyang China.
- [12] TING Y., TSAI Y., HOU B.-K., LIN S.-C., LU C.-C., *Stator Design of a New Type of Spherical Piezoelectric Motor*, IEEE Transaction on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, vol. 57, no. 10, 2010.
- [13] RYNDZIONEK R., ROUCHON J-F., RONKOWSKI M., *Koncepcja realizacji i analiza nowego typu silnika piezoelektrycznego o strukturze wielokomórkowej*, Zeszyty BOBRME Komel, nr 100, 4/2013.
- [14] PRZYBOROWSKI W., *Równania elektropiezospężystości tarczowego silnika piezoelektrycznego*, Przegląd Elektrotechniczny nr 100, 2/2017.
- [15] NEY J.F., *Własności fizyczne kryształów*, PWN, Warszawa 1962.
- [16] HEYWANG W., LUBITZ K., WERSING W., *Piezoelectricity, Evolution and Future of a Technology*, Springer, 1995.
- [17] PRZYBOROWSKI W., *Podstawy teorii elektropiezomechanicznych przetworników — silników piezoelektrycznych*, Zeszyty BOBRME Komel nr 100, 4/2017.

W. PRZYBOROWSKI

**Basics of the electropiezoelectricity theory of piezoelectric motors  
with linear and rotary motion**

**Abstract.** The paper presents the basics of the theory of electropiezoelectricity and adaptation of this theory to description of the simplest electromechanical converters — piezoelectric type electric motors. Because piezoelectricity and elasticity are coupled by complex piezoelectricity constitutive compounds, the formulation of a general mathematical model for these motors is not possible. Therefore, equations for structurally simple piezoelectric motors with linear and rotational motion have been formulated in the paper. Motors with linear movement are characterized by a flat or tube form. Rotary motors, on the other hand, have a cylindrical or disc-shaped form.

The electric field, in the adopted forms of piezoelectric motors generating a piezoelectric effect, is a single-field perpendicular to the direction of motion.

The determined equations could be simplified by reduction of some constitutive parameters, but it requires a detailed analysis of material compounds and consideration in the interactions of forces and torques in these motors, also strong piezoelectric stresses, which determine a specific kinetics.

**Keywords:** piezoelectric motors with translational and rotary motion, equations of electric-piezoelectricity

**DOI:** 10.5604/01.3001.0012.8504

