POZNAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY ACADEMIC JOURNALS
No 73 Electrical Engineering 2013

Jan PURCZYŃSKI*

APROKSYMACJA QUASIJEDNOSTAJNA

W pracy wykorzystano metodę aproksymacji średniokwadratowej wielomianowej, przy czym jako kryterium przyjęto wielkość błędu maksymalnego uzyskanego przybliżenia – stąd proponowana nazwa metody „aproksymacja quasijednostajna". Wartość tego błędu zależy od liczby punktów aproksymacji w przedziale. Zmieniając liczbę punktów aproksymacji stwierdza się, że wartość błędu maksymalnego posiada minimum dla określonej wartości L liczby uwzględnionych punktów. Dla wielomianu stopnia N wyznacza się optymalną liczbę równoodległych punktów aproksymacji L oraz maksymalny błąd aproksymacji. Proponowana metoda została porównana z metodą aproksymacji jednostajnej, jaką są wielomiany Czebyszewa. Na rozpatrzonych przykładach wykazano, że metoda „aproksymacji quasijednostajnej" prowadzi do mniejszych wartości błędu maksymalnego, niż wielomiany Czebyszewa.

1. IDEA METODY

Zakłada się, że dany jest ciąg punktów $x_0, x_1, ..., x_L$ oraz wartości funkcji *f(x)* w tych punktach:

$$f_i = f\left(x_i\right) \; ; \; i = 0,1,...,L \tag{1}$$

Wykorzystana zostanie aproksymacja wielomianowa:

$$fa(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j \tag{2}$$

W wyniku zastąpienia funkcji f(x) funkcją aproksymującą *fa(x)* popełnia się błąd :

$$\varepsilon_i = fa(x_i) - f_i \tag{3}$$

Aproksymacja średniokwadratowa oznacza minimalizację następującego wyrażenia:

$$\sum_{i=0}^{L} {\varepsilon_i}^2 = \min \tag{4}$$

Korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych, ze wzorów (1), (2), (3), (4), otrzymuje się układ równań:

* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

$$\sum_{j=0}^{N} c_{jk} a_j = b_k \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,N \tag{5}$$

gdzie: $c_{jk} = \sum_{i=0}^{L} x_i^{\,j+k} \quad ; \quad b_k = \sum_{i=0}^{L} x_i^{\,k} f_i$

Rozwiązanie układu równań (5) w postaci macierzowej wyraża się wzorem:

$$A = C^{-1} B \tag{6}$$

gdzie $A = \lfloor a_j \rfloor$ - poszukiwany wektor współczynników wielomianu fa(x) (wzór (2)) $C = \lfloor c_{jk} \rfloor$; $B = [b_k]$.

W przypadku, gdy liczba punktów x_i jest większa od stopnia wielomianu N ($L > N$) mamy do czynienia z aproksymacją. Natomiast, dla $L = N$ występuje zagadnienie interpolacji. Podane powyżej wzory są słuszne zarówno dla aproksymacji jak i dla interpolacji.

Oprócz aproksymacji średniokwadratowej (wzór (4)) wyróżnia się aproksymację jednostajną wyrażającą się warunkiem:

$$\max_{0 \le i \le L} |\varepsilon_i| = \min \tag{7}$$

gdzie ε_i wyraża się wzorem (3).

Zgodnie ze wzorem (7) zadanie polega na minimalizacji maksymalnej wartości błędu w rozpatrywanym przedziale. Spośród metod stosowanych w aproksymacji jednostajnej wyróżnia się, m.in. algoytm Remeza [2, 3], przybliżenia Padego, szeregi Maclaurina oraz wielomiany Czebyszewa.[1, 3].

W niniejszej pracy ograniczono się do wielomianów Czebyszewa. Rozpatruje się zdanie interpolacji (L = N), przy czym węzły interpolacji spełniają warunek:

$$x_i = \cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{2(N+1)}\right] \qquad \text{gdzie: } i = 0,1,\ldots,N \tag{8}$$

tzn. są miejscami zerowymi wielomianu Czebyszewa. Rozwiązanie nadal wyraża się wzorem (6).

W niniejszej pracy proponowana jest metoda wykorzystująca fakt, że błąd maksymalny rozwiązania uzyskanego metodą aproksymacji średniokwadratowej silnie zależy od uwzględnionej liczby punktów *L+1.* Przy założonym stopniu wielomianu N zmienia się liczbę L i wyznacza wartość błędu maksymalnego. Dla określonej wartości optymalnej L_o, zapewniającej minimum błędu maksymalnego, wyznacza się wartości współczynników a_j wielomianu (2). Metoda bazuje na wzorach (5) i (6) odnoszących się do aproksymacji średniokwadratowej, natomiast odnosi się do minimalizacji błędu maksymalnego, w związku z czym proponuje się nazwę „aproksymacja quasijednostajna”. Wyniki proponowanej metody zostaną porównane z rezultatami uzyskanymi dla wielomianów Czebyszewa.

2. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

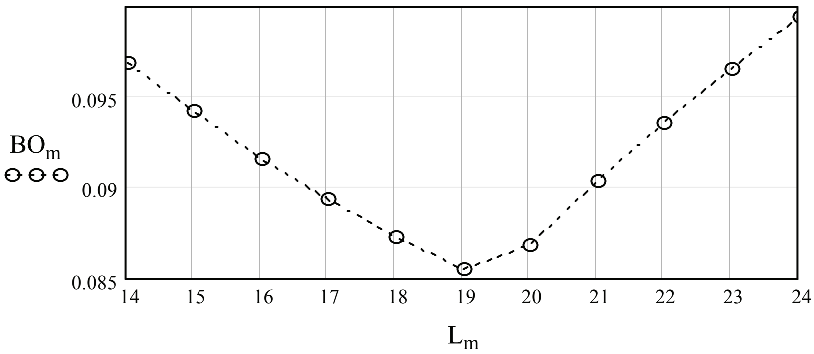
Ze względu na stosowanie wielomianów Czebyszewa zakłada się przedział zmienności

$$x \in \langle -1,1 \rangle \tag{9}$$

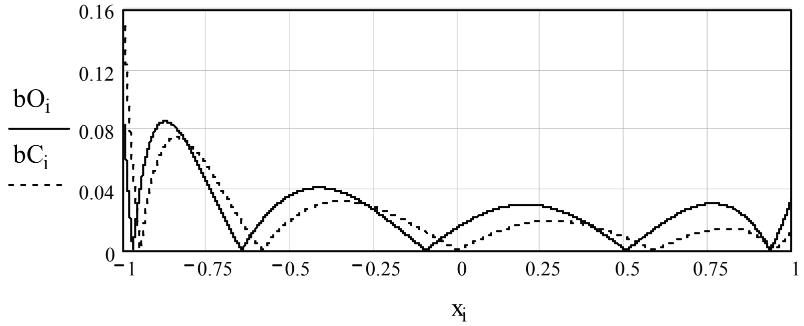
Funkcja *f(x)* wyraża się wzorem:

$$f(x) = \ln(x + 1{,}1) \tag{10}$$

Zgodnie z opisem metody (p.I) wyznaczono wartości błędu maksymalnego w zależności od liczby punktów aproksymacji L. Na rysunku 1 przedstawiono zależność błędu BO od liczby uwzględnionych punktów dla wielomianu czwartego stopnia. Błąd ten przyjmuje wartość minimalną dla L = 19.



Rys. 1. Wartości błędu maksymalnego BO w funkcji liczby uwzględnionych punktów aproksymacji L dla wielomianu czwartego stopnia

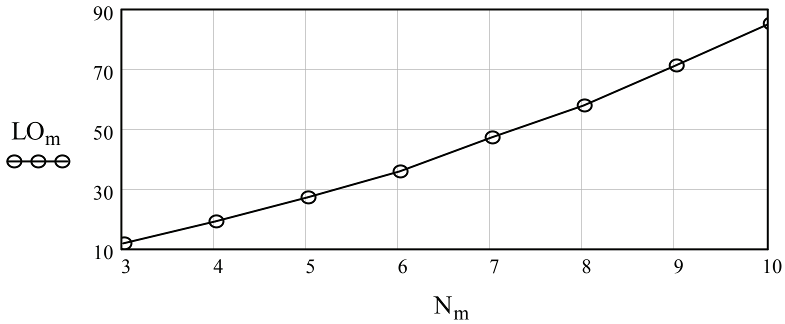


Rys. 2. Wartości modułu błędu dla wielomianu stopnia czwartego. Linia kropkowana bC odpowiada wielomianowi Czebyszewa, natomiast linia ciągła bO określa błąd wielomianu optymalnego

Na rysunku 2. przedstawiono wartości modułu błędu dla wielomianu stopnia czwartego. Linia kropkowana bC odpowiada wielomianowi Czebyszewa, natomiast linia ciągła bO określa błąd wielomianu optymalnego. Błąd maksymalny występuje dla *x* = *-1* i wynosi 0,149 dla wielomianu Czebyszewa oraz 0,083 dla proponowanej metody.

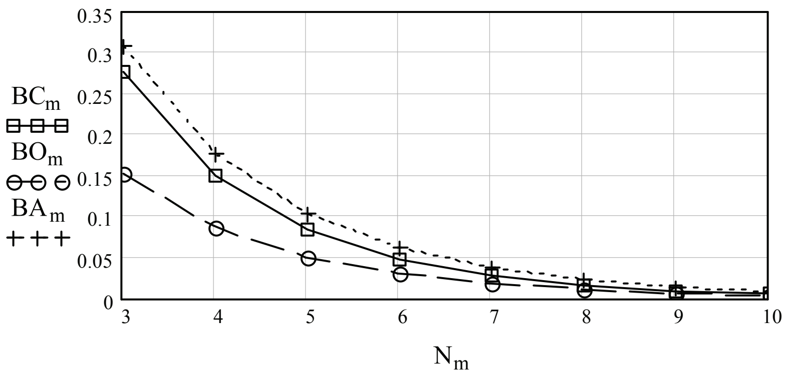
Rysunek 3 ilustruje zależność liczby optymalnych punktów LO od stopnia wielomianu N.

Na rysunku 4 zamieszczono wartości błędu maksymalnego dla poszczególnych metod: BC- wielomiany Czebyszewa (linia ciągła z prostokątami) ,BO- wielomian optymalny (linia przerywana z kółkami), BA- aproksymacja średniokwadratowa (linia kropkowana).



Rys. 3. Zależność liczby optymalnych punktów LO od stopnia wielomianu N

Błąd BA odnosi się do klasycznej aproksymacji średniokwadratowej wykonanej dla L = 5000 punktów, co odpowiada w przybliżeniu aproksymacji wykonanej dla funkcji ciągłej.

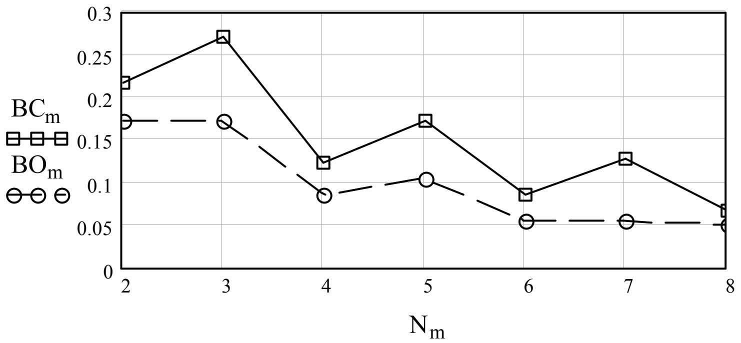


Rys. 4. Wartości błędu maksymalnego dla poszczególnych metod: BC- wielomiany Czebyszewa (linia ciągła z prostokątami), BO- wielomian optymalny (linia przerywana z kółkami), BA- aproksymacja średniokwadratowa (linia kropkowana)

Z rysunku 4 wynika największy błąd dla klasycznej metody aproksymacji średniokwadratowej. Proponowana metoda wielomianu optymalnego prowadzi do wartości błędu BO mniejszego niż błąd BC metody wielomianów Czebyszewa. Jako kolejny przykład rozpatrzono funkcję:

$$f(x) = 1 - |x| \quad \text{dla} \quad x \in \langle -1,1 \rangle \tag{11}$$

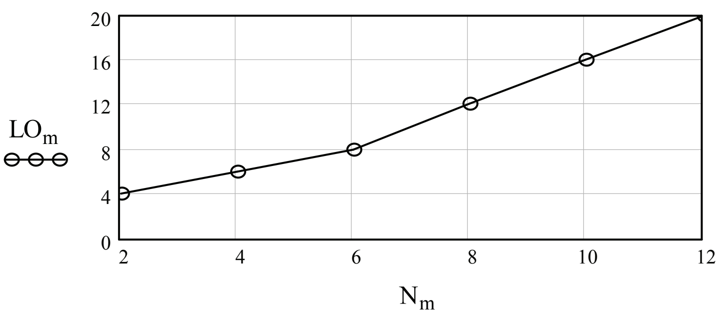
Rysunek 5 ilustruje wartości błędu maksymalnego uzyskanego dla wielomianów Czebyszewa BC- linia ciągła z prostokątami) oraz dla wielomianu optymalnego (linia przerywana z kółkami).



Rys. 5. Wartości błędu maksymalnego: BC- wielomian Czebyszewa (linia ciągła z prostokątami), BO- wielomian optymalny (linia przerywana z kółkami)

Na podstawie rysunku 5 stwierdza się, że wielomian stopnia parzystego zapewnia mniejszy błąd niż wielomian stopnia nieparzystego – szczególnie widoczne dla błędu BC. Wynika to z faktu, że funkcja opisana wzorem (11) jest funkcją parzystą, co powinno się uwzględnić w stopniu wielomianu N. W związku z powyższym ograniczono się do przypadku, gdy N przyjmuje wartości parzyste.

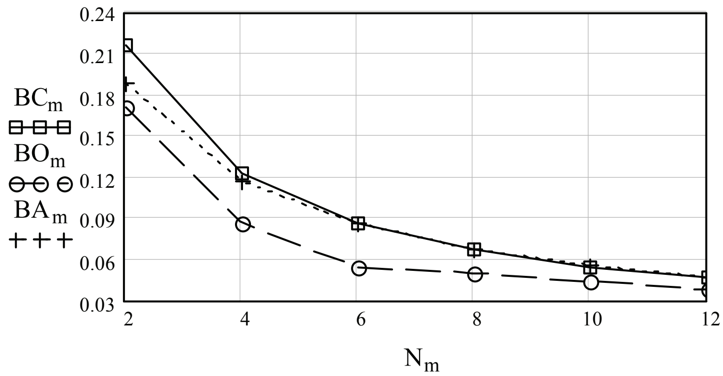
Na rysunku 6 zamieszczono zależność liczby optymalnych punktów LO od stopnia wielomianu N.



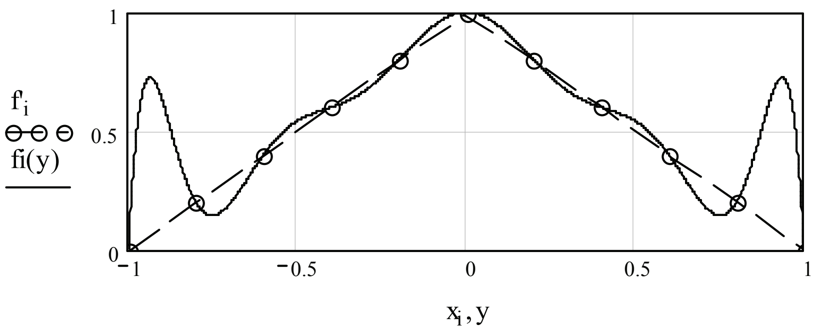
Rys. 6. Zależność liczby optymalnych punktów LO od stopnia wielomianu N

Na rysunku 7 zamieszczono wartości błędu maksymalnego dla poszczególnych metod: BC- wielomiany Czebyszewa (linia ciągła z prostokątami),BO- wielomian optymalny (linia przerywana z kółkami), BA- aproksymacja średniokwadratowa (linia kropkowana). Błąd BA odnosi się do klasycznej aproksymacji średniokwadratowej wykonanej dla L = 5000 punktów.

Na podstawie rysunku 7 stwierdza się zbliżone wartości błędu maksymalnego dla aproksymacji średniokwadratowej oraz wielomianów Czebyszewa. Najmniejszym błędem maksymalnym obarczone są wyniki proponowanej metody.



Rys. 7. Wartości błędu maksymalnego dla poszczególnych metod: BC- wielomian Czebyszewa (linia ciągła z prostokątami), BO- wielomian optymalny (linia przerywana z kółkami), BA- aproksymacja średniokwadratowa (linia kropkowana)

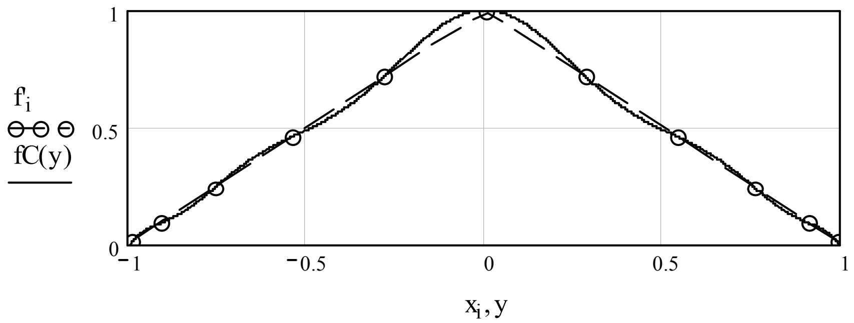


Rys. 8. f_i' -funkcja (11) (linia przerywana z kółkami); fi(y)- wynik interpolacji (linia ciągła)

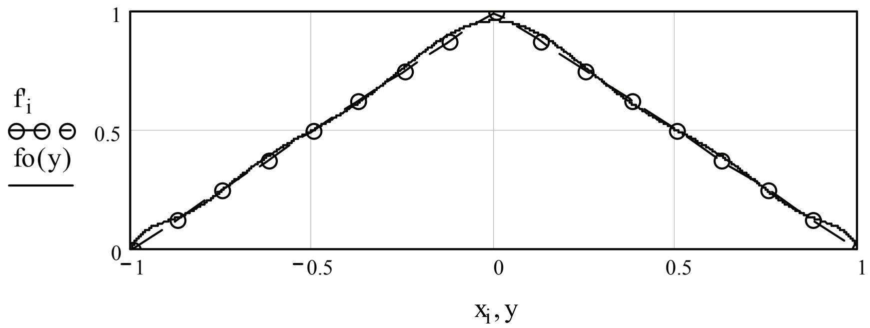
W przypadku stosowania metody interpolacji (wzory (5) i (6); L = N) dla funkcji (11) obserwuje się tzw. zjawisko Rungego [1] zilustrowane na rysunku 8, wykonanym dla L = N = 10. Obserwuje się bardzo duże błędy na końcach przedziału interpolacji.

Jedną z metod eliminacji zjawiska Rungego jest stosowanie wielomianów Czebyszewa, co zostało zilustrowane na rysunku 9. Nierównomierne rozmieszczenie węzłów interpolacji (wzór (8)) zdecydowanie ograniczyło oscylacje występujące na końcach przedziału

Na rysunku 10 przedstawiono rezultat zastosowania wielomianu optymalnego dla L=16, które również prowadzi do eliminacji zjawiska Rungego.



Rys. 9. f_i' -funkcja (11) (linia przerywana z kółkami); fC(y) - wynik interpolacji wielomianami Czebyszewa (linia ciągła)



Rys. 10. f_i' -funkcja (11) (linia przerywana z kółkami); fo(y) - wynik stosowania wielomianu optymalnego (linia ciągła)

3. PODSUMOWANIE

W pracy wykorzystano metodę aproksymacji średniokwadratowej wielomianowej, przy czym jako kryterium przyjęto wielkość błędu maksymalnego uzyskanego przybliżenia. Zmieniając liczbę punktów aproksymacji znajdowano wartość optymalną LO, dla której występuje minimum wartości błędu maksymalnego. Dla obydwu rozpatrzonych przykładów stwierdzono (Rys. 4 oraz

Rys.5 i Rys.7), że metoda aproksymacji „quasijednostajnej" prowadzi do mniejszych wartości błędu maksymalnego, niż metoda wykorzystująca wielomiany Czebyszewa.

Autor przetestował proponowaną metodę na szeregu przykładach, m.in., na następujących funkcjach:

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad ; \quad f(x) = arctg(4x) \tag{12}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad ; \quad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \tag{13}$$

określonych na przedziale $x \in \langle -1,1 \rangle$.

Dla funkcji opisanych wzorami (12) i (13), proponowana metoda prowadziła do błędu maksymalnego mniejszego, niż metoda wielomianów Czebyszewa. Należy zauważyć, że stosując metodę interpolacji do funkcji opisanych wzorem (12) obserwuje się zjawisko Rungego. Zastosowanie wielomianów Czebyszewa, a także proponowanej metody, eliminuje powyższe zjawisko.

LITERATURA

[1] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J, Metody numeryczne, Warszawa, WNT 1993.
[2] Jankowscy J. i M., Przegląd metod i algorytmów numerycznych Cz.1, Warszawa, WNT 1981.
[3] Ralston A. R., Wstęp do analizy numerycznej, Warszawa, PWN 1983.

QUASI-UNIFORM APPROXIMATION

In the paper the polynomial mean-square approximation method was applied, where the applied criterion was the value of the maximum error of the obtained approximation - hence the proposed name for this method – 'quasi-uniform approximation'. The value of this error depends on the number of approximation points within the range. By changing the number of points within the range, it can be noticed that the value of the maximum error has the minimum value for a particular value of L number of considered points. For a polynomial of N degree, the optimum number of equidistant points of approximation L and the maximum error of approximation are determined. The proposed method was compared with a uniform approximation method, namely the Chebyshev polynomial. The examples included in the paper show that the 'quasi-uniform approximation' method yields smaller values of the maximum error than Chebyshev polynomials.