

**BŁAŻEJEWSKI Andrzej**

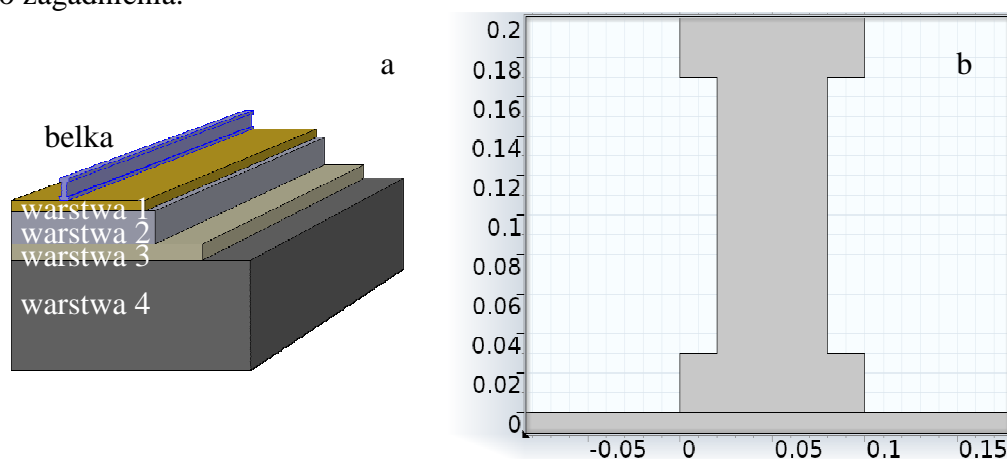
## OPTYMALIZACJA PODŁOŻA WIELOWARSTWOWEGO BELKI POD DZIAŁANIEM RUCHOMEGO OBCIĄŻENIA

### Streszczenie

W pracy przedstawiono zagadnienie optymalizacji lepko-sprężystego wielowarstwowego podłoża belki Tomoszenki, którą można potraktować jako model szyny kolejowej. Zamodelowano obciążenie rozłożone, w kształcie funkcji Gausa, przemieszczające się wzdłuż belki (szyny) z określoną prędkością liniową. Odkształcenie wywołane tym obciążeniem zależy od parametrów podłoża, min. takich jak grubość warstwy, rodzaj materiału warstwy oraz parametrów obciążenia min. takich jak prędkość przemieszczania i cechy jego rozkładu. Przeprowadzono proces optymalizacji, w którym minimalizowano sumaryczne odkształcenie belki ze względu na wybrane parametry podłoża oraz obciążenia. Model obciążonej belki na podłożu zaimplementowano do aplikacji Comsol Multiphysics, wykorzystującej do rozwiązania problemu metodę elementów skończonych. Minimum funkcji celu poszukiwano przy wykorzystaniu algorytmów genetycznych.

### WSTĘP

Szynę kolejową można traktować, jako belkę ułożoną na podłożu sprężystym. W rzeczywistości podłoże jest niejednorodne i tworzy wielowarstwową strukturę zazwyczaj budowaną świadomie przez człowieka. Na rysunku 1 przedstawiono model fizyczny rozpatrywanego zagadnienia.



**Rys. 1.** Fizyczny model a-belki na podłożu wielowarstwowym oraz b-przekrój poprzeczny belki i jego wymiary w metrach.

W rozpatrywanym tu przypadku rozwiązanie polega na wyznaczeniu przemieszczeń belki i wyznaczeniu odpowiedzi podłoża, co sformułowane jest jako tzw. zagadnienie kontaktowe. Wiadomo, że podłoże dozna przemieszczeń nie tylko w punktach leżących bezpośrednio pod

obciążoną częścią belki, ale także w obszarach leżących obok a nawet odkształcenie może się pojawić po ustaniu działania obciążenia, jako wynik reakcji podłoża sprężystego. Jednocześnie przyjęto hipotezy Winklera zakładające, że więzy między belką a podłożem oraz poszczególnymi warstwami podłoża są dwustronne, a więc działają przy rozciąganiu i ściskaniu. Przy tych założeniach belka nie odrywa się od podłoża. Zakłada się również, że więzy są gładkie, a więc nie występuje tarcie między podłożem i spoczywającą na nim belką.

## 1. MODEL MATEMATYCZNY BELKI NA PODŁOŻU

Wartości przemieszczeń  $u(q,t)$  poszczególnych punktów belki oraz wartości naprężenia  $s$  opisano równaniem dynamicznym ruchu dla ciał liniowo-sprężystych w postaci [4, 6, 8, 10]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla s = F_V \quad (1)$$

gdzie:  $u$  to szukany wektor przemieszczeń,  $s$  tensor naprężenia,  $F_V$  wektor wymuszeń zewnętrznych (obciążenie belki), a  $\rho$  to gęstość materiału belki. Przy założeniach hipotezy Winklera równanie (1) oraz równania prezentowane dalej w tym rozdziale dotyczą również warstw podłoża. W zakresie małych wartości odkształceń, naprężenia w relacji do odkształceń  $\varepsilon$  opisuje prawo Duhamel-Hooka'a, sformułowane w postaci następującej zależności:

$$s = s_0 + C : (\varepsilon - \varepsilon_0 - \varepsilon_T) \quad (2)$$

gdzie:  $C$  to tensor sztywności dla belki,  $s_0$  i  $\varepsilon_0$  to odpowiednio naprężenia i odkształcenia wstępne w materiale, a  $\varepsilon_T$  to naprężenia termiczne. Te ostatnie nie są brane pod uwagę w dalszych rozważaniach. Z dziedziny i działania na tensorach (zapisanego w postaci „:”) przechodzi się do działań na odpowiednich macierzach (iloczyn macierzy sztywności i odkształceń), gdy tensory naprężenia i przemieszczenia są symetryczne. Następnie, przy założeniu o zlinearyzowanych przemieszczeniach, relacje między odkształceniami a przemieszczeniami opisują zależności Cauchy'ego :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [(\nabla u)^T + \nabla u] \quad (3)$$

Założono, że na obu końcach belka jest zamocowana na sztywno do podłoża i nie podlega przemieszczeniom. Nałożono na te punkty warunki brzegowe pierwszego rodzaju w postaci:

$$u = 0 \quad (4)$$

W przypadku, gdy wymuszeniem zewnętrznym  $F_V$  jest obciążenie ruchome, przemieszczające się wzdłuż belki z prędkością  $v_{ob}$  na określonej powierzchni  $S$  tej belki, to opisuje tę sytuację warunek brzegowy drugiego rodzaju w postaci:

$$n\sigma|_S = \frac{F}{\sqrt{2\pi\sigma_{ob}}} \exp\left(-\frac{(q - v_{ob} \cdot t)^2}{2\sigma_{ob}^2}\right) \quad (5)$$

gdzie:  $n$  oznacza jednostkowy wektor normalny,  $\sigma$  naprężenia główne,  $F$  maksymalne obciążenie przypadające na jednostkę powierzchni  $S$ . Funkcja wykładnicza Gaussa opisuje rozkład obciążenia w odpowiednich punktach o współrzędnych  $q$ , które zmieniają swoją wartość w czasie przemieszczania się z prędkością  $v_{ob}$ . Siła skupiona zgodnie z funkcją Gaussa na odcinku  $\sigma_{ob}$ .

Jednocześnie pobudzona, odkształcona belka oddziałuje na podłoże. Założono ten sam mechanizm powstawania przemieszczeń i naprężenia w materiale podłoża. Na granicy obszarów założono równość wartości przemieszczeń.

## 2. OPTIMALIZACJA

### 2.1. Funkcja celu i zmienne decyzyjne

Obciążenie wywołuje przemieszczenie belki oraz podłoża. W procesie optymalizacji, jako kryterium optymalizacji wybrano minimalizację całkowitych przemieszczeń (belki oraz podłoża) we wszystkich kierunkach ( $u_{tot}$ ) oraz w wybranym czasie ( $\sum u_{tot}(q,t)$ ). Długość czasu ( $t_k$ ), w którym minimalizowano sumę całkowitych przemieszczeń układu, wybrano tak aby na wynik funkcji celu miały wpływ również przemieszczenia belki oraz podłoża powstałe po ustaniu obciążenia, będące skutkiem reakcji podłoża, jako układu o określonej sztywności. Jako zmienne decyzyjne wybrano: prędkość przemieszczenia obciążenia ( $v_{ob}$ ), wielkość powierzchni, na którym skupione jest obciążenie o charakterze funkcji Gaussa ( $\sigma_{ob}$ ), grubość warstwy  $i$  ( $h_i$ ), szerokość warstwy  $i$  ( $w_i$ ), moduł sprężystości Young'a ( $E_i$ ) oraz współczynnik Poisson'a warstwy  $i$  ( $\nu_i$ ). Ostatecznie funkcja celu przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \min \sum u_{tot}(q,t) &= f(v_{ob}, \sigma_{ob}, h_i, w_i, E_i, \nu_i) \\ i &= 1, 2, 3, \dots, N \\ 0 < t < t_k \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie: N oznacza liczbę warstw podłoża belki.

### 2.2. Algorytm genetyczny wykorzystany do wyznaczania minimum funkcji celu

W celu wyznaczenia minimum funkcji celu (6) zastosowano algorytm genetyczny [5, 7]. W tym przypadku procedura wyznaczania minimum polega na iteracyjnym porównywaniu wartości funkcji celu, wyznaczonej dla pewnej ograniczonej liczby rozwiązań potencjalnych (wektora zmiennych decyzyjnych), dla tzw. populacji. Jej liczebność może, ale nie musi ulegać zmianie. Każde potencjalne rozwiązanie w populacji, wektor zmiennych decyzyjnych nazywany jest chromosomem. W chromosomie zmienne decyzyjne nazywane są genami. Każdy gen jest odpowiednio kodowany przez algorytm tj. zamieniany na ciąg liczb, które w kolejności odpowiadają potęgom liczby 10 lub 2 (w zależności od trybu kodowania). Kodowanie pozwala na porównywanie liczb, które mogą bardzo niewiele różnić się pod względem wartości.

Po losowym wygenerowaniu populacji początkowej (pierwotnej) w działaniu algorytmu można wyróżnić trzy główne procesy: selekcji, krzyżowania i mutacji. Zastosowany tu mechanizm selekcji polega na tym, że w każdej iteracji wszystkie rozwiązania z badanej populacji uzyskują prawdopodobieństwo przejścia do nowej populacji równe stosunkowi wartości funkcji celu dla danego rozwiązania do sumy wartości funkcji celu wszystkich rozwiązań w populacji. Następnie wartości prawdopodobieństwa są przeliczane w ten sposób, że do rozwiązania, dla którego wartość funkcji celu była najmniejsza przyporządkowywana jest największa wartość prawdopodobieństwa. Tak, więc rozwiązania przy najmniejszej wartości funkcji celu uzyskują największe prawdopodobieństwo przejścia do nowej populacji. Następnie stosując metodę ruletki wyodrębnia się „rodziców” dla nowej, „lepszego” generacji osobników [1÷3]. Zastosowana jest liniowa wersja tej metody, polegająca na wykorzystaniu generatora liczb losowych (pseudo-losowych) z rozkładu jednostajnego w zakresie  $<0, 1$ ). Wygenerowane liczby losowe są następnie mnożone przez sumę wartości funkcji celu dla wszystkich rozwiązań z danej populacji. Następnie liczba ta porównywana jest z wartością, która powstaje z kolejno sumowanych prawdopodobieństw, licząc od najniższego aż do wartości, która w sumie z poprzednimi przekroczy wartość liczby wygenerowanej

pomnożonej przez sumę wartości funkcji celu. Odpowiednie rozwiązanie, którego prawdopodobieństwo w sumie z prawdopodobieństwami leżącymi poniżej, przekroczyło wylosowaną wartość, wybierane jest do reprodukcji nowej populacji, jako rodzic. Procedura ruletki powtarzana jest do chwili gdy jej licznik („liczba obrotów”) osiągnie liczbę równą połowie populacji. Następnie wyselekcjonowane pary rozwiązań tworzą nową populację poprzez krzyżowanie i mutację.

W wykorzystywanym algorytmie genetycznym zastosowano metodę krzyżowania mieszanego, w którym nowe potencjalne rozwiązanie (potomek) wchodzące w skład nowej populacji tworzone jest z sumy wyselekcjonowanych dwóch rozwiązań (rodziców) pomnożonych przez pewne współczynniki wygenerowane losowo.

Na etapie mutacji w każdej nowej populacji określona część zmiennych decyzyjnych wektora zamieniana jest na losowo wygenerowane. Zamyka to jeden cykl działania algorytmu. Jednocześnie tzw. elityzm gwarantuje bezpośrednie przejście części najlepszych rozwiązań bezpośrednio do nowej populacji.

### 2.3. Przykład optymalizacji

Stosując procedurę przedstawioną powyżej, rozpatrzono jako przykład, optymalizację podłoża stalowej belki o parametrach wytrzymałościowych  $E_b=200 \cdot 10^9$  Pa i  $\nu_b=0.33$ , traktowanej jako uproszczony model szyny kolejowej o długości 100m ułożonej na podłożu składającym się z czterech warstw (Rys. 1a). Odpowiadać one mogą nasypującym elementom struktury drogi kolejowej. Warstwa 1- podkład kolejowy, warstwa 2- podsypka, warstwa 3- nasyp oraz warstwa 4 - odpowiada gruntowi pod torowiskiem. Wartości zmiennych decyzyjnych, jakie przyjęto do optymalizacji:  $v_{ob}=30$  m/s,  $\sigma_{ob}=0.03$  m przy  $F=10^4$  N,  $h_1=0.1$  m,  $w_1=1$  m,  $h_2=0.3$  m,  $h_3=0.15$  m,  $h_4=1$  m,  $E_1=124 \cdot 10^8$  Pa,  $\nu_1=0.3$ ,  $E_2=110 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_2=0.09$ ,  $E_3=80 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_3=0.05$ ,  $E_4=34 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_4=0.32$ . Wartości powyższe przyjęto w oparciu o dane w praktyce stosowanych w inżynierii kolejowej materiałów [9]. W procesie optymalizacji wprowadzono następujące zależności:  $w_1= w_1+0.4$ ,  $w_2= w_1+0.5$ ,  $w_3= w_1+1$ ,  $w_4= w_1+1.5$ . Ograniczyło to liczbę zmiennych decyzyjnych oraz zachowano jednakowe proporcje szerokości rozpatrywanych warstw podłoża belki. Założono również, że właściwości samej belki oraz pierwszej warstwy nie zmieniają się i są parametrami optymalizacji. Analizowano przemieszczenia belki w czasie, w przedziale  $0 < t < t_k=10$  s. Rozpatrywano uproszczony problem optymalizacji podłoża stalowej szyny na podkładach drewnianych, po której przemieszcza się z daną prędkością obciążenie o rozkładzie funkcji Gaussa, którym może być koło pociągu. Ostatecznie wektor odpowiednich zmiennych decyzyjnych  $[v_{ob}, \sigma_{ob}, h_1, w_1, h_2, h_3, h_4, E_2, \nu_2, E_3, \nu_3, E_4, \nu_4]$  stanowi potencjalne rozwiązanie w optymalizacji.

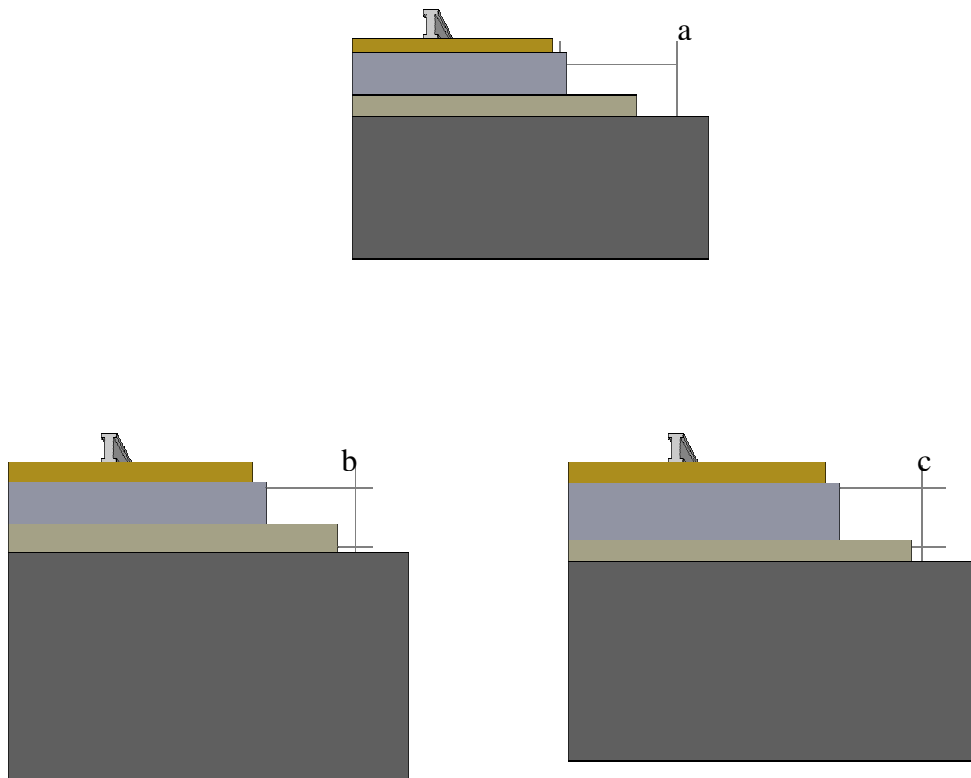
Algorytm genetyczny zaprogramowano, aby poszukiwał minimum funkcji celu operując na populacji o liczebności 10. W takiej jednej iteracji sprawdzanych było dziesięć potencjalnych rozwiązań, czyli badanych było dziesięć wektorów zmiennych decyzyjnych. Zaprogramowano również maksymalną liczbę iteracji, która wynosiła 10. Procesy selekcji, krzyżowania oraz mutacji zaprogramowano na opisane powyżej.

Algorytm genetyczny wymaga również wskazania granic zmienności wartości zmiennych decyzyjnych, które ustawiono następująco:  $v_{ob}=30-50$  m/s,  $\sigma_{ob}=0.03-0.07$  m,  $h_1=0.1-0.3$  m,  $w_1=1-1.5$  m,  $h_2=0.3-0.6$  m,  $h_3=0.15-0.3$  m,  $h_4=1-2$  m,  $E_2=99-121 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_2=0.081-0.099$ ,  $E_3=72-88 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_3=0.045-0.055$ ,  $E_4=30.6 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_4=0.288-0.352$ .

### 2.4. Wynik optymalizacji

W wyniku działania algorytmu otrzymano wyniki o tej samej wartości funkcji celu, przy różnym wektorze zmiennych decyzyjnych. Grubość warstw oraz wartości parametrów materiału podłoża odpowiadające tym rozwiązaniom pokazano na rysunku 2b,c w

porównaniu do parametrów wyjściowych (Rys. 2a). Duża liczba zmiennych decyzyjnych powoduje to, że algorytm genetyczny często wynikami zbliża się do obszaru występowania minimum globalnego, dając różne rozwiązania przy bardzo zbliżonej wartości funkcji celu.

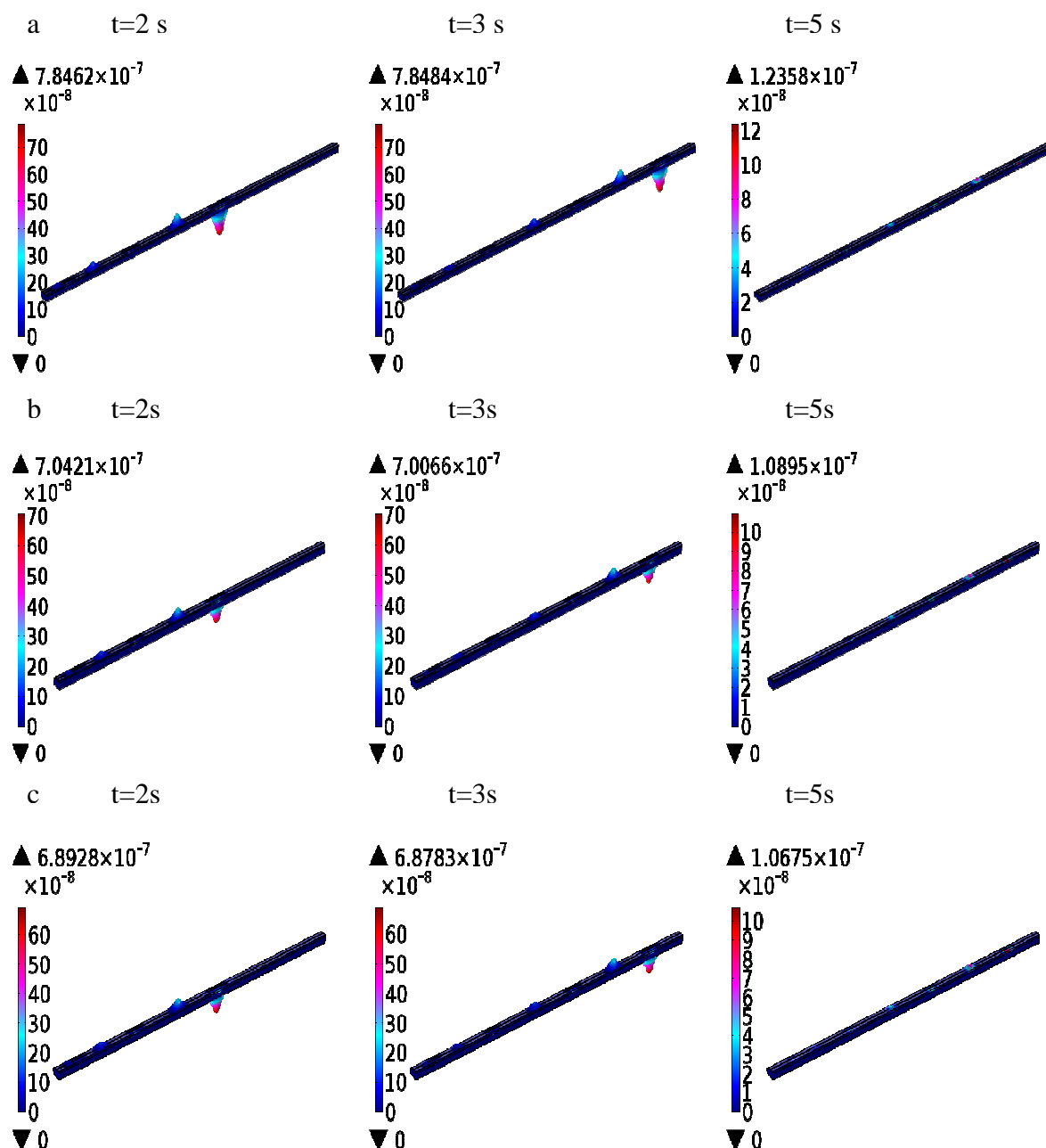


**Rys. 2.** Grubość warstw podłoża belki, przy jednakowej prędkości 30 m/s ruchomego obciążenia  $F=10^4$  N w układzie a-nieoptymalizowanym, oraz rozwiązania zoptymalizowane algorytmem genetycznym, przy jednakowej wartości funkcji celu i wektorze zmiennych decyzyjnych w postaci: b-  $v_{ob}=30$  m/s,  $\sigma_{ob}=0.03$  m,  $h_1=0.14$  m,  $w_1=1.3$  m,  $h_2=0.3$  m,  $h_3=0.2$  m,  $h_4=1.6$  m,  $E_2=87 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_2=0.051$ ,  $E_3=100 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_3=0.0963$ ,  $E_4=3.56 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_4=0.3323$ ; c-  $v_{ob}=30$  m/s,  $\sigma_{ob}=0.02$  m,  $h_1=0.15$  m,  $w_1=1.4$  m,  $h_2=0.4$  m,  $h_3=0.15$  m,  $h_4=1.4$  m,  $E_2=87 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_2=0.048$ ,  $E_3=102 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_3=0.0855$ ,  $E_4=3.26 \cdot 10^6$  Pa,  $\nu_4=0.3232$ .

W celu porównania wyników, na rysunku 2 oraz rysunku 3 przedstawiono tylko wybrane przypadki. Są to rozwiązania takie, w których przy jednakowej wartości funkcji celu, zmienna decyzyjna  $v_{ob}$ , prędkość przemieszczania się obciążenia jest jednakowa i wynosi 30m/s. Druga zmienna decyzyjna związana z obciążeniem jest różna. Nie można, zatem porównywać tych wyników wprost, stwierdzając kategorycznie, że jedno z rozwiązań jest lepsze od drugiego. Może to natomiast być istotna analiza wstępna w inżynierii kolejowej. Poprzez wprowadzenie dodatkowych kryteriów optymalizacji, takich jak: kryterium technologiczne, kryterium kosztów czy eksploatacyjne, daje możliwość uzyskania pożądanych wyników.

Przyjmując rozpatrywane tu sformułowanie problemu optymalizacji można skłaniać się do przyjęcia rozwiązania przedstawionego na rysunku 2c, a następnie na rysunku 3c, jako rozwiązania najlepszego (optymalnego). Kierując się jedynym kryterium, jakim jest suma przemieszczeń całkowitych, można porównać chwilowe przemieszczenia i przyjąć, że przemieszczenia maksymalne w określonych momentach decydują o wyborze rozwiązania. Jak przedstawiono na rysunku 3c maksymalne przemieszczenia we wszystkich badanych chwilach ( $t=2$  s, 3 s i 5 s) są najmniejsze dla tego przypadku. Jak z tego wynika, belka ugina się zarówno, gdy znajduje się na nim obciążenie, jak też po jego ustaniu. Należy pamiętać, że właściwe kryterium optymalizacji, to suma przemieszczeń całkowitych. Wartość

maksimum nie określa kształtu przemieszczenia, który może być różny, w zależności od wartości drugiej zmiennej decyzyjnej  $\sigma_{ob}$ , określającej rozkład obciążenia.



**Rys. 3.** Przemieszczenia całkowite belki oraz warstw podłoża, w wybranych chwilach, przy jednakowej prędkości 30 m/s ruchomego obciążenia  $F=10^4$  N w układzie a-nieoptymalizowanym, oraz rozwiązania zoptymalizowane algorytmem genetycznym, przy jednakowej wartości funkcji celu i wektorze zmiennych decyzyjnych: b-  $v_{ob}=30$  m/s,  $\sigma_{ob}=0.03$  m,  $h_1=0.14$  m,  $w_1=1.3$  m,  $h_2=0.3$  m,  $h_3=0.2$  m,  $h_4=1.6$  m,  $E_2=87 \cdot 10^6$  Pa,  $v_2=0.051$ ,  $E_3=100 \cdot 10^6$  Pa,  $v_3=0.0963$ ,  $E_4=3.56 \cdot 10^6$  Pa,  $v_4=0.3323$ ; c-  $v_{ob}=30$  m/s,  $\sigma_{ob}=0.02$  m,  $h_1=0.15$  m,  $w_1=1.4$  m,  $h_2=0.4$  m,  $h_3=0.15$  m,  $h_4=1.4$  m,  $E_2=87 \cdot 10^6$  Pa,  $v_2=0.048$ ,  $E_3=102 \cdot 10^6$  Pa,  $v_3=0.0855$ ,  $E_4=3.26 \cdot 10^6$  Pa,  $v_4=0.3232$ .

## WNIOSKI Z PRZEPROWADZONYCH SYMULACJI

Przedstawiony tu problem optymalizacji jednokryterialnej podłoża wielowarstwowego belki zawiera w sobie dwa rodzaje zagadnień. Pierwsze z nich to modelowanie i związany z nim wybór metody rozwiązywania zagadnienia ugięcia belki.

Zastosowano tu modelowanie i rozwiązywanie numeryczne, przy użyciu metody elementów skończonych w aplikacji Comsol Multiphysics. Wykorzystane tu podejście pozwala modelować zagadnienia o dowolnym stopniu skomplikowania geometrii. Uzyskujemy modele bardzo dokładnie odwzorowujące rzeczywiste obiekty. Jednak liczba równań, które należy rozwiązać w tym przypadku jest duża. W zastosowanym modelu liczba stopni swobody wynosiła około ponad osiemset tysięcy. Wymaga to sporych nakładów obliczeniowych i zasobów sprzętowych. Ma to znaczenie przy wybranej metodzie optymalizacji, w której algorytm genetyczny działa iteracyjnie na populacjach rozwiązań. Wielokrotne obliczanie wartości funkcji celu oraz porównywanie zestawu uzyskanych wyników czyni cały proces czasochłonnym i obliczeniowo dość kosztownym. Stąd zaprogramowana i rozpatrywana tu liczba iteracji i liczebność populacji.

Algorytm genetyczny, jako metoda optymalizacji jest przeznaczony do rozwiązywania problemów, w których należy uwzględnić dużą liczbę zmiennych decyzyjnych, jak ma to miejsce w rozpatrywanym przypadku. Z pokazanych tu wyników należy wnioskować, że wprowadzenie innych kryteriów oceny problemu (kryteriów optymalizacji) pozwoliłoby na uzyskanie jednoznacznych wyników. Należy stwierdzić, że algorytmy genetyczne w pełni nadają się do rozwiązywania problemów optymalizacji wielokryterialnej [1, 2, 3].

## BIBLIOGRAFIA

1. Błażejowski A., *Optymalizacja impedancyjnych warunków brzegowych obszaru z harmonicznym zaburzeniem wibroakustycznym*, Logistyka nr 6, 2011, str. 209-218.
2. Błażejowski A. Krzyżyński T., *Multi-objektive optimization using genetic algorithm in room acoustics*, Logistyka Nr 6/2010 r. 2010, str. 281-289.
3. Błażejowski A. Krzyżyński T., *Multi-objective optimization of the acoustic impedance distribution for room steady state sound field condition*, VIBRATIONS IN PHYSICAL SYSTEMS Tom 24 r. 2010, str. 57-62.
4. Bower A., *Linear Elasticity, Lecture Notes*, Division of Engineering Brown University, Spring 2005.
5. Michalewicz Z., *Algorytmy genetyczne+struktury danych=programy ewolucyjne*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 2003.
6. Piechnik S., *Wytrzymałość materiałów dla Wydziałów budowlanych*, PWN, Warszawa-Kraków, 1980.
7. Popov A., *Genetic algorithms for optimization, Programs for Matlab, Version 1.0*, url: <http://www.automatics.hit.bg>, 2005.
8. Rakowski J., *Teoria sprężystości*, Almamater, Politechnika Poznańska, 2003/2004.
9. Suiker A.S.J., *The mechanical behaviour of ballasted railway tracks*. Delft University Press, Netherlands 2002.
10. Timoschenko S. Goodier A.J.N., *Theory of Elasticity, Second edition*, Mc Graw –Hill, Oxford, 1951.

# OPTIMISATION OF THE MULTILAYER FOUNDATION OF A BEAM UNDER MOVING LOAD

## *Abstract*

*Paper presents the optimization of linear elastic multilayer foundation of the Timoshenko beam, which can be considered as a rail model. The moving load traveling along a beam with particular velocity, which distribution is characterized by Gauss function, is implemented in the model. The displacement caused by the load is dependent on multilayer foundation parameters such as layer thickness, a type of material and load parameters such as moving velocity as well its distribution on a beam. The optimization, i.e. minimization of the total displacement sum, as the result of objective function determined regarding chosen parameters of a foundation and load, as a design variables was carried out. The Comsol Multiphysics is applied in order to solve the beam and moving load problem by using the finite element method. Using genetic algorithm searches the minimum of objective function.*

## **Autorzy:**

dr inż. **Andrzej Błażejowski** – Politechnika Koszalińska, Instytut Technologii i Edukacji, Zakład Mechatroniki i Mechaniki Stosowanej, e-mail: [andrzej.blazejewski@tu.koszalin.pl](mailto:andrzej.blazejewski@tu.koszalin.pl)