

# Zachowanie się wzmocnionej ściany murowej w warunkach poziomego ścinania na terenie górniczym

## Behavior of the reinforced masonry wall under horizontal shear conditions in the mining area



*Dr inż. Marek Bartoszek\**



*Dr hab. inż. Jan Fedorowicz\*\*),  
prof. WST Katowice*

**Treść:** Tematem pracy są analizy zachowania się ścianowych konstrukcji murowanych z elementów drobnowymiarowych poddanych prostym obciążeniom charakterystycznym dla wpływów eksploatacji górniczej. Zastosowane modele konstytutywne materiału pozwoliły na śledzenie zachowania się modeli numerycznych w zakresie sprężysto-plastycznej pracy materiału z uwzględnieniem jego degradacji. Przedstawiono wyniki analiz numerycznych wykonanych dla wyodrębnionych fragmentów muru poddanych poziomemu ścinaniu. Uwzględniono m.in. wpływ degradacji na wyężenie i deformację muru oraz zmianę sztywności badanych elementów. Analizowano różne proporcje ścian i modele materiału (z degradacją i bez, sztywniejsze i bardziej podatne). Zbadano wpływ osłabienia ściany otworem oraz wpływ wzmocnienia ścian dwustronnymi pilastrami i za pomocą rdzeni żelbetowych.

**Abstract:** The subject of the study is the analysis of the behaviour of the masonry structures, build with small-dimensional elements, subject to simple loads characteristic for the influence of mining exploitation. The material constitutive models applied allow to trace the behaviour of the numerical models in the field of elastic-plastic material work, taking into account its degradation. The results of the performed numerical analyses for isolated wall sections, subject to horizontal shear were discussed. The effect of degradation on the strain and deformation of the wall and changes in stiffness of the tested elements are included. Various proportions of walls and different material models (with and without degradation, stiffer and more susceptible) were analyzed. The influence of wall weakening by window-like opening and the effect of bilateral pilasters or reinforced concrete cores were investigated.

### **Słowa kluczowe:**

*tereny górnicze, wpływy górnicze, ściana murowana, ścinanie ściany, analizy numeryczne, model nieliniowy z degradacją*

### **Keywords:**

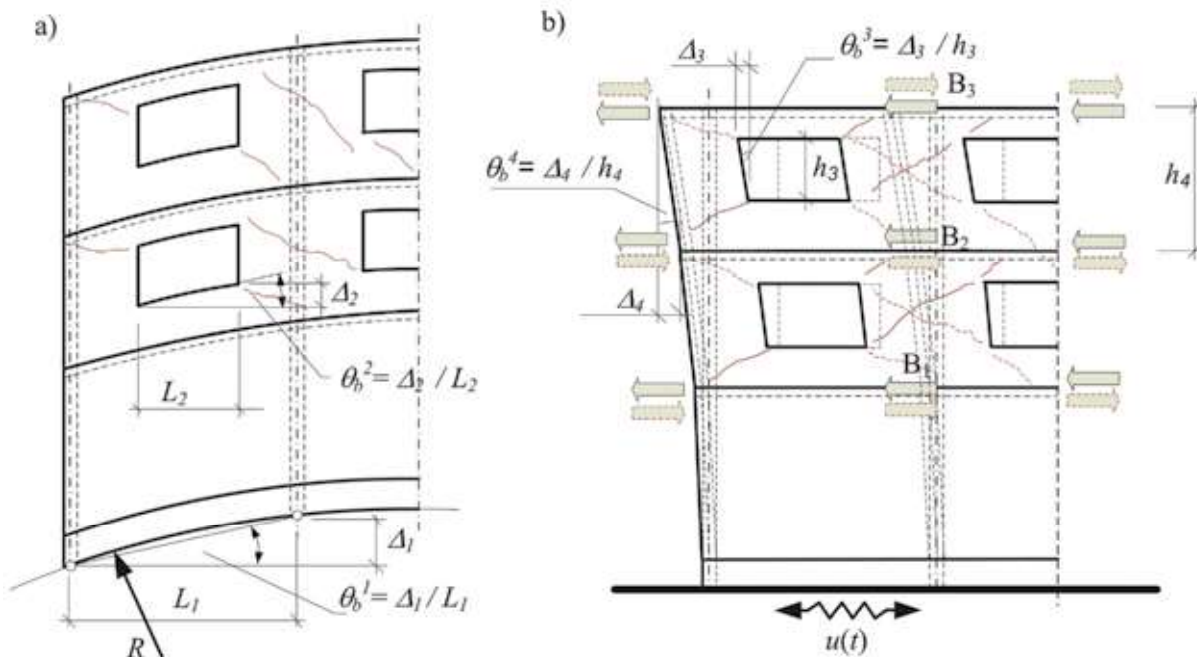
*mining areas, mining influence, brick wall, wall shearing, numerical analyses, model of inelastic material degradation*

## 1. Wprowadzenie

Deformacja ośrodka gruntowego powoduje na ogół powstanie w budowli dodatkowych sił wewnętrznych, wynikających głównie z tarcia gruntu o fundamenty, wpływu zróżnicowanych przemieszczeń podłoża (pionowych i poziomych), nachyleń terenu i parcia gruntu na pionowe powierzchnie konstrukcji w nim zagłębionej. Prowokowane eksploatacją wstrząsy podłoża powodują natomiast pojawienie się obciążających konstrukcję, poziomych sił bezwładności. Schematycznie skutki pojawiania się tych sił w postaci zarysowania i deformacji pojedynczej ściany przedstawiono na rys. 1.

Występujące uszkodzenia są powodowane nadmierną deformacją konstrukcji i przekroczeniem stanu nośności ich elementów. W przypadku konstrukcji murowej jej uszkodzenie wynika przede wszystkim z przekroczenia pewnej możliwej do przeniesienia przez konstrukcję deformacji o charakterze postaciowym, która najwyraźniej uwidacznia się w otworowych pasach ścian budynków poddanych wygięciu (rys. 1a) lub obciążonych wpływem wstrząsu górniczego – (rys. 1b). W obu przypadkach konstrukcja ścianowa poddawana jest intensywnym deformacjom postaciowym (głównie ścinaniu pionowemu, a także ścinaniu poziomemu) oraz towarzyszącym im naprężeniom. Deformacjom postaciowym konstrukcji murowych odpowiada ich najmniejsza odporność na tego typu uszkodzenia, wynikająca z charakteru tego rodzaju konstrukcji. W przypadku dominacji wpływów wynikających z poziomych przemieszczeń terenu konstrukcja narażona jest

\* Politechnika Śląska Gliwice, \*\* Wyższa Szkoła Techniczna, Katowice



Rys. 1. Schemat deformacji oraz uszkodzenia ściany: a) przy wpływie pionowych przemieszczeń podłoża, b) przy wpływie wstrząsu górniczego

Fig. 1. Scheme of deformation and damage to the wall; a) the influence of the vertical displacement of the substrate, b) at mining shock impact

głównie na rozciąganie i częściowo na zginanie. Wówczas intensywność deformacji postaciowych jest mniejsza, a dominującymi siłami wewnętrznymi są siły rozciągające konstrukcję. W pracy skupimy naszą uwagę na zachowaniu się konstrukcji murowej poddanej wpływom deformacji o charakterze postaciowej, a w szczególności poddanej poziomemu ścinaniu.

Na rysunkach 2÷7 pokazano możliwe, charakterystyczne skutki wpływu eksploatacji górniczej w budynkach murowanych wynikające z poziomego ścinania elementów murowanych pod wpływem zarówno deformacji statycznych podłoża, jak i występujących wstrząsów podłoża.

Rozpatrzmy możliwość wzmocnienia tak obciążonych ścian murowanych przez zastosowanie pilastrów lub żelbetowych trzpieni pionowych. W takich przypadkach właściwa ocena zachowania konstrukcji murowej – zgodna ze standardami współczesnych analiz obliczeniowych – wymaga ana-

lizy numerycznej z zastosowaniem zaawansowanych modeli konstytutywnych. Nie skutkuje to jednak powszechnością stosowania analiz niesprężystych przy ocenie (istniejących lub przewidywanych) uszkodzeń ścian konstrukcji budowlanych narażonych na wpływ nierównomiernych przemieszczeń podłoża gruntowego. W analizach inżynierskich skutki deformacji pochodzenia górniczego oceniane są w konstrukcji bądź w sposób klasyczny bądź numerycznie w obliczeniowych modelach MES. W pierwszym przypadku do schematów obliczeniowych budowla-podłoże górnicze wykorzystywane są metody mechaniki budowli (Instrukcje 2006, Instrukcje 2007, Kwiatek i inni 1997, Praca zbiorowa 1980). W modelach MES korzysta się natomiast z liniowo-sprężystych związków konstytutywnych w opisie konstrukcji i podłoża (Kadela, Chomiczki 2014, Parkasiewicz, Słowik 2012, Fedorowicz L., Fedorowicz J. 2002, Cincio, Fedorowicz J. 2017, i Fedorowicz L., Fedorowicz J. 2004).



Rys. 2. Deformacja otworu okiennego w budynku przy ul. Pocztowej w Karbiu-Bytomiu, fot. L. Słowik, ITB, 2013  
Fig. 2. Deformation of the window opening in the building at Poczta Street in Bytom-Karb, photo: L. Słowik, ITB, 2013



Rys. 3. Uszkodzenie żelbetowego nadproża wysokiego w postaci tzw. krzyża św. Andrzeja  
Fig. 3. Damage to the brick wall and pillar in the form of so-called the cross of St. Andrew



Rys. 4. Pęknięcie poprzecznej ściany nośnej w budynku przy ul. Pocztovej w Bytomiu-Karbiu, fot. L. Słowik, ITB, 2013

Fig. 4. The crack in the lateral load-bearing wall in the building at Poczta Street in Bytom-Karb, photo L. Słowik, ITB, 2013



Rys. 6. Ścięcie ścianki międzyokiennej w budynku przy ul. Pocztovej w Bytomiu-Karbiu, fot. L. Słowik, ITB, 2013

Fig. 6. The oblique crack of walls between the windows in a brick building at Poczta Street in Bytom-Karb

W literaturze szczegółowo omawiane są efekty działalności górniczej zagrażające przekroczeniem stanów granicznych nośności bądź użytkowania, a tym samym bezpieczeństwu zabudowy powierzchni terenu. Są to (Kratzsch 1993, Kwiatek i inni 1997):

- wychylenie obiektu budowlanego od pionu  $T_b$  – powodowane nachyleniem terenu,
- odkształcenie postaciowe konstrukcji  $\theta_b$  – powodowane krzywizną terenu, oraz
- szerokość rozwarcia rys  $a_w$  – oceniana zasadniczo tylko w istniejących obiektach.

Zatem za miarodajny, w ocenie pracy ściany murowej, uważa się tu stan wyężenia konstrukcji ścianowej, wynikający z deformacji o charakterze postaciowym (Instrukcje 2006, Instrukcje 2007). Schematyczne wyobrażenie tego stanu przedstawia rys. 1, a przykłady rys. 2. Zgodnie z (Instrukcje 2006, Instrukcje 2007), ocenę zagrożenia zarysowaniem (spękaniem) ścian konstrukcji wyraża się przez sprawdzenie warunku (1) – nieprzekroczenia pewnej wartości odkształcenia postaciowego  $\theta_b$ :

$$\theta_b \text{ (określone obliczeniowo)} \leq \theta_b \text{ (dopuszczalne)} \quad (1)$$

W swojej pracy (Kubica 2003) zapisuje natomiast warunek (1) w postaci (2):

$$\theta_{sd} \leq \theta_{adm} \quad (2),$$

gdzie:

- $\theta_{sd}$  – odpowiada lokalnej wartości
- $\theta_b$  – określonej obliczeniowo, która w analizach nume-



Rys. 5. Ukośne pęknięcie z rozsunięciem ściany zewnętrznej hali w Mikołowie – widok z zewnątrz, fot. własna

Fig. 5. The oblique crack of unwanted spreading of the outer wall of the hall in Mikołów - a view from the outside, own photo.



Rys. 7. Pęknięcie z rozsunięciem murowanej ściany między otworami, Mikołów, fot. własna

Fig. 7. Crack between the door openings with wall offset in the brick wall, Mikołów, own photo

rycznych może być identyfikowana (podobnie jak w badaniach laboratoryjnych) z lokalnie wyznaczaną wartością kąta odkształcenia postaciowego  $\varepsilon_{t2}$ ,

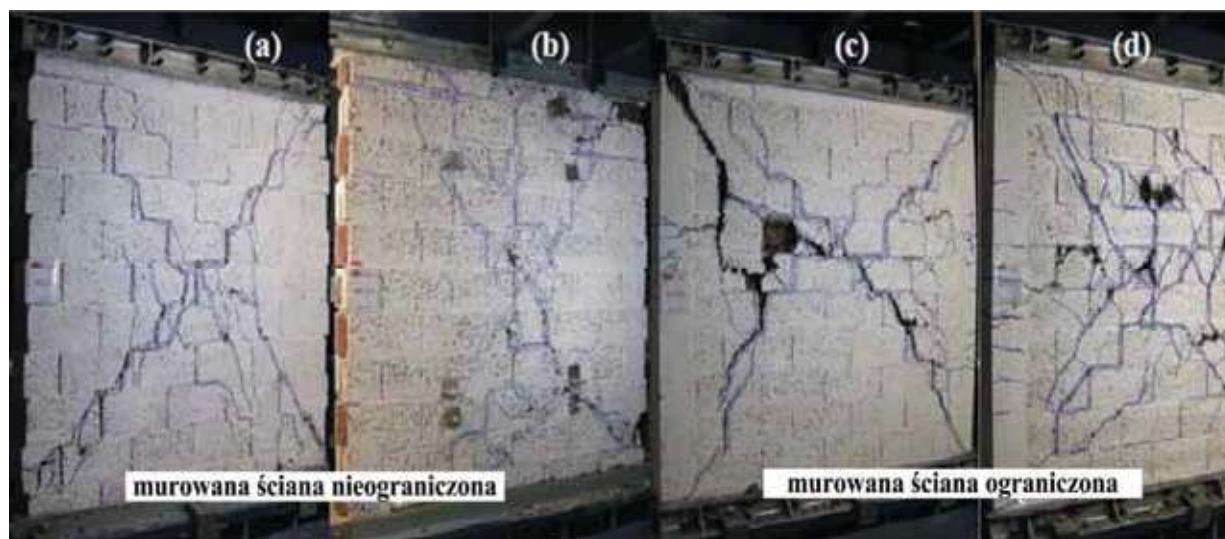
$\theta_{adm}$  – odpowiada natomiast dopuszczalnej wartości  $\theta_b$  – określonej w badaniach laboratoryjnych.

Metodykę takiego postępowania można akceptować wówczas, gdy mechanizmy zniszczenia muru występujące w laboratoryjnych badaniach są zgodne jakościowo z występującymi w naturze.

Na rys. 8 i 9 pokazano za (Lourenço i inni 2008) przykłady znanych z literatury przedmiotu wyników badań fragmentów ścian, odpowiadających charakterem uszkodzeniom ścian w kształcie krzyża św. Andrzeja (np. z rys. 3), poddanych poziomemu cyklicznemu ścinaniu. W przypadku próbek z rys. 8c i 8d zastosowano, wzdłuż bocznych krawędzi, żelbetowe słupki stanowiące pionowe ograniczenie ścian.

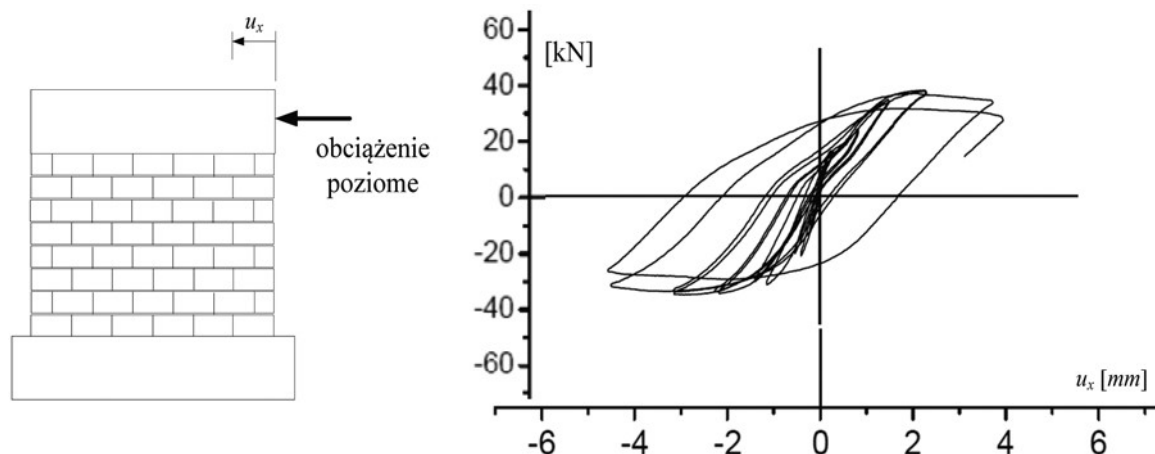
Wartości powstających odkształceń potrzebne w takiej analizie bezpieczeństwa konstrukcji, a w szczególności ekstremalne  $\theta_b$  oraz ich lokalizację, można uzyskać wykorzystując numeryczne modele MES albo wykonując badania laboratoryjne odpowiednich fragmentów murów.

W pracy przedstawiono próbę numerycznej oceny zachowania się dużych fragmentów muru o różnych proporcjach wymiarów przy zastosowaniu modelu sprężysto-plastycznego z degradacją dla przypadku pionowego ścinania. Omówiono przy tym wpływ wzmocnienia ściany przez wprowadzenie pilastów lub żelbetowych rdzeni.



Rys. 8. Widok spękania badanej próbki muru (rys. 23, Lourenço i inni 2008)

Fig. 8. View of crack of the analyzed wall sample (Fig. 23, Lourenço i inni 2008)



Rys. 9. Badana próbka muru i charakter obciążenia (Lourenço i inni 2008)

Fig. 9. The sample in the wall and the load character (Lourenço i inni 2008)

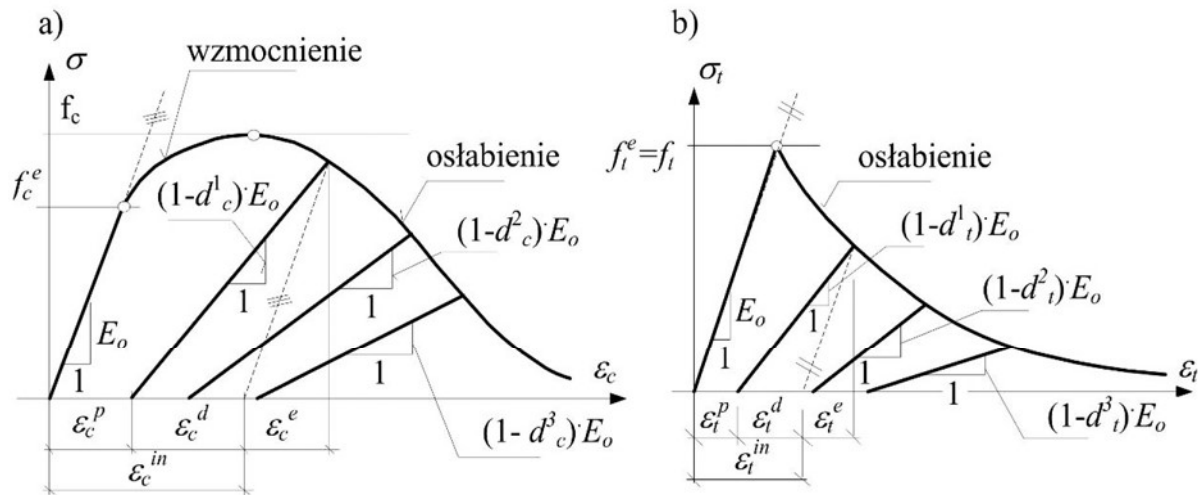
## 2. Krótka charakterystyka stosowanego modelu materiału

Do analiz numerycznych wykorzystano w badaniach sprężysto-plastyczny kruchy model materiału uwzględniający degradację. Opracowany w 1989 roku przez zespół badaczy: Lubliner, Oliver, Oller i Oñate (Lubliner i inni 1989, Lubliner i inni 1989) model włączony jest do komercyjnego pakietu *MES ABAQUS* (Hibbitt i in. 2002) pod nazwą *Damage Concrete Model*, a jego implementacja opisana została w pracy (Lee, Fenves 2001). Dalej, w pracy modelowi temu przypisano nazwę: model (e-p-d). Jest to model trzyparametrowy, z niestwarzonym prawem płynięcia, o nieliniowym wzmocnieniu izotropowym typu dwumechanizmowego (Lee 1996, Lee, Fenves 2001, Lopez i inni 1999, Lubliner i inni 1989), opartym na hipotezie wzmocnienia odkształceniowego. Powierzchnię plastyczności stanowi rozszerzenie powierzchni klasycznego modelu *Druckera-Pragera* przez uwzględnienie niekołowości kształtu przekroju dewiatorowego. Odkształcenia plastyczne w (e-p-d) wyznaczone są na podstawie powierzchni potencjału plastycznego różnej od powierzchni plastyczności. Model (e-p-d) charakteryzuje izotropowa degradacja materiału, opisana dwoma, powiązаныmi ze sobą zmiennymi degradacji materiału:  $d_t$  i  $d_c$ , wyznaczanymi na podstawie niezależnych funkcji

zniszczenia. Opisują one potwierdzony doświadczalnie wpływ degradacji materiału na skutek ściskania  $d_c$ , na wielkość degradacji podczas rozciągania  $d_t$ , zachodzący po zmianie znaku naprężenia oraz zjawisko przeciwne, zachodzące przy przejściu z rozciągania do ściskania, częściowego odtwarzania pierwotnej sztywności materiału, na skutek zamykania się rys powstających w materiale kruchym.

Po przejściu materiału w stan niesprężystej pracy funkcja wzmocnienia determinuje dalszą ewolucję naprężeń w modelu, natomiast niemalejąca funkcja degradacji określa wielkość zniszczenia materiału. Odciążenie powoduje powrót do stanu sprężystego przy czym zapamiętywana jest ostatnia konfiguracja powierzchni obciążenia oraz końcowe wartości zmiennych degradacji  $d_c$  i  $d_t$ , a następnie modyfikowana jest sztywność materiału (rys. 10), poprzez redukcję modułu sprężystości dla ściskania  $(1-d_c) \cdot E_o$  i rozciągania  $(1-d_t) \cdot E_o$ .

Dla opisu odpowiedzi modelu na cykliczne obciążenie typu ściskanie-rozciąganie zdefiniowano zmienną zniszczenia  $d$  określoną wzorem (3), uwzględniającą degradację materiału powstałą w obu możliwych mechanizmach zniszczenia - jednoosiowego ściskania oraz jednoosiowego rozciągania, a także dwa współczynniki redukcyjne odpowiadające przeje-



Rys. 10. Opis cyklicznego, jednoosiowego testu: a) ściskania, b) rozciągania w modelu (e-p-d)

Fig. 10. Description of a cyclic uniaxial test: a) compression test, b) tensile test in the (e-p-d) model

ściu obciążenia: z rozciągania do ściskania ( $\omega_c$ ) oraz odwrotnie ( $\omega_t$ ), będące dodatkowymi parametrami materiałowymi.

$$(1-d) = (1-s_t \cdot d_c) \cdot (1-s_c \cdot d_t), \quad 0 \leq s_t, s_c \leq 1 \quad (3)$$

gdzie

$s_t, s_c$  – są pewnymi funkcjami naprężenia

$\sigma_{11}$  – definiującymi w modelu redukcję zniszczenia materiału.

Szczegółowo, budowę i działanie modelu (e-p-d) omówiono w (, Fedorowicz L. 2006, Fedorowicz J. 2008a, 2008b). Efektywność modelu w analizach deformacji i zniszczenia konstrukcji murowych w warunkach różnych obciążeń, w tym również górniczych deformacji podłoża analizowano w pracach (Bartoszek, Fedorowicz J. 2008, Bartoszek, Fedorowicz J. 2009, Fedorowicz L. 2006, Fedorowicz J. 2008a, 2008b, Mrozek i inni 2017). Zachowanie się modelu (e-p-d) konstrukcji murowych poddanych wstrząsom górniczym analizowano natomiast między innymi w pracach (Wawrzynek i inni 2006, Wawrzynek, Cińcio 2005, Wawrzynek, Cińcio 2007, Cińcio i inni 2007, Cińcio 2004, Cińcio 2005, Mrozek D. 2010, Mrozek M. 2012).

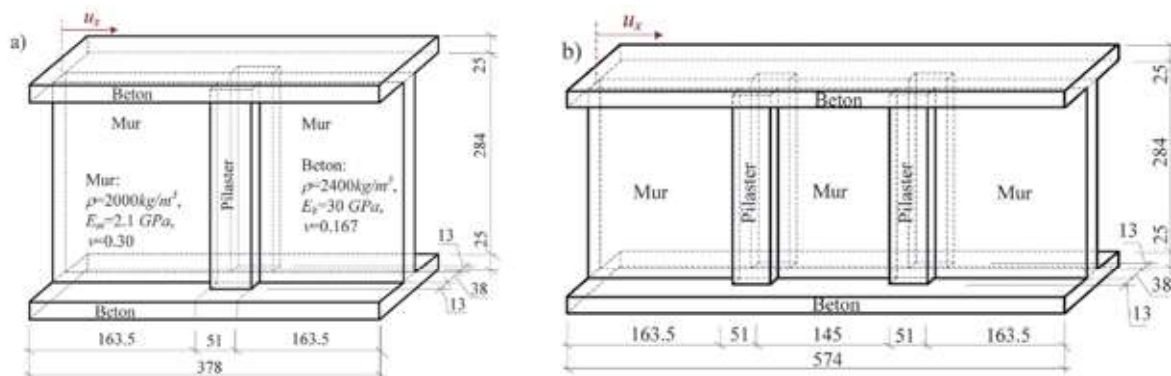
### 3. Charakterystyka modeli ścian wzmocnionych pilastrami lub rdzeniami

Badaniom numerycznym poddano analizowane w (Bartoszek, Fedorowicz J. 2008, Bartoszek, Fedorowicz J. 2009) fragmenty ścian ścinanych poziomo, które wzmocniano

na dwa sposoby:

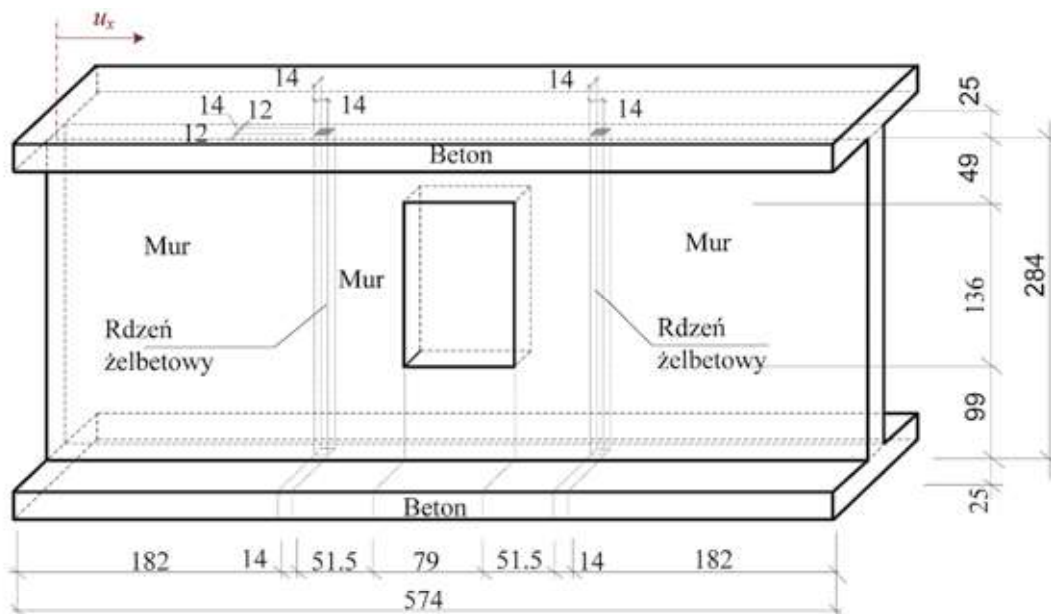
- 1) obustronnymi pilastrami o grubości  $\frac{1}{2}$  cegły i szerokości 2 cegieł - rys. 4a i b lub
- 2) poprzez wytworzenie wewnątrz muru pionowych rdzeni żelbetowych o przekroju  $14 \times 14 \text{ cm}$  ( $\frac{1}{2}$  cegły ze spoinami) - rys. 12 (również w wersji z jednym rdzeniem).

Obciążenie analizowanych ścian stanowiły: ciężar własny  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ , oraz wymuszone poziome przemieszczenie  $u_x$  górnego brzegu tarczy (płyty górnej) - rys. 11 i rys. 12. Analizowano modele wzmocnianych murów w dwóch rozmiarach (rys. 11): mniejszy model o długości  $378 \text{ cm}$  ( $14\frac{1}{2}$  długość cegły) podzielony pojedynczym wzmocnieniem na dwa segmenty oraz większy model, o długości  $574 \text{ cm}$  (22 długość cegły), miał dwa wzmocnienia dzielące go na trzy równe segmenty. Wysokość modeli odpowiada 38 warstwom cegły ( $284 \text{ cm}$ ), a grubość  $1\frac{1}{2}$  cegły ( $38 \text{ cm}$ ). Wzmocnienie stanowiły rdzenie betonowe ( $14 \times 14 \text{ cm}$ ) lub pilastry uzyskane jako obustronne pogrubienie muru o  $\frac{1}{2}$  cegły na długości 2 cegieł. Tak otrzymano cztery podstawowe modele. Dodatkowo zbadano wpływ: osłabienia muru wzmocnionego dwoma rdzeniami, otworem wykonanym w jego środkowym segmencie (rys. 12); zbadano wpływ różnej szerokości pilastrów (innej niż 2 cegły) na nośność krótszej ściany oraz wpływ liczby pilastrów na pracę ściany trzysegmentowej (od jednego pilastra po aż tak gęsto rozmieszczone, że powstała gładka ściana - grubsza o pilastry). Własności wytrzymałościowe i odkształceniowe muru przyjęto jak dla materiału zhomogenizowanego (rys. 13).

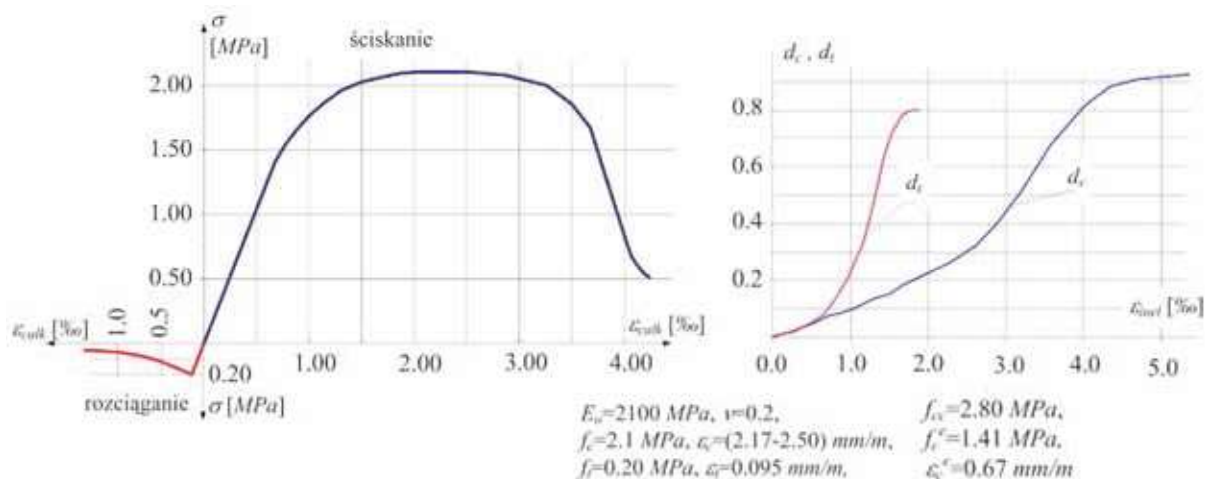


Rys. 11. Geometria i sprężyste własności ścian wzmocnionych pilastrami: a) pojedynczy pilaster dwustronny (dwusegmentowa), b) podwójny pilaster (trzysegmentowa)

Fig. 11. Geometry and elastic properties of masonry walls strengthened with pilasters: a) one double sided pilaster in two-section wall, b) three-segment wall with two pilasters



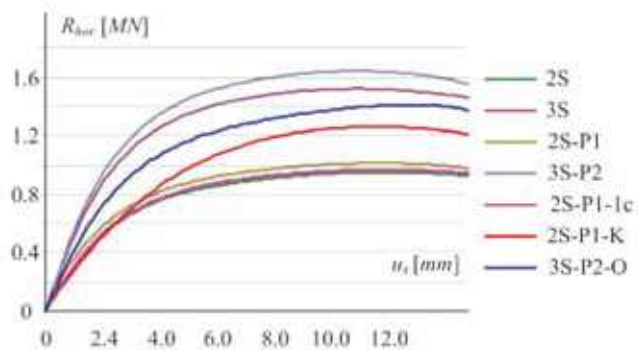
Rys. 12. Geometria modelu wzmocnionego dwoma rdzeniami żelbetowymi z osłabieniem w postaci otworu  
 Fig. 12. Geometry of the model strengthened with two concrete cores and weakened by the window opening



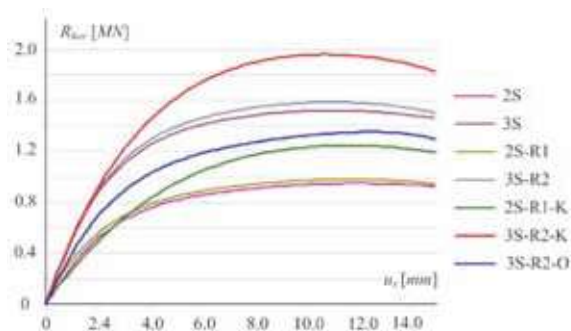
Rys. 13. Charakterystyki materiałowe  $\sigma-\epsilon$  oraz  $f_c$  zniszczenia:  $d_c$  ściskanie (niebieska),  $d_t$  rozciąganie (czerwona)  
 Fig. 13. Material characteristics  $\sigma-\epsilon$  and functions of destruction:  $d_c$  compressive (blue) and  $d_t$  tensile (red)

4. Wybrane wyniki obliczeń wzmocnionych ścian mury-nych ścinanych poziomo

Na rys. 14 i rys. 15 przedstawiono wyniki analiz ścian wzmocnianych pilastrami lub rdzeniami. Rozważano dwa modele ścian: krótszą – dwusegmentową (2S, długości 378 cm), przeznaczoną pod jedno wzmocnienie oraz dłuższą – trzysegmentową (3S, 574 cm), na której umieszczano dwa wzmocnienia. Różnica w nośności niewzmocnionych ścian wynosiła około 60%.



Rys. 14. Wzmocnienie ścian dwustronnymi pilastrami szerokości 2 cegły: 2S, 3S – ściany dwu- lub trzysegmentowe (krótsza i dłuższa) bez wzmocnień; P1, P2 – ściany wzmocnione jednym lub dwoma pilastrami; 1c – model z węższym pilastrzem (szerokości 1 cegły); K – model z kontaktem pomiędzy ścianą i bazą (wieńcem); O – model z otworem okiennym  
 Fig. 14. Strengthening of walls with two-sided, two-brick-wide pilasters: 2S, 3S – two- and three-segment walls (shorter and longer one) without pilasters; P1, P2 – walls with 1 or 2 pilasters; 1c – model with narrower pilaster (two-brick-wide); K – model with contact between wall and its base (e.g. reinforced concrete wreaths); O – model with window opening



**Rys. 15. Wzmocnienie ścian żelbetowymi rdzeniami 14x14cm (½ cegły): 2S, 3S – ściany dwu lub trzysegmentowe (krótsza i dłuższa) bez wzmocnień; R1, R2 – ściany wzmocnione jednym lub dwoma rdzeniami; K – model z kontaktem między ścianą i bazą, O – model z otworem okiennym**

**Fig. 15. Strengthening of walls with reinforced concrete cores 14x14 cm (½ of a brick length): 2S, 3S – two- and three-segment walls (shorter and longer one) without pilasters; R1, R2 – number of strengthening cores; K – models with contact between wall and its base; O – model with window opening**

Wzmocnienie dwusegmentowej ściany, uzyskane za pomocą dwustronnego pilastra wynosi 6.5%, a trzysegmentowej 7.5%, przy wzroście przekroju ściany odpowiednio o 9.4% oraz 12.4%. Uzyskane wyniki wskazują, że przyrost nośności ścian jest proporcjonalny do przyrostu pół powierzchni pilastrów, przy czym jest on nieco większy w ścianie z jednym pilastrzem. Okazało się też, że zastosowanie o połowę węższego pilastra zmniejsza nośność ściany dwusegmentowej o ponad 2/3. Postanowiono więc przeprowadzić dalej dokładniejszą analizę wpływu szerokości pilastra.

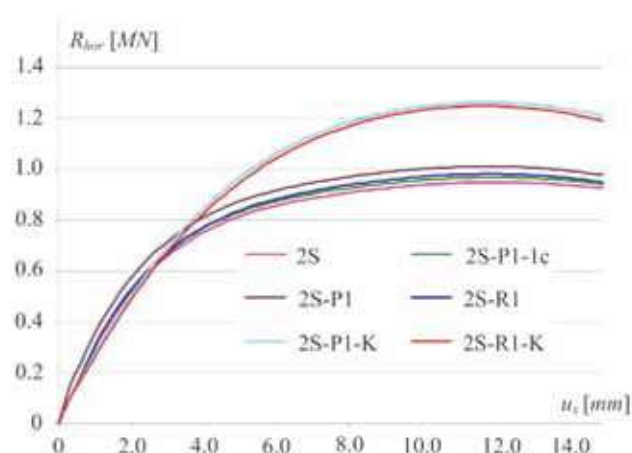
Model numeryczny MES służący do powyższych analiz nie zezwalał na rozwarstwienie pomiędzy ścianą i bazą w strefach rozciąganych. Aby uwzględnić ten efekt zmodyfikowano więc model, wprowadzając kontakt w obszarach rozciągania na styku murowanej ściany i betonowej bazy. Uzyskane rezultaty dla modelu dwusegmentowego z jednym pilastrzem ilustrują jakościową zmianę wyników – wzrost nośności o 24%. Wynika z nich, że uwzględnienie możliwości rozwarstwienia na styku muru i płyt betonowych w modelu ma znaczny wpływ na uzyskaną numerycznie nośność ściany. Mogłoby to skutkować także napotkanymi problemami z uzyskaniem zbieżnego rozwiązania w modelu z kontaktem, zbudowanym dla dłuższej – trzysegmentowej ściany. Po uwzględnieniu kontaktu poza nośnością zmienia się również sztywność ściany w początkowej fazie jej pracy, a zależność  $R_{hor} - u_x$  staje się bardziej liniowa.

Ostatnia analiza modelu z pilastrami dotyczyła dłuższej ściany z otworem okiennym. Pokazuje ona spodziewany spadek nośności: o 7,3% w stosunku do modelu bez pilastrów oraz aż o 14,0% w stosunku do modelu z pilastrami. Charakterystyka krzywej  $R_{hor} - u_x$  (reakcja-przemieszczenie) dla modelu z otworem wyróżnia się również nieco bardziej płaskim przebiegiem przed osiągnięciem nośności ściany przez siłę ścinającą.

Rysunek 15 pokazuje podobne zestawienie wyników dla ścian wzmocnianych rdzeniami żelbetowymi. Wzmocnienie to zwiększa ich nośność w stosunku do ścian bez wzmocnień odpowiednio: w przypadku ściany krótszej, dwusegmentowej o 3,4%, a ściany dłuższej, trzysegmentowej o 4,3%.

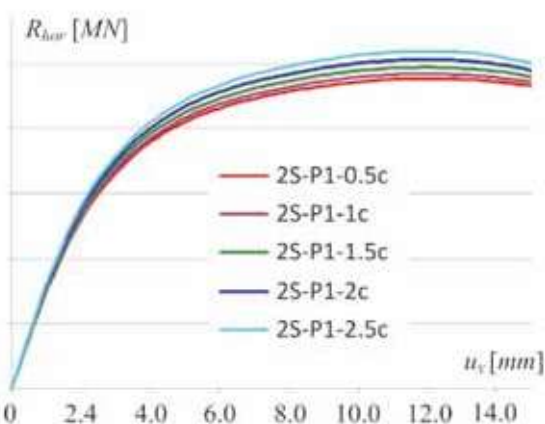
Uwzględnienie w modelach z rdzeniami kontaktu pomiędzy murem a elementami żelbetowymi powoduje wzrost

nośności ścian o 27,0% i 23,0%, co pokrywa się z wynikami uzyskanymi dla pilastrów, gdzie uzyskano podobne rezultaty. W tym przypadku potwierdził się również charakter zależności siła pozioma – poziome przemieszczenie ( $R_{hor} - u_x$ ). Na podstawie otrzymanych wyników można jedynie powiedzieć, iż zbudowane modele MES, niedopuszczające do odrywania na styku muru i betonowej bazy, niedoszacowują nośność ściany, dając znaczny zapas bezpieczeństwa. Trzeba jednak pamiętać, że ten numeryczny model stanowi jedną, wyizolowaną ścianę, a rzeczywista ściana współpracuje zwykle z pozostałymi elementami budynku, np. ścianami poprzecznymi, których w tym przypadku brak. Ściany poprzeczne pomniejszyłyby zasięg, a więc i wpływ odrywania na wyniki. Trudno też mieć tutaj absolutną pewność bez uzyskania rozwiązania np. czwartego zadania kontaktowego (3S-P2-K zakończony niepowodzeniem) lub podobnego inną metodą. Wyjaśnienie tych wątpliwości wymaga dalszych analiz problemu.



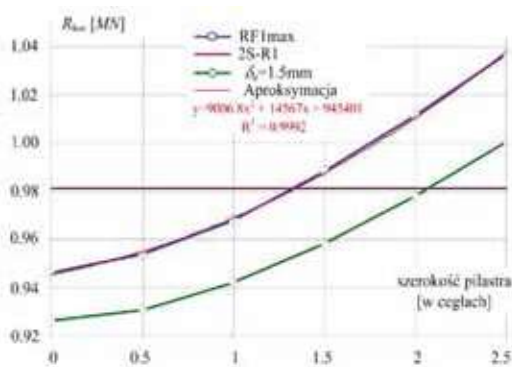
**Rys. 16. Wpływ pojedynczego wzmocnienia krótszej ściany: 2S – model bez wzmocnień, P1 – pojedynczy pilastr, R1 – pojedynczy rdzeń, R1-K – uwzględnienie kontaktu między ścianą a bazą pozwalający na ich odrywanie**

**Fig. 16. Single pilaster or single core strengthening effect on a wall: 2S – two-segment wall without strengthening, P1 – single pilaster, R1 – single reinforced concrete core, R1-K – result involving contact between wall and base allowing for their separation**



**Rys. 17. Wyniki dla ściany 2-segmentowej wzmocnionej pilastrzem o różnych szerokościach: ½c÷2½c – szerokość pilastra podana w krotności długości cegły**

**Fig. 17. Results for two-segment wall strengthened with a pilaster of different width: ½c ÷ 2½c – width of the pilaster as a number of wall brick lengths**



Rys. 18. Wpływ szerokości pojedynczego pilastra na nośność ściany 2-segmentowej:  $\frac{1}{2}c \div 2\frac{1}{2}c$  – szerokość pilastra podana w krotności długości cegły

Fig. 18. Effect of the width of the pilaster on the two-segment wall load carrying capacity:  $\frac{1}{2}c \div 2\frac{1}{2}c$  – width of the pilaster as a number of wall brick lengths

Jeśli chodzi o wpływ wycięcia otworu w już wyciętej ścianie na jej pracę, to model dwusegmentowy z dwoma pilastrami oraz oknem (2S-P2-O) pokazuje podobny jak poprzednio, niemal 15-procentowy spadek nośności w stosunku do nieosłabionej otworem ściany, ale również aż 11-procentowy spadek względem modelu bez wzmocnień. W przypadku pilastrów ostatnia wartość wynosiła 7,0%.

Porównując przedstawione wykresy można wnioskować, że zastosowanie rdzeni żelbetowych 14x14 cm jako wzmocnienia ścian zamiast dwustronnych pilastrów szerokości 2 cegiel powoduje o połowę mniejszy przyrost nośności wzmocnianej ściany. W przypadku gdy zmniejszono szerokość pilastrów do jednej cegły uzyskano tylko jedną czwartą wzrostu w stosunku do oryginalnych dwa razy szerszych pilastrów (rys. 16).

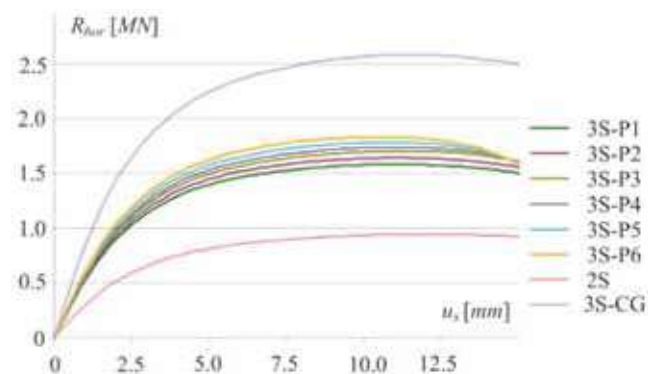
Analizując zestawienie wyników przedstawione na wykresach z rys. 17 oraz rys. 18, a pokazujące wpływ szerokości pilastrów na nośność ściany, można wnioskować jakiej szerokości pilastry odpowiadają wzmocnieniu uzyskanych za pomocą rdzeni 14x14 cm.

Jak można zauważyć nośność ściany wzrasta praktycznie z kwadratem szerokości pilastra. Zastosowanie wzmocnienia pilastrami o szerokości dwóch cegieł daje około 10-procentowy wzrost nośności, a powyżej tej szerokości nośność ściany rośnie niemal liniowo o około 2,5% na każde  $\frac{1}{2}$  cegły przyrostu szerokości pilastra. Wzmocnieniu ściany o grubości  $1\frac{1}{2}$  cegły, w postaci jednego rdzenia 14x14 cm odpowiada dwustronny pilaster o szerokości mniej więcej  $1\frac{1}{4}$  długości cegły i grubości  $\frac{1}{2}$  cegły. Taką regułą można sformułować odnośnie analizowanego modelu numerycznego, który odpowiada niezależnej ścianie z jednym pilastrami po środku. W rzeczywistym obiekcie ściany poprzeczne stanowiłyby dodatkowe usztywnienie swobodnych boków, którego brak w omawianym modelu numerycznym.

Wykresy na rys. 19 wykonano na podstawie analiz modeli z różną liczbą pilastrów rozłożonych (niemal) równomiernie na długości ściany trzysegmentowej. Dla porównania zamieszczono także wyniki dla ściany bez wzmocnień (3S) oraz z taką liczbą pilastrów (3S-CG), że łączą się one w jedną powierzchnię tworząc ścianę grubszą o 1 cegłę w stosunku do pierwotnej o grubości  $1\frac{1}{2}$  cegły. Szczególnie interesujące jest zestawienie nośności maksymalnych  $R_{hor}(max)$  oraz wartości sił odpowiadających maksymalnemu analizowanemu przemieszczeniu  $R_{hor}(u_x=1.5mm)$ , uzyskanych po osłabieniu zniszczonej ściany na rys. 20. Pierwsza krzywa rośnie niemal liniowo, wykazując – pomiędzy jednym wzmocnieniem a sześcioma pilastrami – wzrost nośności o około 16,0%.

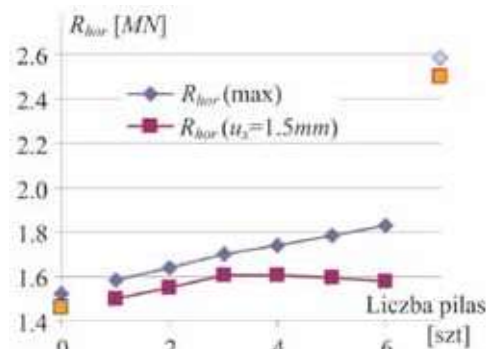
Druga krzywa początkowo również rejestruje podobny wzrost, ale przy około 3÷4 pilastrów siła przenoszona przez osłabioną zniszczeniem ścianę przestaje wzrastać, a nawet zaczyna maleć. Trzeba pamiętać, że w modelu numerycznym zastosowano wymuszenie kinematyczne, ograniczające samo przemieszczenie  $\delta$  ściany, podczas gdy w rzeczywistej konstrukcji na ogół brak jest takiego „hamulca przemieszczeń”. Zatem nic nie powstrzymałoby narastania przemieszczeń pod działaniem niszczącego obciążenia aż do całkowitego zniszczenia ściany. Opadająca krzywa  $R_{hor} - u_x (u_x=1.5mm)$  dla większej liczby pilastrów może zatem świadczyć o coraz większej gwałtowności niszczenia tak wzmocnianego muru, po przekroczeniu jego nośności.

Interesujący jest przeskok wyników pomiędzy modelami ścian wzmocnianych pilastrami a gładką, jednolitą ścianą o grubości równej sumie grubości oryginalnej ściany oraz jej pilastrów. Geometria tej ostatniej stanowi graniczny przypadek zwiększania zagęszczenia pilastrów, aż do uzyskania jednolitej powierzchni. Otrzymany, 41-procentowy wzrost nośności pomiędzy modelem z maksymalną, możliwą na długości, liczbą 6. pilastrów a jednolitą, grubszą o pilastry ścianą, odpowiada mniejszej o 40,0% grubości oryginalnej ściany ( $1\frac{1}{2}$  cegły) w stosunku do jednolitej pogrubionej ściany ( $2\frac{1}{2}$  cegły). Nośność ściany z pilastrami zależy głównie od nośności cieńszych fragmentów ściany - występującej pomiędzy wzmocnieniami. Analizowana tutaj ściana z gęsto rozstawionymi pilastrami zawiera pomiędzy nimi przestrzenie o grubości o 40,0% mniejszej od sumarycznej grubości ściany i pilastrów.



Rys. 19. Wyniki dla ściany trzysegmentowej 3S z różną liczbą pilastrów: P1-P6 – liczba pilastrów szerokości 2 cegiel, CG – cała grubszą ścianą

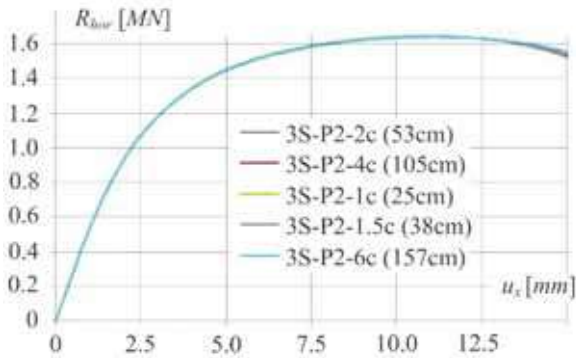
Fig. 19. Results for the three-segment wall 3S with different number of pilasters: P1-P6 – number of pilasters (two-brick wide), CG – fully thicker wall



Rys. 20. Wpływ liczby pilastrów (szerokości 2 cegiel) na nośność ściany 3 segmentowej (S3)

Fig. 20. Effect of the number of pilasters (two-brick-wide each) on load carrying capacity of the three-segment wall S3





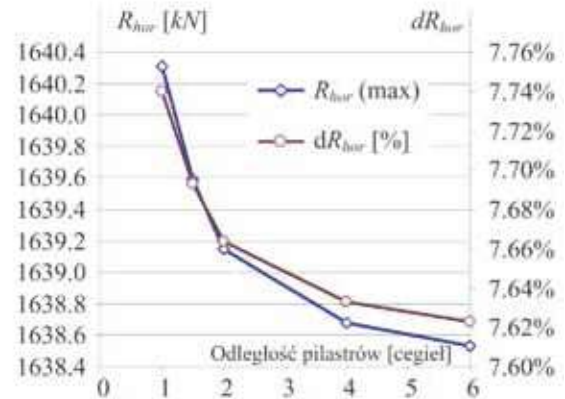
Rys. 21. Wyniki dla różnych odległości pomiędzy dwoma pilastrami (P2) (szerokości 2 cegieł) na ścianie 3-segmentowej (3S) (krzywe praktycznie pokrywają się)

Fig. 21. Results for various distances between two pilaster (two-brick-wide) on the three-segment wall S3 behaviour: (practically overlapping curves)

Zatem regularnie powtarzające się na długości ściany osłabienie na całej jej wysokości skokowo zmniejsza nośność ściany na ścinanie – proporcjonalnie do spadku grubości w miejscu takiego osłabienia. Dodanie lokalnego, periodycznego wzmocnienia do ściany o oryginalnej grubości nie będzie tak skuteczne jak zastosowanie jednolitej – grubszej ściany na całej powierzchni. Z uwagi na to, że zastosowany materiał i technologia nie pozwalają dowolnie stopniować grubości ściany, użyteczne mogłyby być analizy opłacalności zastosowania możliwych alternatyw: pilastry, rdzenie albo grubsza ściana.

Kolejny zestaw wykresów (rys. 21 i rys. 22) przedstawia wpływ odległości pomiędzy dwoma pilastrami (P2) na ścianie trzysegmentowej (3S) na jej nośność. W analizowanym zakresie 1÷6 cegieł odległości oraz przy braku innych wzmocnień (lub nawet usztywnień końców ściany przez ściany poprzeczne) wpływ ten istnieje i jest regularny, ale pomijalnie mały, gdyż rzędu 1.5 promila.

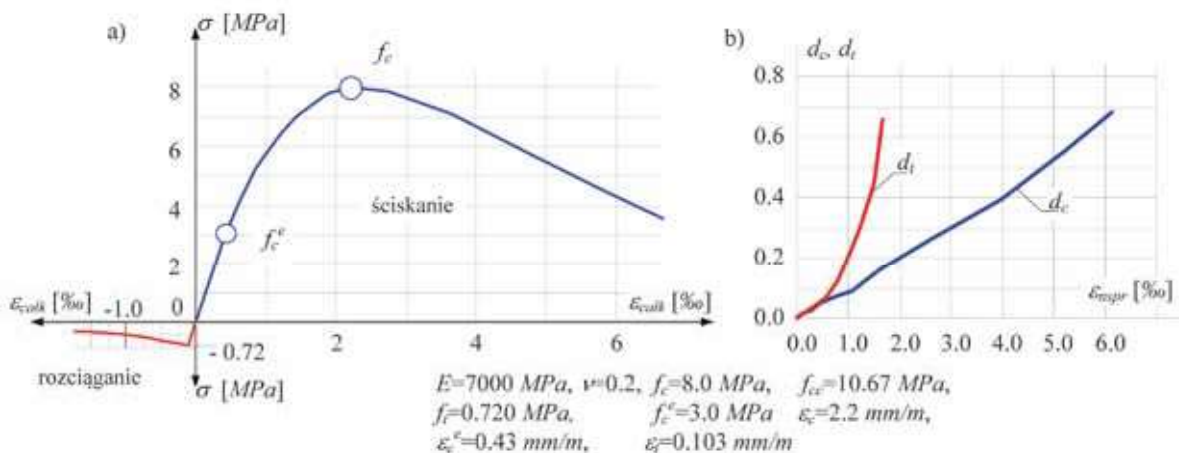
Na zakończenie przedstawiamy niektóre wyniki analiz ścinanych ścian, otrzymane przy zmianie materiału ścian.



Rys. 22. Wpływ odległości pomiędzy dwoma pilastrami (P2) ściany 3-segmentowej (3S) na jej nośność  $R_{hor}$ (max) oraz jej porównanie do ściany bez wzmocnień  $dR_{hor}$

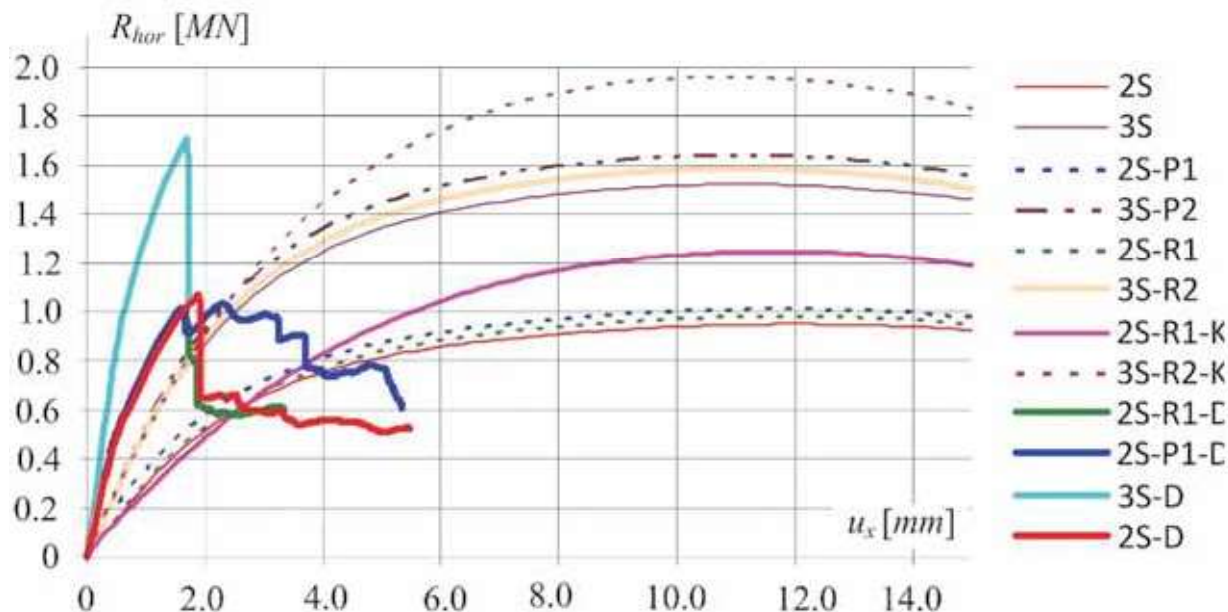
Fig. 22. Effect of distance between two pilasters (P2) on load carrying capacity  $R_{hor}$ (max) of the three-segment wall S3 and comparison with a wall without pilasters  $dR_{hor}$

Na rys. 24 zestawiono omawiane tutaj rozwiązania dla ścian odkształcalnych, tzw. „miękkich” (rys. 14 i rys. 15), dla których charakterystyki materiałowe i pozostałe dane podano na rys. 13, na tle wyników dla ścian „sztywnych” i wykonanych na mocnej zaprawie, stosowanych do analiz ścian w (Bartoszek, Fedorowicz J. 2008, Bartoszek, Fedorowicz J. 2009), o charakterystykach materiałowych zamieszczonych na rys. 23, a oznaczonych na rys. 24 literą „D”. Z porównania uzyskanych wyników można wnioskować, że wzrost nośności ściany bardziej zależy od jej proporcji wymiarów niż od materiału, z którego jest wykonana. Widoczna jest również wyraźna różnica w mechanizmie nagłego i szybkiego niszczenia analizowanych fragmentów ścian sztywnych. Można także zauważyć, że zmiana materiału na mocniejszy spowodowałaby wzrost nośności ściany tego samego rzędu jak wzmocnienie dwustronnymi pilastrami szerokości 2 cegieł, wykonane z materiału miękkiego (np. wykres 3S-D i 3S-P2 – rys. 24).



Rys. 23. Charakterystyki wzmocnienia s-e oraz funkcje zniszczenia przy ściskaniu (niebieska linia) dc i rozciąganiu (czerwona linia) dt materiału analizowanych ścian

Fig. 23. Strengthening characteristics s-e and functions of destruction at compressive dc (blue line) and tensile dt (red line) of the analyzed material of walls



Rys. 24. Zestawienie wybranych wyników uzyskanych dla ściany „miękkiej” (odkształcalnej, charakterystyki materiałowe z rys. 13) na tle rozwiązania dla ściany sztywnej (charakterystyki materiałowe z rys. 23 i rys. 13)

Fig. 24. Selected results obtained for the wall of „soft” type (deformable with material characteristics from Fig. 13) against rigid wall solution (material characteristics from Fig. 23 and Fig. 13)

## 5. Podsumowanie i wnioski

Analizy MES wykonane dla ścian wzmocnionych pilastrami lub rdzeniami zdają się dawać dokładniejsze oszacowanie nośności w przypadku uwzględnienia możliwości odrywania na styku ścinanego muru i betonowej bazy (wieńca lub stropu) w rozciąganych narożach ściany. Niedoszacowanie nośności ścinanej ściany w modelach pozbawionych możliwości odrywania, wiąże się ze znaczną zmianą sztywności ściany wraz z jej degradacją w rozciąganych narożach, w których w pierwszej kolejności rozpoczyna się proces niszczenia materiału. Tym samym oczekiwane uzależnienie nośności ściany od uszkodzeń propagujących się ukośnie w jej środkowych obszarach – co lepiej odpowiadałoby faktycznemu mechanizmowi niszczenia podczas ścinania – jest „wyprzedzane” przez wyczerpanie nośności w strefach odrywania. Modele pomijające możliwość odrywania w tych strefach dają, co prawda znaczny zapas bezpieczeństwa, ale w świetle otrzymanych wyników uzasadnienie takiego założenia jest problematyczne. Jednakże modele MES, w których uwzględniono odrywanie w strefach kontaktu betonu i muru są trudne do zbudowania w sposób zapewniający stabilne, zbieżne, a przez to wiarygodne rozwiązanie. W rzeczywistej konstrukcji, ściany są z reguły usztywniane przez ściany poprzeczne, których tu nie uwzględniono, a które mogłyby pomniejszyć zasięg i wpływ stref odrywania muru od betonowych baz (wieńców) na otrzymane wyniki. Rozwiązaniem mogłoby być zastosowanie pilastrów na skrajnych pionowych krawędziach – tak jak to zrobiono w niektórych, opisanych wcześniej analizach. Korzystny wpływ na efekt odrywania może mieć dociążenie górnej krawędzi ściany, np. przez większą liczbę kondygnacji, ale w tej pracy nie robiono takich analiz, zachowując stałe pionowe obciążenie – głównie ciężarem własnym. Pewne analizy wykonywano także pod obciążeniem górnej krawędzi ściany odpowiadającym tylko dwóm piętrům, nie zauważając znaczącej niwelacji efektu odrywania w narożach ściany rozciąganych na skutek ścinania. Wpływy wielkości pionowego dociążenia górnej krawędzi ściany na likwidację odrywania nie były przedmiotem osobnych, szczegółowych analiz, ale

być może pozwoliłyby one uzyskać więcej przesłanek do oceny warunków uzasadniających budowę numerycznych modeli z kontaktem lub bez kontaktu.

Jeśli chodzi o porównanie skuteczności wzmocnienia za pomocą pilastrów i rdzeni, to zastosowaniu jednego rdzenia 14 x 14cm (½ x ½ cegły) w ścianie o grubości 1½ cegły odpowiada dwustronny pilastr o szerokości około 1¼ długości cegły, przy jego grubości na ½ cegły.

Zastosowanie obustronnego pilastra szerokości 2 cegieł, grubości ½ cegły dla ściany 1½ cegły jak powyżej, daje około 10-procentowy wzrost nośności w stosunku do ściany bez wzmocnień. Nośność ściany rośnie wraz z kwadratem szerokości pilastra aż do powyższej wartości. Dalszy jej wzrost wynosi około 2,5% na każdą ½ cegły szerokości pilastra.

Odległość dwóch pilastrów, przy stałej ich liczbie na długości ściany (rys. 21 i rys. 22), nie ma praktycznego wpływu na jej nośność. Większe wzmocnienie ściany uzyskuje się zwiększając ilość pilastrów na tej samej długości ściany, jednakże taka strategia jest ograniczona stopniowym przyrostem kosztów wykonania, dając maksymalnie około 20-procentowy wzrost nośności (dla pilastrów grubości ½ cegły w stosunku do ściany 1½ cegły). Jednolita, ale grubsza ściana zyskuje na nośności proporcjonalnie do wzrostu swojej grubości – czyli dla powyższego przypadku o ok. 60%! O nośności ścinanej ściany z pionowymi pilastrami decyduje nośność jej najsłabszych i najszerzych fragmentów pomiędzy wzmocnieniami, położonych w pobliżu jej środka.

Stosując różne modele materiałowe w tym samym modelu geometrycznym można stwierdzić, że z punktu widzenia nośności ściany, ważniejsze niż materiał są proporcje ściany. Lepiej sprawdzi się konstrukcja ściany wykonana z materiału podatnego, a dodatkowo wzmocniona, niż bez wzmocnienia, ale wykonana ze sztywniejszego, lecz kruchego materiału.

## Podziękowania

Obliczenia numeryczne wykonano w części w Akademickim Centrum Komputerowym AGH-Cyfronet na podstawie przy-

znanych grantów obliczeniowych: nr MNiSW/SGI3700/PŚląska/054/2010, MNiSW/SGI3700/PŚląska/083/2007 oraz MNiSW/SGI3700/PŚląska/084/2007, a w części z wykorzystaniem Infrastruktury PL-Grid.

## Literatura

- BARTOSZEK M., FEDOROWICZ J. 2008 – Evaluation of the efficiency of (e-p-d) model applied for masonry structures. Proceedings on CD-ROM of the International Conference 70 Years of FCE STU, Slovakia, December 4-5, Bratislava p. 22.
- BARTOSZEK M., FEDOROWICZ J. 2009 – Numeryczna analiza pracy ścian murowych z zastosowaniem modelu sprężysto-plastycznego z degradacją. „Modelowanie Inżynierskie”, tom 6, nr 37, s.27÷34.
- CIŃCIO A. 2004 – Numeryczna analiza dynamicznej odporności niskiej zabudowy na wstrząsy parasejsmiczne z zastosowaniem przestrzennych modeli wybranych obiektów. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice.
- CIŃCIO A. 2005 – Dynamic Comparative Analysis of Many-Storey Buildings Using Nonlinear Material Model. Proceedings of the 4th International Conference on New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, October 20-21, Slovakia, Bratislava.
- CIŃCIO A., FEDOROWICZ J. 2017 – Budowle ścianowe na terenach górniczych o deformacjach nieciągłych. Część 2 – Analizy numeryczne. „Przeгляд Górnicy”, nr 5, s. 3949.
- CIŃCIO A., MROZEK D., MROZEK M. 2007 – Numeryczna symulacja działania wstrząsu sejsmicznego na budynek murowy z zastosowaniem plastyczno-degradacyjnego modelu materiału. Materiały XLVI Sympozjonu nt. Modelowanie w mechanice, Wisła.
- FEDOROWICZ J. 2008a – Zagadnienie kontaktowe budowla – podłoże gruntowe. Część II. Kryteria tworzenia i oceny modeli obliczeniowych układów konstrukcja budowlana – podłoże górnicze. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria „Budownictwo”, nr 1805, z. 114.
- FEDOROWICZ J. 2008b – Criteria for evaluation of masonry-structure behaviour in mining areas. Architecture Civil Engineering Environment, vol. 1, No. 2, pp. 35÷42.
- FEDOROWICZ L. 2006 – Zagadnienia kontaktowe budowla – podłoże gruntowe. Część I. Kryteria modelowania i analiz podstawowych zagadnień kontaktowych konstrukcja budowlana – podłoże gruntowe. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria „Budownictwo”, nr 1729, z. 107.
- FEDOROWICZ L., FEDOROWICZ J. 2002 – Contact boundary value tasks in civil engineering – structure-subsoil interaction problems. Proceedings of the International Conference New Trends in statics and dynamics of buildings, Bratislava, p. 283-286.
- FEDOROWICZ L., FEDOROWICZ J. 2004 – Rola modelu obliczeniowego w ocenie wytrzymałości konstrukcji budowli zginanej na podłożu górniczym. Materiały II Konferencji Naukowo-Technicznej „Problemy projektowania i ochrony obiektów budowlanych na terenach górniczych”. Rudy Raciborskie, s. 97-112.
- HIBBITT, KARLSSON & SORENSEN, Inc. 2002 – Dokumentacja programu ABAQUS v.6.3.1, m.in: Getting Started with ABAQUS/Standard: Interactive Version; ABAQUS/Standard User's Manual; ABAQUS/CAE User's Manual, ABAQUS Example Problems Manual, ABAQUS Theory Manual.
- Instrukcje, wytyczne, poradnik 364/2007 – Wymagania techniczne dla obiektów budowlanych wznoszonych na terenach górniczych, Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa.
- KADELA M., CHOMACKI L. 2014 – Wpływ rodzaju gruntu na stan naprężenia w konstrukcji budynku w obliczu eksploatacji górniczej. „Przeгляд Górnicy”, nr 6, s. 24÷29.
- KRATZSCH H. 1983 – Mining Subsidence Engineering. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- KUBICA, J. 2003 – Niezbrojone ściany murowe poddane odkształceniom postaciowym wywołanym nierównomiernymi pionowymi przemieszczeniami podłoża. Zeszyty Politechniki Śląskiej, seria „Budownictwo”, z. 96.
- KWIATEK J. i inni 1997 – Ochrona obiektów budowlanych na terenach górniczych. Wydawnictwo Głównego Instytutu Górnictwa, Katowice.
- LEE J. 1996 – Theory and Implementation of Plastic-Damage Model for Concrete Structures under Cyclic and Dynamic Loading. Licentiate of Engineering Thesis. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California USA, Berkeley.
- LEE J., FENVES G. L. 1994 – Numerical Implementation of Plastic-Damage Model for Concrete under Cyclic Loading: Application to Concrete Dam. Report UCB/SEMM-94/03, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.
- LEE J., FENVES G. L. 2001 – A return-mapping algorithm for plastic-damage models: 3-D and plane stress formulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 50, pp. 487÷506.
- LOPEZ J., OLLER S., OÑATE E., LUBLINER J. 1999 – Homogeneous Constitutive Model for Masonry. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol.46, pp. 1651÷1671.
- LOURENÇO P.B., VASCONCELOS G., GOUVEIA J.P., HAACH V., FREITAS J.F. 2008 – Validation of masonry systems for in-plane lateral loading using truss reinforcement, Proceedings of 14th International Brick/Block Masonry Conference, Eds. M. Masia et al., University of Newcastle, CD-ROM, pp. 10.
- LUBLINER J., OLIVER J., OLLER S., OÑATE E. 1989 – A Plastic-Damage Model for Concrete. International Journal of Soilds and Structures, vol. 25, pp. 299÷329.
- LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER S., OÑATE E. 1990 – Finite Element Nonlinear Analysis of Concrete Structures Using a Plastic-Damage Model. Engineering Fracture Mechanics, vol. 35, No. 1/2/3, pp. 219÷231.
- MROZEK D. 2010 – Nieliniowa analiza numeryczna dynamicznej odpowiadzi uszkodzonych budynków. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice.
- MROZEK D., MROZEK M., FEDOROWICZ J. 2014 – Ochrona budynków murowanych na terenie górniczym. Część 2 – porównanie analiz klasycznych i współczesnych. „Przeгляд Górnicy”, nr 8, s.93-101.
- MROZEK M. 2012 – Numeryczna symulacja wzmacniania matami CRFP konstrukcji murowych z cegły. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice.
- PARKASIEWICZ B., SŁOWIK L. 2012 – Rozwój uszkodzeń konstrukcji budynków wielorodzinnych w zabudowie szeregowej, zlokalizowanych na terenie oddziaływań eksploatacji górniczej. Praca zbiorowa pod redakcją Andrzeja Kowalskiego: Ochrona Obiektów na Terenach Górniczych. GIG, Katowice. s. 220÷228.
- Praca zbiorowa 1980 – Ochrona powierzchni przed szkodami górniczymi. Wydawnictwo Śląsk, Katowice.
- WAWRZYNEK A., CIŃCIO A. 2005 – Adaptation of a plastic-damage concrete model for masonry material subjected to cyclic load. Proceedings of the VIII International Conference on Computational Plasticity, COMPLAS VIII, Barcelona.
- WAWRZYNEK A., CIŃCIO A. 2007 – Numerical Reconstruction of Laboratory Brickwork Tests, IX International Conference on Computational Plasticity COMPLAS IX CIMNE, Barcelona.
- WAWRZYNEK A., CIŃCIO A., FEDOROWICZ J. 2006 – Numerical Verification of the Barcelona Model Adapted for Brick Walls. Proceedings of the 7th International Masonry Conference (7IMC), 30/31 October – 1 November, London, p. 84.

Artykuł wpłynął do redakcji – sierpień 2017  
Artykuł akceptowano do druku 20.10.2017