Czynnik niezawodności w modelowaniu podróży i prognozowaniu ruchu

Szymon KLEMBA[1]

Streszczenie
W artykule rozważano możliwości uwzględniania czynnika niezawodności technicznej w modelach przewozów pasażerskich. Scharakteryzowano czteroetapowe podejście do modelowania podróży i prognozowania ruchu. Przedstawiono model międzygałęziowego podziału przewozów, który jest potencjalnym miejscem do powiązania zagadnień niezawodności i modelowania przewozów. Opisano również sposób uwzględnienia czynnika niezawodności przez współczynnik gotowości technicznej. Całość zilustrowano przykładem prezentującym wpływ czynnika niezawodności na uzyskiwane wyniki udziału w pracy przewozowej. Artykuł zakończono podsumowaniem, z którego wynika, że w modelowaniu przewozów pasażerskich można uwzględniać czynnik niezawodności technicznej, zwłaszcza w przypadku istotnego wpływu tego czynnika na zjawiska dotyczące badanego systemu transportowego.

Słowa kluczowe: modelowanie podróży, niezawodność, przewozy pasażerskie, czas podróży

1. Wstęp

System transportowy jest złożony z wielu obiektów technicznych i może być przedmiotem zainteresowań dyscypliny jaką jest teoria niezawodności. Pojęcie systemu jest definiowane jako celowo określony zbiór elementów oraz relacji zachodzących pomiędzy tymi elementami i ich właściwościami [8]. Aby lepiej zbadać właściwości i sposób zachowania się systemu transportowego lub jego poszczególnych elementów, tworzy się modele tych systemów. Model jest odwzorowaniem fragmentu rzeczywistości i jest narzędziem procesu modelowania. Wykorzystywany jest zatem do badań nad rzeczywistymi obiektami. Rzeczywiste obiekty techniczne charakteryzują się wieloma cechami określającymi ich funkcje. Jedną z nich jest niezawodność techniczna rozumiana jako prawdopodobieństwo spełnienia przez obiekt (w tym wypadku system transportowy) stawianych mu wymagań [7]. Spełnianie przez system techniczny swoich funkcji jest tak naprawdę

[1] Mgr inż.; Instytut Kolejnictwa; e-mail: sklemba@ikolej.pl.

istotą jego istnienia. Wydaje się, że modelowanie czynnika niezawodności powinno mieć miejsce podczas modelowania systemów transportowych (np. modelowania podróży lub prognozowania ruchu), a nie tylko podczas budowy modeli ściśle przeznaczonych do badań niezawodności danego obiektu (systemu). W niniejszym artykule podjęto próbę odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób można uwzględniać czynnik niezawodności podczas modelowania systemu transportu pasażerskiego, a ściślej – modelowania przewozów pasażerskich.

2. Czynniki uwzględniane w modelach przewozów

Modele o jakich mowa w tym artykule, są modelami matematycznymi w odróżnieniu od modeli fizycznych lub opisowych. Jednym z etapów modelowania matematycznego jest wybór kategorii modelu i określenie jego struktury [2, 4], czyli między innymi ustalenie, jakie czynniki będą brane pod uwagę podczas procesu modelowania, i przez jakie zmienne będą uwzględnione w modelu.

Modele matematyczne można podzielić na różne kategorie [4], w zależności od kryterium przyjętego podziału. Modele mogą być statyczne lub dynamiczne, jeśli ich parametry ulegają zmianie wraz z upływem czasu. Prawdopodobieństwo przyjmowania wartości przez poszczególne parametry różnicują modele na deterministyczne (wartość pewna, określona) i stochastyczne (zmienne losowe). Sposób powiązania poszczególnych zmiennych za pomocą funkcji różnicuje modele liniowe i nieliniowe. Praktyka modelowania pokazuje, że najczęściej powstają modele hybrydowe, które łączą w sobie cechy różnych kategorii. Przykładowo można także przyjąć, że uwzględnienie choćby jednego parametru opisanego procesami stochastycznymi, powoduje uznanie całego modelu za stochastyczny.

Modelowanie przewozów pasażerskich zasadniczo opiera się na zastosowaniu czteroetapowego podejścia, składającego się z następujących etapów: generowanie podróży, dystrybucja potoków, podział międzygałęziowy oraz rozłożenie potoków na sieć transportową [5]. Na różnych etapach budowy modelu czteroetapowego bierze się pod uwagę inne czynniki opisane przez zmienne, które uważa się za istotne z punktu widzenia celu modelowania (znaczenie poszczególnych zmiennych i ich oddziaływanie na końcowe wyniki można badać metodami statystycznymi). Mogą to być czynniki demograficzne, ekonomiczne, społeczne jak również polityczne [5]. Poszczególnymi etapami modelu zatem są: etap generowania podróży, etap dystrybucji podróży, etap podziału modalnego (międzygałęziowego), etap wyboru drogi w sieci transportowej [3].

Etap pierwszy – etap generowania podróży, ma na celu utworzenie matematycznego opisu uzależniającego liczbę podróży rozpoczynających się lub kończących się w danym obszarze (rejonie transportowym) od wybranych czynników (zmiennych) opisujących ten obszar. Czynniki te różnicuje się w zależności od typu rozważanych podróży, wśród których można wyróżnić podróże z / do pracy lub miejsca nauki, podróże związane z zakupami, podróże związane z rekreacją lub sprawami osobistymi. Jako czynniki związane z generowaniem podróży można wskazać gęstość zaludnienia, strukturę gospodarstw domowych, przychód, wartość terenu, użytkowanie samochodów. Jednym z najprostszych sposobów na powiązanie czynników z liczbą generowanych lub absorbowanych (pochłanianych) podróży jest wskaźnikowy model wzrostu, gdzie wskaźniki są określane na zasadzie liniowej zależności z rozważanymi czynnikami. Nieco bardziej wyrafinowanym sposobem jest badanie regresji liniowej funkcji wielu zmiennych i badanie współczynnika dopasowania R^2 opisującego zgodność modelu z danymi rzeczywistymi. W takim przypadku liczbę podróży oblicza się za pomocą dobranej funkcji na podstawie wartości poszczególnych zmiennych [9].

Etap drugi – dystrybucja podróży, ma na celu powiązanie potoków generowanych i pochłanianych, w wyniku czego uzyskuje się macierz źródło – cel podróży. Na tym etapie ustala się, ile podróży mających początek w danym rejonie transportowym ma swój cel w pozostałych rejonach transportowych. Służy do tego model grawitacyjny. Jako czynnik odpowiadający odległości z klasycznego modelu newtonowskiego, bierze się pod uwagę całkowity uogólniony koszt podróży. Koszt ten składa się z kilku składowych z parametrami dobranymi podczas kalibracji modelu: czasu jazdy w pojeździe, czasu dotarcia na przystanek i z przystanku, czasu oczekiwania na pojazd, kosztu przejazdu, kosztów związanych z jakością podróży (np. komfortem). Masie i stałej **G** z modelu newtonowskiego odpowiadają dobrane wielkości, takie jak liczba mieszkańców oraz inne charakteryzujące rejon transportowy wraz ze współczynnikami. Rozwiązanie modelu grawitacyjnego wyznacza strukturę podróży źródło – cel.

Oddzielnym problemem jest wyznaczanie zmian liczby podróży w poszczególnych relacjach przewozowych (pomiędzy poszczególnymi rejonami transportowymi) dla kolejnych analizowanych okresów (horyzontów prognozy). Stosuje się tutaj trzy metody: metodę jednego współczynnika wzrostu (zakładającą stały współczynnik wzrostu dla wszystkich elementów macierzy), metodę z jednym ograniczeniem (zachowującą dokładne wartości współczynników dla wielkości generowanych albo pochłanianych podróży) i metodę z dwoma ograniczeniami (zachowującą wartości współczynników wzrostu zarówno dla wielkości generowanych i pochłanianych podróży) [9, tłumaczenie autora].

Etap trzeci – podziału międzygałęziowego określa udziały poszczególnych środków transportu w całkowitej wielkości przewozów w poszczególnych relacjach przewozowych. Jednym z najczęściej stosowanych modeli jest wielomianowy model logitowy, którego proste przykłady zastosowania przedstawiono w [5, 10]. Wymaga on zdefiniowania czynników wpływających na wybór środka transportu. Najczęściej jest to czas i koszt podróży uzupełnione zmiennymi związanymi z dostępnością danego środka transportu lub jakością przewozów.

Zmienne te składają się na funkcję użyteczności danego środka transportu, za pomocą której określa się prawdopodobieństwa wyboru poszczególnych środków transportu. Model logitowy opisano w dalszej części artykułu, przy okazji rozważań na temat implementacji czynnika niezawodności.

Etap czwarty – modelowania, czyli etap rozkładu potoków pasażerskich na sieć transportową, wymaga określenia kryteriów, według których przydzielana jest ścieżka (droga w sieci transportowej) dla danej podróży. Istnieje wiele metod wykonywania rozkładów potoków na sieć transportową, w tym przeznaczonych zwłaszcza dla transportu indywidualnego, jak i publicznego. Wśród nich można wymienić metodę rozłożenia równowagi [4, 9], metodę przyrostów [9], metodę kolejnych średnich [9], metodę „wszystko albo nic" [9]. Metody te nie są przedmiotem niniejszego artykułu, dlatego zostały jedynie wspomniane.

Po scharakteryzowaniu standardowego podejścia do modelowania przewozów, dalszym przedmiotem rozważań jest odpowiedź na pytanie, w jaki sposób uwzględniać w modelu czynnik niezawodności.

3. Miejsce czynnika niezawodności w modelach przewozów

Odpowiedź na pytanie, na którym etapie modelowania czteroetapowego należałoby uwzględniać zagadnienie niezawodności, może ułatwić postawienie dodatkowego pytania: na którym etapie podróży, od chwili pojawienia się potrzeby przemieszczenia do osiągnięcia jej celu, niezawodność techniczna ma duże znaczenie. Jednoznacznie można stwierdzić, że ma ona znaczenie na etapie samego przewozu, kiedy wykorzystywane są środki techniczne. Zatem niezawodność przewozu – odbycia podróży zależy przede wszystkim od środka transportu, który wykorzystuje się do przemieszczenia. Wynika stąd, że czynnik niezawodności należy uwzględniać na etapie podziału międzygałęziowego. Ważną kwestią jest to, którą z charakterystyk niezawodności zaimplementować w takim modelu. Mogą to być zarówno charakterystyki funkcyjne (funkcja niezawodności, funkcja intensywności uszkodzeń, funkcja wiodąca), jak i charakterystyki liczbowe (oczekiwany czas zdatności, współczynnik gotowości) [1].

Model podziału międzygałęziowego określa prawdopodobieństwo wyboru danego środka transportu podczas podróży w określonej relacji przewozu. Prawdopodobieństwo to jest zazwyczaj wyrażane z zastosowaniem tzw. modelu logitowego [5, 8, 10]. Zatem prawdopodobieństwo $p^{s}_{(i,j)}$ wyboru środka transportu s podczas podróży w relacji (i,j) można wyrazić wzorem:

$$p^{s}_{(i,j)} = \frac{e^{V^{s}_{(i,j)}}}{\sum_{s} e^{V^{s}_{(i,j)}}},$$

gdzie:

(i, j) – relacja przewozu,
s – środek transportu,
e – liczba Eulera,
$V^s_{(i,j)}$ – funkcja użyteczności s-tego środka transportu podczas podróży w relacji (i,j).

Funkcja użyteczności $V^s_{(i,j)}$ może mieć postać [6]:

$$V^s_{(i,j)} = \gamma(GC^s_{(i,j)}),$$

gdzie:

γ – parametr kalibracji,
$GC^s_{(i,j)}$ – koszt uogólniony (ang. *generalized cost*) podróży.

Uogólniony koszt podróży może składać się z wielu składników, wśród których podstawowymi są: czas podróży pomnożony przez wartość tego czasu oraz koszt podróży. Zatem koszt ten można wyrazić jako:

$$GC^s_{(i,j)} = C^s_{(i,j)} + W_{o\tau} \sum_h w^s_{h(i,j)} \tau^s_{h(i,j)},$$

gdzie:

$C^s_{(i,j)}$ – koszt przejazdu s-tym środkiem transportu,
$W_{o\tau}$ – wartość czasu (ang. *value of time*),
$\tau^s_{h(i,j)}$ – czas trwania h-tego elementu podróży z wykorzystaniem s-tego środka transportu w relacji przewozu (i,j),
$w^s_{h(i,j)}$ – waga czasu trwania h-tego elementu podróży z wykorzystaniem s-tego środka transportu w relacji przewozu (i,j).

Jednym z elementów podróży jest średni czas oczekiwania na połączenie. Zakładając jednostajny (równomierny) rozkład zgłoszenia się podróżnych na przystanku, można przyjąć średni czas oczekiwania jako połowę częstotliwości kursowania, wtedy $\tau^s_{h(i,j)}$ oznacza średni odstęp czasowy pomiędzy poszczególnymi kursami umożliwiającymi podróż w relacji (i,j), a wielkość $w^s_{h(i,j)}$ przyjmuje wartość 0,5. Warto zauważyć, że w przypadku równodostępowego (cyklicznego) rozkładu jazdy $\tau^s_{h(i,j)}$ jest równy połowie cyklu takiego rozkładu.

Proponowaną charakterystyką, którą można uwzględniać w modelach podziału międzygałęziowego jest współczynnik gotowości technicznej obiektu, konkretniej danego środka transportu (autobusu, tramwaju, pociągu, samochodu osobowego). Od gotowości technicznej zależy między innymi to, czy dany kurs środka transportu publicznego jest realizowany. Brak realizacji danego kursu wpływa na całkowity czas podróży (konieczność dodatkowego oczekiwania na alternatywne połączenie). Gotowością techniczną obiektu technicznego nazywa się prawdopodobieństwo znajdowania się obiektu w stanie zdatności [1]. Innymi słowy jest to prawdopodobieństwo, że obiekt jest w danej chwili gotowy do pełnienia swych funkcji [7]. Gotowość techniczna może być wyrażana przez asymptotyczny współczynnik gotowości technicznej [7]:

$$K = \lim_{t \to \infty} K(t) = \frac{ET}{ET + E\Theta},$$

gdzie:

K – asymptotyczny współczynnik gotowości,
$K(t)$ – funkcja gotowości technicznej obiektu,
ET – oczekiwany czas zdatności obiektu,
$E\Theta$ – oczekiwany czas odnowy obiektu.

Współczynnik gotowości technicznej K teoretycznie może przyjmować wartości od 0 (teoretyczny przypadek obiektu całkowicie zawodnego) do 1 (w przypadku teoretycznym, obiektów całkowicie niezawodnych). Wartość oczekiwana zmiennej losowej T, określającej czas zdatności oraz wartości oczekiwania zmiennej losowej Θ czasu odnowy obiektu, zależą od przyjętej struktury niezawodnościowej obiektu (środka transportu) oraz rozkładów prawdopodobieństwa, którymi są opisywane. Charakterystykę niezawodnościową środka transportu można także wyznaczyć doświadczalnie na podstawie danych o czasach pracy reprezentatywnej próby pojazdów danego typu do momentu kolejnych uszkodzeń.

W kolejnym kroku należy powiązać opis niezawodności środka transportu z modelem podziału zadań przewozowych. Ponieważ niezawodność pojazdu wpływa na fakt realizacji kursu (przewozu), to można ją uwzględnić w funkcji określającej uogólniony koszt podróży jako czynnik zwiększający jeden z elementów składowych podróży jaką jest czas oczekiwania na pojazd. Przy n elementach podróży, koszt uogólniony podróży zdefiniowany w modelu podziału zadań przewozowych miałby postać (k-ty element czasy podróży określa czas oczekiwania na połączenie):

$$GC^{s}_{(i,j)} = C^{s}_{(i,j)} + W_{ot}\left(w^{s}_{1(i,j)}\tau^{s}_{1(i,j)} + \ldots + \frac{0,5}{K_s}\tau^{s}_{k(i,j)} + \ldots + w^{s}_{n(i,j)}\tau^{s}_{n(i,j)} \right),$$

gdzie:

0,5 – waga częstotliwości kursowania określająca średni czas oczekiwania na pojazd,
K_s – asymptotyczny współczynnik gotowości dla s-tego środka transportu, pozostałe oznaczenia bez zmian.

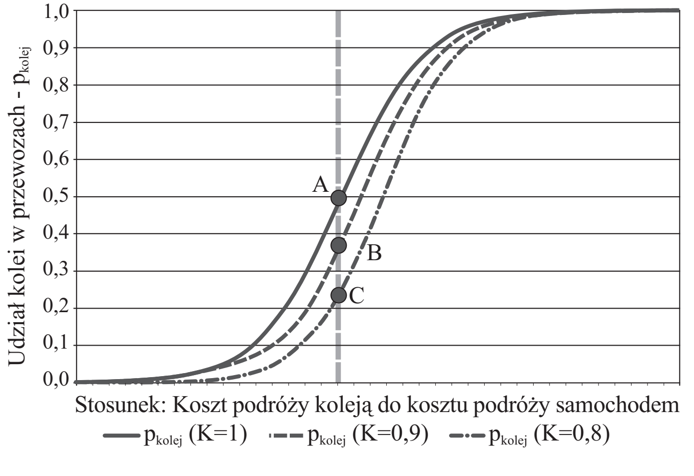
Z przytoczonych rozważań wynika, że przy rosnącej niezawodności (rozumianej tutaj jako wzrost współczynnika gotowości technicznej) wartość wagi przy czasie określającym częstotliwość kursowania maleje. A zatem zmniejszeniu ulega wartość uogólnionego kosztu podróży, co zwiększa pozytywną ocenę przez podróżnych danego pojazdu (środka transportu): w efekcie zwiększa także prawdopodobieństwo jego wyboru.

Przykład

W celu zobrazowania możliwości wykorzystania przedstawionego podejścia, wykonano wykresy funkcji podziału międzygałęziowego dla przykładowej relacji przewozu, w której pasażer ma do wyboru dwa środki transportu: pociąg lub samochód osobowy. W celu uproszczenia przyjęto koszt uogólniony w postaci:

$$GC_{(i,j)}^{s}{}' = W_{ot}\left(\frac{0,5}{K_s}\tau_{k(i,j)}^{s}\right), \text{ gdzie } W_{ot}=1.$$

Przyjęto takie wartości czasów podróży, aby na wykresie uzyskać wszystkie teoretycznie możliwe sytuacje: od zerowego udziału transportu kolejowego w przewozach do całkowitego wyeliminowania wyboru transportu samochodowego. Funkcję prawdopodobieństwa wyboru danego środka transportu określono dla trzech przykładowych współczynników gotowości technicznej K_{kolej}: 1,0, 0,9 oraz 0,8 (rys. 1). Dla samochodu osobowego przyjęto gotowość techniczną równą $K_{samochód} = 1$.



Rys. 1. Funkcja prawdopodobieństwa wyboru transportu kolejowego [źródło: opracowanie własne]

Przyjęcie gotowości technicznej $K_{kolej} = 1$ wynika z faktu, że w praktyce odwołanie pociągu występuje bardzo rzadko, a ewentualne problemy techniczne taboru lub infrastruktury skutkują opóźnieniami. W przypadku samochodu osobowego, kierowca (właściciel) również uznają, że $K_{samochód}$ = 1. Ewentualna niezdolność pojazdu do jazdy jest znana wcześniej. Nowoczesne konstrukcje pojazdów samochodowych charakteryzują się bardzo wysokim poziomem niezawodności.

Na rysunku 1 widać, że funkcja prawdopodobieństwa wyboru transportu kolejowego wykreślona dla K_{kolej} = 1 (przy $K_{samochód}$ = 1) przy równym koszcie przejazdu transportem kolejowym i samochodowym (stosunek kosztów równy 1, zaznaczony na rysunku przerywaną linią) przyjmuje wartość 0,5 – punkt **A** na wykresie. W przypadku mniejszej niezawodności transportu kolejowego, dla równego stosunku kosztów przejazdu obydwoma środkami transportu, prawdopodobieństwo wyboru transportu kolejowego spada i wynosi około 0,38 (dla K_{kolej} = 0,9, punkt **B** na wykresie) lub 0,23 (K_{kolej} = 0,8 punkt **C** na wykresie). W tablicy 1 przedstawiono dane wejściowe do sporządzenia wykresu i wyniki obliczeń.

Tablica 1

Dane wejściowe i wyniki obliczeń dla przykładu fikcyjnego

t_{kolej}	$t_{samochód}$	p_{kolej} (K = 1)	p_{kolej} (K = 0,9)	p_{kolej} (K=0,8)
7,8	**1,3**	0,002	0,001	0,000
7,6	**1,5**	0,002	0,001	0,000
7,4	**1,7**	0,003	0,001	0,001
7,2	**1,9**	0,005	0,002	0,001
7	**2,1**	0,007	0,003	0,001
6,8	**2,3**	0,011	0,005	0,002
6,6	**2,5**	0,016	0,008	0,003
6,4	**2,7**	0,024	0,012	0,005
6,2	**2,9**	0,036	0,018	0,008
6	**3,1**	0,052	0,027	0,012
5,8	**3,3**	0,076	0,041	0,019
5,6	**3,5**	0,109	0,062	0,029
5,4	**3,7**	0,154	0,091	0,045
5,2	**3,9**	0,214	0,133	0,069
5	**4,1**	0,289	0,189	0,104
4,8	**4,3**	0,378	0,262	0,154
4,6	**4,5**	0,475	0,352	0,223
4,4	**4,7**	0,574	0,453	0,310
4,2	**4,9**	0,668	0,558	0,413
4	**5,1**	0,750	0,658	0,525
3,8	**5,3**	0,818	0,746	0,634
3,6	**5,5**	0,870	0,818	0,731
3,4	**5,7**	0,909	0,872	0,810

t_{kolej}	$t_{samochód}$	p_{kolej} (K = 1)	p_{kolej} (K = 0,9)	p_{kolej} (K=0,8)
3,2	5,9	0,937	0,912	0,870
3	6,1	0,957	0,941	0,913
2,8	6,3	0,971	0,960	0,943
2,6	6,5	0,980	0,974	0,963
2,4	6,7	0,987	0,983	0,976
2,2	6,9	0,991	0,989	0,984
2	7,1	0,994	0,992	0,990
1,8	7,3	0,996	0,995	0,994
1,6	7,5	0,997	0,997	0,996
1,4	7,7	0,998	0,998	0,997
1,2	7,9	0,999	0,999	0,998
1	8,1	0,999	0,999	0,999
0,8	8,3	0,999	0,999	0,999
0,6	8,5	1,000	1,000	1,000
0,4	8,7	1,000	1,000	1,000

[Źródło: opracowanie własne]

Z przykładu wynika, że w modelu podziału międzygałęziowego można uwzględnić wpływ czynnika niezawodności technicznej. Model uwzględniający ten czynnik musi być w odpowiedni sposób skalibrowany.

4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono przykład pokazujący możliwość uwzględniania zagadnień związanych z teorią niezawodności w modelowaniu przewozów pasażerskich na trzecim etapie modelu czteroetapowego. Nie jest to jedyna możliwość. Wynika to z faktu, że czynnik niezawodności można uwzględniać również na innych etapach modelu, na przykład na etapie generowania podróży, w którym to modelu, zwykle grawitacyjnym, można uwzględniać zwiększenie „odległości" podróży wskutek malejącej niezawodności. W modelu podziału zadań przewozowych można uwzględniać nie tylko kwestię gotowości technicznej pojazdów, ale także gotowości technicznej infrastruktury. W przypadku infrastruktury kolejowej można uwzględnić na przykład jej postępujące zużycie techniczne przez zastosowanie jako charakterystyki niezawodnościowej tzw. funkcji wiodącej.

Ponadto niezawodność nie musi wiązać się jedynie z obiektami technicznymi, lecz może dotyczyć również człowieka, od którego w dużej mierze zależy realizacja przewozu. Można próbować uwzględniać i ten czynnik w strukturze niezawodnościowej systemu, wykorzystywanej do określania jego charakterystyk niezawodności.

Czynnik niezawodności można uwzględniać w rozważanych modelach jako dodatkową zmienną lub zagnieżdżać go przy jednej z podstawowych zmiennych (np. przy zmiennej czasu trwania podróży, jak w przedstawionym przykładzie). Pierwsze podejście wymaga odpowiedniej, trudniejszej, kalibracji parametrów modelu (dodatkowa zmienna). Drugi sposób, bez wprowadzania dodatkowej zmiennej, może poprawić zgodność uzyskiwanych wyników teoretycznych z pomiarami rzeczywistymi bez konieczności kalibracji modelu z większą liczbą zmiennych.

Wprowadzanie czynnika niezawodności ma sens szczególnie wtedy, kiedy daną relację przewozu obsługują środki transportu o różnej niezawodności, wyrażającej się zróżnicowanymi współczynnikami gotowości technicznej. Pozwala to na odzwierciedlenie oddziaływania tego czynnika na wybór dokonywany przez pasażerów. W przeciwnym razie, przy podobnych niezawodnościach, może niepotrzebnie komplikować budowany model przewozów, powodując większe nakłady pracy, bez lepszych jej efektów.

Literatura

1. Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1985.
2. Gutenbaum J.: *Modelowanie matematyczne systemów*, PWN, Warszawa – – Łódź, 1987.
3. Hensher D.A. Button K.J.: *Handbook of transport modelling*, Second Edition, Amsterdam; London; Elsevier, 2008.
4. Jacyna M.: *Wybrane zagadnienia modelowania systemów transportowych*, OWPW, Warszawa, 2009.
5. Klemba S.: *Wybrane zagadnienia prognozowania potoków pasażerskich*, Problemy Kolejnictwa, zeszyt nr 152, s. 183–195, Warszawa 2011.
6. López-Pita A. i inni: *Threats and opportunities for high speed rail transport in competition with the low-cost air operators*, The 9th International Conference on Competition and Ownership in Land Passenger Transport, Lisbona, 2005 [dostęp dn. 29.10.2013], dostępny na http://www.thredbo-conference-series.org/papers/.
7. Migdalski J. i inni: *Poradnik niezawodności – Podstawy matematyczne*, Wydawnictwa Przemysłu Maszynowego „WEMA", Warszawa, 1982.
8. Mynarski S.: *Elementy teorii systemów i cybernetyki*, PWN, Warszawa, 1979.
9. Ortúzar J. D., Willumsen L.G.: *Modelling Transport*, 4th Edition, 2011.
10. Żurkowski A.: *Modelowanie przewozów aglomeracyjnych*, Problemy Kolejnictwa, Zeszyt 148, s. 5–48, Warszawa, 2009.