
Profesorowi Iwo Białynickiemu-Biruli
na jego dziewięćdziesięciolecie,
kwantowej teorii pola na jej stulecie.

Postawić kwantową teorię pola z głowy na nogi Bringing quantum field theory down to Earth

część 2

Piotr Chankowski*

Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Abstrakt. Wbrew wrażeniu jakie można odnieść z lektury większości standardowych podręczników, równania falowe Diraca, Kleina–Gordona i inne nie są podstawą relatywistycznej kwantowej teorii pola. W niniejszym artykule staram się pokazać, jak powinna być ona poprawnie formułowana i omawiam pewne jej aspekty, które na ogół nie są przedstawiane właściwie. Moim celem jest spowodowanie zmiany w nauczaniu kwantowej teorii pola. Tekst został podzielony na trzy części. W niniejszej drugiej części omawiam sformułowanie kwantowej teorii pola jako teorii oddziaływujących pól oraz sens fizyczny procedury renormalizacji.

Słowa kluczowe: cząstki, pola, kwantowa teoria pola, równania falowe, renormalizacja, redukcja LSZ, całki po trajektoriach

Abstract. Despite the impression that can be gained from most of the standard textbooks, Dirac, Klein–Gordon and other wave equations do not constitute the basis of relativistic quantum field theory. In this article I attempt to show how it should be formulated properly and discuss some of its aspects which usually are presented unsatisfactorily. My aim is to cause the change in the way quantum field theory is taught. The text is split into three parts. In the second part I discuss the formulation of quantum field theory as a theory of interacting fields as well as the physical sense of the renormalization procedure.

Keywords: particles, fields, quantum field theory, wave equations, renormalization, LSZ reduction, pathing integrals

Kwantowa teoria pola jako teoria układu oddziaływujących pól

W pierwszej części niniejszego artykułu omówiłem, jak kwantowa teoria pola, jako teoria układu oddziaływujących cząstek relatywistycznych powinna być formułowana bez odwoływania się do uświęconych tradycją (będącą w istocie niepotrzebnym balastem) równań falowych. Wyjaśniłem, jakie (zwykle nie wyszczególnione jawnie) założenia wykorzystuje to podejście i jakie są jego ograniczenia i konsekwencje. W tej części zajmę się sformułowaniem alternatywnym.

Drugi sposób sformułowania kwantowej teorii pola polega na przyjęciu, że fizyczny układ stanowią pewne pola, których klasyczna dynamika jest zadana jakimś działaniem I , będącym całką po określonym obszarze przestrzennym (skończonym lub, zwykle, nieograniczonym) i czasie z gęstości lagrangianu \mathcal{L} . Zasadniczą zaletą takiego podejścia jest łatwość, z jaką można w nim rozpatrywać symetrie układu, zwłaszcza symetrie ciągłe, takie jak symetria Poincarégo, tzw. wewnętrzne symetrie oraz, co szczególnie ważne współcześnie, symetrie cechowania i wykorzystywać ich konsekwencje dzięki twierdzeniu

Noether. Czyni ono także łatwym badanie ewentualnego spontanicznego (tj. „parametrycznego” – spowodowanego bezpośrednio klasyczną postacią lagrangianu, w odróżnieniu od „dynamicznego” – wynikającego z oddziaływań dopiero na poziomie kwantowym) naruszenia różnych symetrii. Wreszcie daje ono wygodniejszy punkt widzenia (o czym dalej) na procedurę renormalizacji konieczną, by obliczane z pomocą teorii wielkości były skończone.

W tym ujęciu konstrukcja kwantowej teorii pola nie polega na (jak to jest często przedstawiane w podręcznikach) „kwantowaniu rozwiązań jakiegoś (liniowego) równania falowego ani na kwantowaniu „funkcji falowej” (czysty nonsens), tylko, przy podejściu operatorowym (bo możliwe jest też podejście wykorzystujące całki po trajektoriach, o którym dalej), na przeprowadzeniu systematycznej procedury kwantyzacji kompletnej teorii klasycznej. Sprowadza się ona do zidentyfikowania pędów kanonicznie sprzężonych ze zmiennymi polowymi, przez które wyrażona jest gęstość lagrangianu i nie-

zmiennicze działanie względem różnych przekształceń symetrii (przede wszystkim przekształceń Poincarégo, jeśli teoria ma być relatywistyczna), konstrukcji hamiltonianu i zastąpieniu zależnych od położenia zmiennych kanonicznych: pól i pędów (w chwili $t = 0$) operatorami pola spełniającymi kanoniczne związki przemienności lub antyprzemienności zgodnie ze standardową regułą kwantowania, wedle której nawiasy Poissona formalizmu kanonicznego trzeba zastąpić odpowiednimi związkami operatorowymi (i dopisać czynnik $i\hbar$). Operatory te są wtedy niezależne od czasu, tj. mają interpretację operatorów w obrazie Schrödingera.¹ Ostatni punkt polega na zrealizowaniu otrzymanej algebry operatorów w jakiejś przestrzeni Hilberta. Jeszcze raz zaznaczyć tu należy, że procedura ta powinna być zastosowana do pełnej teorii (tj. z oddziaływaniem, co oznacza, że gęstość lagrangianu \mathcal{L} nie jest wyłącznie kwadratową funkcją pól), a nie tylko do jej części swobodnej. Jest to szczególnie ważne w przypadku teorii bardziej skomplikowanych, zwłaszcza teorii z symetriami cechowania. Jeśli przejść następnie do zależnych od czasu operatorów w obrazie Heisenberga, działając wyrażonym przez pełny hamiltonian operatorem ewolucji na niezależne od czasu operatory pola reprezentujące kanoniczne zmienne, to tak otrzymane „heisenbergowskie” operatory pola spełniają (w dowolnej chwili czasu) równoczesowe związki (anty)przemienności oraz kwantowe równania kanoniczne (Heisenberga), które są równoważne równaniom drugiego rzędu² formalnie pokrywającym się z klasycznymi równaniami pola wynikającymi z działania I . Choć równania te zdają się mieć tylko formalny charakter, niemniej jednak są rzeczywiście spełnione i można je wykorzystywać w różnych obliczeniach.³ Zadanie związków komutacyjnych

1. Często w podręcznikach kwantowanie przeprowadza się wypisując od razu operatory zależne od czasu i nadaje im sens operatorów w obrazie Heisenberga. Jest to możliwe (technicznie wykonalne) na ogół tylko w przypadku teorii pól nieoddziałujących, gdy znany jest zupełny układ rozwiązań klasycznych równań ruchu (Eulera-Lagrange’a) wynikających z działania. Pozwala to na dokonanie „skoku myślowego”, którego głębszym uzasadnieniem jest w istocie znany z mechaniki hamiltonowskiej fakt, że ruch jest transformacją kanoniczną, która umożliwia przyjęcie za zmienne kanoniczne warunków początkowych.

2. Zwykle rozpatruje się gęstości lagrangianów \mathcal{L} zależne od pól i ich pierwszych pochodnych, gdyż wtedy w sposób naturalny (pomijając przypadki, które są jednak raczej normą niż wyjątkami – o tym nieco dalej) można dokonać hamiltonizacji układu klasycznego koniecznej do przeprowadzenia szkieletowej tu procedury kanonicznej kwantyzacji. Teorie efektywne, których gęstości lagrangianu typowo zależą od wyższych pochodnych trzeba kwantować albo metodą całek po trajektoriach, albo jak układy z więzami, co pozwala wprowadzić w takich przypadkach strukturę hamiltonowską.

3. Jak postaram się dalej wyjaśnić, konieczność renormalizacji nie ma na to wpływu, co staje się oczywiste, jeśli przyjąć właściwy punkt widzenia.

spełnianych przez operatory reprezentujące zmienne kanoniczne (uogólnione położenia i sprzężone z nimi pędy kanoniczne) oraz wyrażenie przez nie hamiltonianu (i ewentualnie prądów Noether symetrii – zob. dalej) lub, równoważnie, podanie równań spełnianych przez operatory heisenbergowskie, stanowi w zasadzie zupełne zdefiniowanie kwantowej teorii układu.

Najbardziej nieoczywistym, i na ogół nieporuszanym w podręcznikach i wykładach, punktem naszkicowanej procedury jest wybór (konstrukcja) przestrzeni, w której zrealizowana jest otrzymana algebra operatorów. Jeśli narzucić na dopuszczalne konfiguracje pól warunek ich znikania w przestrzennej nieskończoności⁴ lub, w przypadku pól w ograniczonym obszarze, np. periodyczne warunki brzegowe, to łatwo jest, wprowadzając jakiś zupełny układ funkcji na wybranej przestrzeni, skonstruować przestrzeń Hilberta, w której ta algebra operatorów może być zrealizowana (i realizacja ta nie jest zależna od tego, czy pola są swobodne, czy nie). Po prostu współczynniki q_l (indeks l przebiega tu jakiś przeliczalnie nieskończony zbiór wartości) rozkładu dowolnej konfiguracji pól w wybranym zupełnym układzie funkcji stają się, jako nowe zmienne kanoniczne (tak jak w zwykłej mechanice kwantowej) schrödingerowskimi operatorami „położenia” \hat{q}_l , a sprzężone z nimi zmienne operatorami pędów \hat{p}_l i standardowe związki komutacyjne $[\hat{q}_l, \hat{p}_{l'}] = i\hbar \delta_{ll'}$ (wynikające ze związków komutacyjnych spełnianych przez operatory pola lub stanowiące – przy innym spojrzeniu – uzasadnienie tamtych), można zrealizować w przestrzeni „funkcji falowych” przeliczalnie nieskończonej liczby zmiennych q_l (operatory pędów \hat{p}_l są wówczas reprezentowane przez pochodne $-i\hbar \partial / \partial q_l$). Można wtedy za bazę takiej przestrzeni przyjąć iloczyny zwykłych funkcji falowych (każda od jednej zmiennej q_l) oscylatorów harmoniczych o częstościach dowolnie skorelowanych z indeksem l i dowolnymi centrami $q_l^{(0)}$ (nie oznacza to bynajmniej, że kwantowana teoria jest teorią pól swobodnych!). Wyrażając następnie pary \hat{q}_l i \hat{p}_l przez zwykłe operatory kreacji i anihilacji znane z teorii oscylatora harmonicznego i przyjmując za „próżnię” Focka stan $|0, 0, \dots\rangle \equiv |0_{\text{Fock}}\rangle$ reprezentujący iloczyn funkcji falowych stanów podstawowych tych oscylatorów, otrzymana się pewną konkretną realizację wyjściowej algebry. Jednak różne wybory zupełnych ukła-

4. W przypadku pól cechowania, które (klasycznie) same nie są mierzalne, taki warunek może być zbyt silny i należy raczej żądać znikania tylko odpowiednich nateżeń pól. Wiąże się z tym oczywiste, choć na ogół umykające uwagi, fakt, iż widmo Hamiltonianu i struktura jego stanów własnych – jego stanu podstawowego i, w teorii pola, stanów *in* i *out* reprezentujących fizyczne cząstki – zależy od warunków brzegowych narzuconych (w zasadzie arbitralnie) na pola, czyli, mówiąc ogólniej, od dziedziny tego operatora.

dów funkcji albo różne wybory funkcji oscylatorowych dają w rezultacie tylko różne i , w naturalnym iloczynnie skalarnym, na ogół (a zwłaszcza przy nieskończonej objętości przestrzeni) wzajemnie ortogonalne podprzestrzenie wielkiej (nieseparowalnej lub nieośrodkowej w języku matematyki) przestrzeni Hilberta rozpatrywanego układu pól – inaczej mówiąc, wyjściowa algebra operatorów jest w tej wielkiej przestrzeni reprezentowana w sposób przywiedlny. W przypadku kwantowej teorii pola w płaskiej czasoprzestrzeni Minkowskiego fizycznie wyróżnionym operatorem jest hamiltonian układu i naturalne jest dążenie, by wybrać taką podprzestrzeń, do której należy jego stan podstawowy. Jest to proste, gdy hamiltonian układu pól jest kwadratową funkcją zmiennych, czyli gdy pola są swobodne.⁵ Jeśli pola oddziałują, znalezienie „właściwej” podprzestrzeni jest na ogół praktycznie niemożliwe⁶ i poprzestaje się (przynajmniej gdy chodzi o sformułowanie rachunku zaburzeń) na realizacji algebry operatorów w podprzestrzeni, w której stan podstawowy ma część swobodna odpowiednio wydzielona z pełnego hamiltonianu pól otrzymanego po przyjęciu jakichś wyjściowych zmiennych polowych.⁷ W ten sposób schrödingerskie operatory pola i operatory kanonicznie z nimi sprzężonych pędów daje się wyrazić za pomocą operatorów kreacji i anihilacji związanych z (pod)przestrzenią Focka, w której stan podstawowy ma część swobodna hamiltonianu. (Schrödingerskie operatory odpowiadające teorii z oddziaływaniem i teorii

bez oddziaływania są więc tymi samymi). Zwykle efektem tego jest także kompletne zdiagonalizowanie H_0 , ale nie jest tak zawsze (np. w teoriach z cechowaniem w ogólnym cechowaniu typu Lorenza z parametrem $\xi \neq 1$) – nadrzędnym celem jest zrealizowanie algebry operatorów w jakiejś podprzestrzeni Focka.

Realizację grupy Poincarégo w przestrzeni Hilberta uzyskuje się w tym podejściu niemal automatycznie przez zastąpienie w wyrażeniach na stowarzyszone z symetriami Poincarégo prądy Noether zmiennych klasycznych i sprzężonych z nimi pędów kanonicznych (przez które wyrazić trzeba najpierw prędkości uogólnione) odpowiadającymi im operatorami; otrzymane w taki sposób hermitowskie generatory tej grupy spełniają konieczne (wynikające ze struktury grupy symetrii) związki przemienności na mocy narzuconych na operatory kanonicznych związków komutacyjnych (lub antykomutacyjnych). W analogiczny sposób otrzymuje się też generatory innych (wewnętrznych i cechowania) symetrii ciągłych układu spełniające odpowiednie związki komutacyjne i komutujące z hamiltonianem.

Zrealizowanie algebry operatorów w jakiejś przestrzeni Hilberta kończy w zasadzie „praktyczną stronę” procedury kwantyzacji teorii układu pól. Pozostaje jeszcze kwestia interpretacji wzbudzeń tego układu (stanów własnych hamiltonianu) w języku cząstek. Oczywiście, gdy skwantowana została teoria oddziałujących pól, i nawet jego stan podstawowy pozostaje nieznanym, interpretacja taka⁸ jest utrudniona i, ściśle rzecz biorąc, można ją uzyskać dopiero na podstawie analizy różnych funkcji Greena (zobacz dalej). W przypadku teorii swobodnej skwantowanej w skończonej objętości V , interpretacja stanów własnych hamiltonianu jako reprezentujących stany zbiorów cząstek jest konsekwencją właściwości termodynamicznych układu – odpowiednia kanoniczna suma statystyczna jest identyczna (po pominięciu nieskończonego stałego wkładu do energii stanu podstawowego – zawsze można tak przedefiniować hamiltonian) z sumą statystyczną odpowiedniego układu cząstek (o relatywistycznym związku dyspersyjnym); jest to dokładnie ten sam argument, którego użył Einstein w 1905, by uzasadnić interpretację pola elektromagnetycznego jako zbioru kwantów – fotonów. Natomiast gdy kwantowane jest swobodne pole w nieograniczonej przestrzeni, interpretacja taka wynika z odwołania się do właściwości transformacyjnych (uogólnionych) stanów własnych hamiltonianu układu skwantowanych (swobodnych) pól: pod działaniem operatorów symetrii, których generatory otrzymuje się w tym podejściu według podanego wyżej

5. Jeśli pola swobodne kwantowane są w skończonej objętości przestrzennej V (i narzuci się periodyczne warunki brzegowe), to właściwą podprzestrzeń (przestrzeń Focka) normalizowalnych stanów własnych hamiltonianu otrzymuje się korelując właściwie częstości charakteryzujące wspomniane funkcje oscylatorowe z wektorami falowymi fal płaskich stanowiących zupełny układ funkcji w objętości V . Jeśli natomiast swobodne pola są kwantowane w nieskończonej objętości, to łatwo analogicznie skonstruować przestrzeń Focka, której normalizowalny wektor $|0_{\text{Fock}}\rangle$ (próżnia Focka) jest zarazem stanem własnym hamiltonianu, ale innych normalizowalnych stanów własnych hamiltonian nie posiada; trzeba wtedy rozpiąć przestrzeń Focka na jego nienormalizowalnych uogólnionych wektorach własnych (jest to *de facto* baza przestrzeni dualnej do przestrzeni Hilberta układu).

6. Niektóre teorie, np. supersymetryczne, mogą mieć dyskretny zbiór różnych stanów podstawowych; gdy spontanicznie złamana jest symetria ciągła, musi istnieć całe continuum stanów podstawowych.

7. Dobrze jest też zauważyć, że różne wybory klasycznych zmiennych polowych (przez które jest wyrażone wyjściowe działanie i które to wybory zazwyczaj, moim zdaniem zupełnie myląc (zobacz dalej), uważa się za część procedury renormalizacji) także prowadzą, po zastosowaniu procedury kwantowania, do realizacji algebry operatorów w różnych, na ogół wzajemnie ortogonalnych podprzestrzeniach wielkiej przestrzeni Hilberta stanów układu. Innymi słowy, operatory reprezentujące te różne zmienne kanoniczne są jedne z drugimi połączone transformacjami tylko formalnie unitarnymi, w ścisłym zaś matematycznym sensie, gdy l przebiega nieskończony zbiór, a objętość staje się nieskończona, nieistniejącymi.

8. Znow może się okazać, że widmo hamiltonianu jest całkowicie ciągle i interpretacja w języku cząstek jest niemożliwa.

przepisu (startując od teorii pól nieoddziałujących, tj. z gęstości lagrangianu ograniczonej do wyrazów kwadratowych w polach), stany te przekształcają się tak, jak powinny przekształcać się stany reprezentujące zbiory (nieoddziałujących) cząstek.⁹ Cząstki pojawiają się więc tu jako szczególne stany (wzbudzenia) pola (układu pól), ale „ontologią” są, przynajmniej gdy chodzi o pola bozonowe, pola fluktuujące. Na przykład stan podstawowy $|\Omega_0\rangle \equiv |0_{\text{Fock}}\rangle$ swobodnego hamiltonianu pól i oznaczany także $|0_{\text{Fock}}\rangle$ stan rozpinający zerocząstkową (trywialną) przestrzeń Hilberta w poprzednio omówionym podejściu, w którym teoria pola jest od początku teorią oddziałujących cząstek, są czymś innym: tu jest to stan realnego fluktuującego pola, tam konstrukt matematyczny reprezentujący literalną nicość. Jeśli dodatkowo istnieją komutujące z hamiltonianem generatory symetrii wewnętrznych \hat{Q}^a , jego stany własne można wybrać tak, by jednocześnie z nim zdiagonalizować te z generatorów \hat{Q}^a , które tworzą podalgebrę Cartana (maksymalny zbiór wzajemnie przemiennych generatorów) – w ten sposób cząstkom można przypisać liczby kwantowe (takie jak np. ładunek elektryczny, izospin etc.) i tak pojawiają się w tym podejściu antycząstki. Odpowiednio też można przejść do zgodnych z tymi liczbami kwantowymi kombinacji operatorów pola, które spełniają wtedy proste związki komutacyjne z ładunkami \hat{Q}^a . Jeśli chodzi o wzbudzenia układu pól oddziałujących (skwantowanych w nieskończonej przestrzeni), to zakłada się zwykle (choć weryfikacją tego założenia musi być wspomniana analiza funkcji Greena), iż pełny hamiltonian ma w wybranej podprzestrzeni wielkiej przestrzeni Hilberta oprócz (jedynego normalizowalnego) stanu podstawowego także zbiór (uogólnionych) stanów własnych, przekształcających się pod działaniem generatorów symetrii Poincarégo (teorii z oddziaływaniem), jak stany pojedynczych cząstek oraz dwa zbiory (uogólnionych) stanów własnych *in* i *out* przekształcające się jak iloczyny tensorowe stanów pojedynczych cząstek. Gdy natomiast pełny hamiltonian komutuje ponadto z jakimiś generatorami \hat{Q}^a symetrii, to wszystkie te stany można poklasyfikować względem generatorów tworzących podalgebrę Cartana. Zwykle dla celów praktycznych rachunków zakłada się, że cząstki reprezentowane przez te stany własne pełnego hamiltonianu odpowiadają dokładnie tym, które są reprezentowane przez stany własne hamiltonianu swobodnego, ale powinno być jasne, że tak może być tylko w najprostszyc teoriach (takich

jak elektrodynamika elektronów i fotonów lub teoria zwana ϕ^4).

Trzeba jednak dodać, że nakreślony tu schemat jest prosty tylko w szczególnym przypadku pola skalarnego lub układu wielu takich pól. W przypadku układów takich, jak pola przekształcające się jak wyższe reprezentacje grupy Lorentza, pola cechowania, czy pola fermionowe konieczne jest odwołanie się do dobrze określonej, ale zwykle mało upowszechnianej procedury kwantowania układów poddanych więzom. Jest to bardzo użyteczne narzędzie i dlatego nie powinno się go pomijać w porządnym wykładzie.¹⁰ Rzecz w tym, że w tych bardziej skomplikowanych teoriach przejście od formalizmu lagrange’owskiego do hamiltonowskiego („hamiltonizacja” układu) nie jest bezpośrednie, niektóre pędy kanoniczne są bowiem tożsamościowo równe zeru lub istnieją jakieś związki między zmiennymi kanonicznymi, przez co nie mogą one być traktowane jak niezależne. Rozpracowana przez Diraca systematyczna procedura pozwala zidentyfikować wszystkie więzy, jakim poddane są zmienne kanoniczne układu i podzielić je na dwie zasadnicze klasy. W przypadku niewystępowania więzów pierwszej klasy, które są zawsze związane z jakimiś symetriami typu cechowania (i których istnienie oznacza, że nawet klasyczny „stan” układu nie wyznacza wartości zmiennych kanonicznych jednoznacznie – temu samemu stanowi odpowiada nieskończenie wiele różnych możliwych ich wartości) procedura Diraca daje potrzebny przepis kwantowania: więzy muszą zostać zrealizowane jako tożsamości operatorowe, a komutatory operatorów reprezentujących zmienne kanoniczne muszą być zadane przez konkretną modyfikację nawiasów Poissona, zwaną nawiasami Diraca (są one wtedy automatycznie zgodne z więzami spełnianymi przez operatory). Następnie trzeba zrealizować otrzymaną algebrę operatorów w jakiejś przestrzeni Hilberta lub podprzestrzeni Focka (jak zwykle wybiera się podprzestrzeń w której stan podstawowy ma odpowiednio wydzieloną swobodną część hamiltonianu teorii). Mimo istnienia więzów, generatory grupy Poincarégo i innych symetrii ciągłych otrzymuje się w tym przypadku tak jak poprzednio, tj. wykorzystując twierdzenie Noether.

Kwantowanie układów mających symetrie cechowania (czyli w sytuacji, gdy zmienne kanoniczne są poddane więzom pierwszego rodzaju) przeprowadza się albo ustalając cechowanie (tj. zapewniając jednoznaczność odpowiedniość stanu układu i wartości zmiennych kanonicznych), co przekształca układ więzów w taki, który może już być uwzględniony w związkach komutacyjnych

9. Na gruncie teorii reprezentacji grupy Poincarégo stany pojedynczych cząstek identyfikuje się z odpowiednim typem nieprzywiedlnych reprezentacji tej grupy; stany reprezentujące większą liczbę takich cząstek transformują się jak iloczyny tensorowe reprezentacji odpowiadających pojedynczym cząstkom.

10. Weinberg daje szkic tej procedury ale niestety bardzo niekompletny, przez co trudno jest się zorientować, jak należy ją stosować w przypadkach innych niż te rozpatrywane przez niego.

za pośrednictwem nawiasów Diraca, albo narzucając na operatory związku komutacyjne nie biorąc więzów pod uwagę, realizując otrzymaną algebrę operatorów w pewnej (na ogół z niedodatnio określoną normą) przestrzeni Focka i wyróżniając w niej podprzestrzeń stanów fizycznych (o dodatniej normie) układu żądając, by znikwały na nich operatory reprezentujące więzy. Możliwe jest też kwantowanie „hybrydowe”, łączące w sobie oba te sposoby.

Metoda ta pozwala systematycznie i bez wielkich kłopotów przeprowadzić nie tylko kanoniczną kwantyzację klasycznych układów mających abelową symetrię cechowania, takich jak skalarne pole zespolone (albo dwa rzeczywiste takie pola) sprzężone z polem elektromagnetycznym w cechowaniu Coulomba,¹¹ ale także systematycznie sformułować kwantową teorię samooddziałujących pól cechowania (sprzężonych z innymi polami lub nie), czyli pól Yanga–Millsa z nieabelowymi symetriami cechowania. W tym drugim przypadku punktem wyjścia musi być jednak układ pól cechowania i pól grassmanowskich (zobacz dalej), tzw. duchów: działanie klasyczne I ma wtedy zamiast (lokalnej) nieabelowej symetrii cechowania tylko symetrię globalną, zwaną symetrią BRST (Becchi-Rouet-Stora-Tiutin).¹² W rezultacie tak przeprowadzonej kwantyzacji otrzymuje się realizację algebry operatorów w przestrzeni Focka (o niedodatnio określonej normie). Przestrzeń ta posiada jednak pewną strukturę kohomologiczną (wyznaczaną przez nilpotentne generatory symetrii BRST) pozwalającą wydzielić w niej podprzestrzeń wektorów (o dodatnio określonych normach) reprezentujących stany fizyczne układu. Procedura ta jest trochę bardziej skomplikowana, niż ta oparta na całkach po trajektoriach (w szczególności przy formułowaniu rozwinięcia dysonowskiego trzeba zauważyć (zagwarantowane przez formalizm) znoszenie się pewnych niekowariantnych przyczynków), ale za to można (choćby formalnie) pokazać, że macierz S ograniczona do podprzestrzeni stanów fizycznych jest unitarna i co więcej nie zależy od postaci wyrazu, który trzeba dopisać do mającej lokalną symetrię cechowania standardowej gęstości lagrangianu samych pól Yanga–Millsa, by ustalić cechowanie i wprowadzić symetrię BRST.

Przy formułowaniu kwantowej teorii pola jako teorii układu pól, pola fermionowe (tj. pola przekształ-

cające się jak reprezentacje nie samej grupy Lorentza, tylko jej grupy nakrywającej) stanowią dodatkową trudność, gdyż ich „teoria klasyczna” nie może być zwykłą teorią pola – „klasyczne” konfiguracje takich pól muszą być traktowane jak kombinacje liniowe elementów (generatorów) abstrakcyjnej nieprzemiennej algebry Grassmanna (konfiguracje układu pól bozonowych i fermionowych są w tym ujęciu kombinacjami liniowymi algebry Bieriezina generowanej przez przemienne i nieprzemienne elementy).¹³ Trzeba w związku z tym przeformułować odpowiednio klasyczny formalizm lagrange’owski i kanoniczny (hamiltonowski). Nie jest to bardzo skomplikowane i otrzymany w rezultacie formalizm jest prawie (gdyż trzeba odróżniać lewostronne i prawostronne pochodne po zmiennych grassmanowskich) identyczny ze standardowym. W szczególności wciąż pozostaje w mocy twierdzenie Noether i wykorzystywanie konsekwencji symetrii układu jest tak samo proste jak w przypadku pól bozonowych. W odpowiednio zmodyfikowanym formalizmie hamiltonowskim nawiasy Poissona są w przypadku grassmanowskich zmiennych kanonicznych symetryczne, a nie antysymetryczne, dzięki czemu przepis kwantyzacji polegający na zastąpieniu nawiasów Poissona związkami operatorowymi naturalnie prowadzi do związków antykomutacyjnych między reprezentującymi zmienne kanoniczne operatorami. Również cały formalizm Diraca, niezbędny, ponieważ układy pól fermionowych są niemal zawsze układami z więzami,¹⁴ daje się prosto zaadaptować. Cały ten formalizm jest też potrzebny by, tak jak wspomniałem, przeprowadzić procedurę kanonicznej kwantyzacji nieabelowych pól Yanga–Millsa, które trzeba

13. Łatwo to zobaczyć na przykładzie dwuskładnikowego pola λ_α , przekształcającego się jak reprezentacja $(1/2, 0)$ grupy $SL(2, C)$: człon proporcjonalny do m w gęstości lagrangianu $\mathcal{L} = i\bar{\lambda}^\mu \partial_\mu \lambda - m(\lambda\lambda + \bar{\lambda}\bar{\lambda})$, gdzie $\lambda\lambda \equiv \epsilon^{\alpha\beta} \lambda_\beta \lambda_\alpha$ (a $\bar{\lambda}^\mu$ jest „czterowektorem” utworzonym z macierzy jednostkowej i trzech macierzy Pauliego), byłby po prostu tożsamościowo równy zero (ponieważ $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21}$, a $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$), gdyby składowe λ_1 i λ_2 były zwykłymi liczbowymi funkcjami. Po kanonicznym skwantowaniu stany własne otrzymanego w tym przypadku hamiltonianu reprezentują stany (nieoddziałujących) cząstek o spinie $1/2$ i masie m , które są same swoimi antycząstkami (są istotnie obojętne).

14. Typowo gęstość lagrangianu pola fermionowego przekształcającego się jak reprezentacja $(1/2, 1/2)$ grupy $SL(2, C)$ (tzw. pole Diraca) $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$ prowadzi do związków $\Pi_\psi = i\psi^\dagger$, $\Pi_{\psi^\dagger} = 0$, które są właśnie więzami. Oczywiście procedura Diraca daje w tym przypadku to, co zwykle się odgaduje, ale dobrze jest mieć tego uzasadnienie na gruncie pewnych zasad podstawowych. Trzymanie się tych reguł pozwala przeprowadzić uczciwie, tzn. bez żadnego zgadywania, choć jest to dość skomplikowane, procedurę kanonicznej kwantyzacji (grassmanowskiego) czteroskładnikowego pola Diraca ψ_α sprzężonego z polem elektromagnetycznym.

11. Tego nie znalazłem w żadnym podręczniku kwantowej teorii pola – zwykle mówi się, że jest to trudne w porównaniu z przypadkiem swobodnego pola skalarnego, ponieważ modyfikacji ulega wtedy pęd kanoniczny. Tymczasem, jeśli trzymać się reguł, jest to dość proste.

12. Historycznie symetria BRST została zidentyfikowana najpierw przy kwantowaniu pól Yanga–Millsa metodą całek po trajektoriach. Przy kwantowaniu kanonicznym należy ją jednak przyjąć za podstawę sformułowania teorii klasycznych układów takich pól.

traktować jak mający (globalną) symetrię BRST układ pól bozonowych (cechowania) i fermionowych pól tzw. duchów.

Po sformułowaniu kwantowej teorii oddziałujących pól do obliczania amplitud rozpraszania (elementów macierzy S) można (choć nie jest to konieczne ani zawsze możliwe) wykorzystać te same założenia, co w podejściu omówionym poprzednio. Trzeba w tym celu znów przyjąć (i, tak jak poprzednio, wymusić w obliczeniach, co może nie być możliwe, przez sposób renormalizacji) istnienie odpowiedniości jeden do jednego stanów własnych kompletnego hamiltonianu H teorii oddziałujących pól (otrzymanego według naszkicowanego tu przepisu) i hamiltonianu swobodnego H_0 , otrzymanego przez zastosowanie analogicznej procedury kwantyzacji do części lagrangianu zależącej od pól kwadratowo. Następnie trzeba od operatorów w obrazie Schrödingera (które, przypomnijmy, są tymi samymi zarówno w przypadku teorii z oddziaływaniem, jak i swobodnej), przejść do operatorów w obrazie oddziaływania, by otrzymać oddziaływanie $\hat{V}_{\text{int}}^I(t)$ występujące w podanym wcześniej wzorze na elementy macierzy S . Ten krok ma jednak pewien delikatny punkt. Mianowicie związek pędów kanonicznych z pochodnymi czasowymi samych pól może być inny, gdy jest oddziaływanie i gdy go nie ma. Z tego powodu w oddziaływaniu $\hat{V}_{\text{int}}^I(t)$ mogą pojawić się wyrazy wyglądające „niekowariantnie”. Podobne niekowariantne wyrazy mogą też być rezultatem zastosowania procedury Diraca kwantowania układów z więzami. Są to jednak w każdym przypadku dokładnie te „niekowariantne” wyrazy, które są potrzebne, by w rozwinięciu dysjonowskim kasować niekowariantne przyczynki pochodzące z propagatorów, a które w poprzednim sformułowaniu teorii trzeba było do $\hat{V}_{\text{int}}^I(t)$ dopisywać „ręcznie” – tu pojawiają się one jako rezultat systematycznej procedury.

Pozostaje jednak pytanie, jak usuwać pojawiające się przy obliczaniu różnych wielkości rozbieżności? W szczególności, jeśli obliczanie elementów macierzy S wykorzystuje dyskutowane już założenie, jak wymusić jego spełnienie? I tak dochodzimy do problemu przeprowadzania renormalizacji i jej zrozumienia.

Renormalizacja

Przy konstruowaniu kwantowej teorii pola jako teorii oddziałujących cząstek, usuwanie nieskończoności związanych z całkowaniem po pędach cząstek wirtualnych i tych związanych z liniami diagramów reprezentującymi cząstki w stanach początkowym i końcowym, polegało na dopisywaniu do oddziaływania $\hat{V}_{\text{int}}^I(t)$ potrzebnych

do tego wyrazów i/lub modyfikowaniu o dodatkowe (zależne od obciążenia) człony współczynników wyrazów już istniejących. Kwantowanie pól pozwala nadać tej procedurze głębszy sens i uczynić ją bardziej systematyczną i zrozumiałą. Przede wszystkim pozwala oddzielić „prawdziwą” renormalizację, która polega na operacyjnym zdefiniowaniu sensu parametrów teorii, takich jak występujące w wyjściowym działaniu I masy i stałe sprzężenia, od tego, co zwyczajowo (i zupełnie nonsensownie) nazywa się „renormalizacją funkcji falowej”, a co powinno być traktowane po prostu jak przejście do innych, przeskalowanych, zmiennych kanonicznych. Najlepiej to wyjaśnić na przykładzie najprostszej teorii jaką jest model φ^4 , czyli teoria pojedynczego samooddziałującego pola skalarnego, którego klasyczna gęstość lagrangianu ma postać

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} M^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4.$$

Zwykle, zwłaszcza gdy formułuje się teorię przez całki po trajektoriach, nie konstruuje „po drodze” hamiltonianu tylko podając „kuchenny przepis” na obliczanie w rachunku zaburzeń funkcji Greena i amplitud rozpraszania, mówi się, że aby otrzymać te wielkości skończone, trzeba „zrenormalizować” pola i parametry pisząc¹⁵ $\varphi = Z^{1/2} \varphi_R$, $M^2 = Z_M M_R^2$ i $\lambda = Z_\lambda \lambda_R$, przy czym czasami podkreśla się jakiś „multiplikatywny charakter renormalizacji” (jakby coś ważnego z tego miało wynikać...). Po napisaniu $Z = 1 + \delta^{(1)} Z + \dots$, $Z_M = 1 + \delta^{(1)} Z_M + \dots$, etc. i wydzieleniu swobodnej części gęstości lagrangianu otrzymuje się oddziaływanie z „kontrczłonami”, które następnie w kolejnych rzędach rachunku zaburzeń dopasowuje się tak, by usunąć rozbieżności. W ten sposób cała procedura wygląda na wprowadzaną *ad hoc* i, co gorsze, wydaje się unieważniać wszystko, co można wynioskować z kanonicznej hamiltonowskiej struktury teorii.

Otóż od razu trzeba powiedzieć (co uzasadnię dalej), że aby otrzymać skończone amplitudy rozpraszania, żadna „renormalizacja funkcji falowej” nie jest konieczna, a „multiplikatywny charakter renormalizacji” jest jakimś nonsensem pokutującym w literaturze (jak owa domniemana konieczność normalnego uporządkowania operatorów) z powodu bezmyślnego powtarzania przez autorów podręczników oklepanych frazesów. Jednak można, i czasem jest to wygodne (a przy założeniach, które wykorzystuje naszkicowany wyżej, jedyny na razie, sposób obliczania amplitud procesów, jest konieczne – zob. dalej), przejść do *przeskalowanych* zmiennych φ_R traktując je po prostu jak nowe

15. Wielkości wyjściowe (pola i parametry) nazywa się w tym kontekście „gołymi”, a te opatrzone znacznikiem R – „zrenormalizowanymi”.

zmienne kanoniczne.¹⁶ Z drugiej strony, nie jest też konieczne, zwłaszcza dla uchwycenia istoty tego, na czym naprawdę polega renormalizacja, wprowadzanie zrenormalizowanych parametrów. Wszystko, co jest potrzebne, to jakaś systematyczna procedura regularyzacji przez wprowadzenie np. obciążenia¹⁷ Λ lub sformułowanie teorii w $d = 4 - \epsilon$ wymiarach (rozpowszechniona dziś tzw. regularyzacja wymiarowa; dalej zarówno Λ , jak i ϵ nazywam *obciążeniem ultrafioletowym*), która czyni skończonymi całki po czteropędach odpowiadających zamkniętym pętlom diagramów Feynmana i pogodzenie się z faktem, że parametry teorii takie jak M^2 i λ (występujące w klasycznym działaniu, tzw. parametry gołe) zależą od tej regularyzacji (są *implicite* funkcjami Λ lub ϵ).

Istota renormalizacji polega na tym, by przy ustalonym obciążeniu ultrafioletowym obliczyć (na ogół stosując zwykle dysonowskie rozwinięcie według potęg stałej, czy stałych, sprzężenia – czyli diagramy Feynmana, ale metoda obliczania jest tu sprawą wtórną) pewien zestaw wielkości mierzalnych, takich jak masa fizycznej (tzw. ubranej) cząstki (masy cząstek), różne elementy macierzy S (czyli amplitudy różnych procesów, których stany początkowe i końcowe podlegają eksperymentalnej identyfikacji) – ich wartości w różnych punktach

16. Wpaja się przecież studentom przy okazji uczenia mechaniki lagrange'owskiej, że aby określić położenie jakiegoś układu mechanicznego w dowolnej chwili czasu (co jest głównym zadaniem mechaniki) można przyjąć dowolne zmienne uogólnione $q_i(t)$; a czymże jest przejście od φ do φ_R , jak nie przejściem do innych (bardzo zresztą prosto związanych ze starymi) zmiennych uogólnionych? Przy takim spojrzeniu jest jasne, że wielkości mierzalne eksperymentalnie nie mogą od tego wyboru zależeć! Na bardziej zaawansowanym poziomie użyteczny jest też ogólniejszy punkt widzenia, w którym obiektem „kwantowanym” jest odwzorowanie pewnej rozmaitości (czasoprzestrzeni Minkowskiego lub innej, np. przestrzeni Euklidesowej) w sensie matematycznym w pewną inną rozmaitość, po angielsku zwaną *target space*; pola takie jak φ są wtedy po prostu układem współrzędnych na tej drugiej rozmaitości i, przy pewnych założeniach co do analityczności, wszystkie wnioski fizyczne otrzymywane z teorii nie powinny zależeć od wyboru tych zmiennych, nawet jeśli nowe ze starymi są związane nieliniowo. Prawda ta jest znana specjalistom od lagrangianów efektywnych już od ponad pół wieku, ale do podręczników się jeszcze nie przebiła...

17. W nierelatywistycznych teoriach pola, kiedy nieprowadzące do rozbieżności oddziaływanie nielokalne przestrzennie zastąpi się (jest to istota operowania teorią efektywnymi, pozwalającymi znacznie uprościć i usystematyzować różne obliczenia) oddziaływaniami lokalnymi płacąc za to cenę w postaci konieczności przeprowadzenia renormalizacji, takie obciążenie wystarczy nałożyć na trójpędy odpowiadające zamkniętym pętlom diagramów, co czyni ten zabieg bardziej „fizycznym”. W relatywistycznych teoriach obciążenie musi być nałożone na czteropędy, aby łatwiej było kontrolować współzmienniczość względem przekształceń Poincarégo, choć w zasadzie powinno być możliwe nałożenie obciążenia na same trójpędy.

kinematycznych należy traktować jak różne wielkości, więc każdy element macierzy S to w zasadzie nieskończenie wiele wielkości obserwowalnych, czy – choć to bardziej dotyczy teorii nierelatywistycznych układów wielu cząstek – energie różnych stanów stacjonarnych układu (zwłaszcza energia jego stanu podstawowego). Otrzymane na te wielkości wyrażenia zależą od parametrów teorii (które, jak zakładamy, od obciążenia zależą *implicite*) i od obciążenia (jawnie). Następnie należy wybrać tyle wielkości fizycznych, ile jest parametrów teorii¹⁸ i wyrazić przez nie parametry, odwracając otrzymane związki funkcyjne. Ostatni krok, to wyrażenie w pozostałych obliczonych i interesujących nas mierzalnych wielkościach fizycznych (gołych) parametrów teorii przez te wybrane obserwowable. Cud, jaki wtedy się zdarza (zwykle techniczne rozważania związane z dowodem tego faktu przesłaniają fizyczną istotę sprawy, jak to zgrabnie ujmuje Alfred Brian Pippard wywód staje się *formally intelligible, yet meaningless in terms of physical reality...*), polega na tym, że w otrzymanych wyrażeniach można już przejść do granicy $\Lambda \rightarrow \infty$, czy $\epsilon \rightarrow 0$ – granica jest skończona. Mówiąc wprost, cała tajemnica renormalizacji polega na wyrażeniu jednych wielkości mierzalnych przez zestaw innych wybranych wielkości mierzalnych. Można ją obudować ideologią argumentując, że rozpatrywane w zwykłej praktyce teorie pola (te renormalizowalne i te nierenormalizowalne też, gdyż teorie nierenormalizowalne nie są mniej renormalizowalne niż teorie renormalizowalne) są zawsze tylko teoriami efektywnymi i ich zakres stosowalności obejmuje jedynie zjawiska, których charakterystyczne energie nie przekraczają pewnej skali, w związku z czym wprowadzenie obciążenia (bardziej typu Λ niż typu wymiarowego) jest dobrze uzasadnione fizycznie; kompletna teoria fundamentalna, która zapewne jest skończona i ma niewiele parametrów (optymalnie jeden wymiarowy) zapewne pozwoliłaby wyznaczyć wszystkie wielkości mierzalne

18. Nie przeprowadzam tu tradycyjnego podziału kwantowych teorii pola na renormalizowalne i nierenormalizowalne, ponieważ współcześnie nie ma on takiego fundamentalnego znaczenia, jakie przypisywano mu dawniej (uważano, że sens mają tylko teorie renormalizowalne). Różnica polega na tym, że liczba parametrów teorii renormalizowalnych jest skończona (np. Model Standardowy ma ich 18, jeśli traktować neutrino jako bezmasowe i pominąć parametr związany z teoretycznie możliwym łamaniem symetrii CP przez oddziaływanie silne), a teorii nierenormalizowalnych przeliczalnie nieskończona. W tych drugich zwykle daje się jednak sformułować pewne reguły (fizycznie dobrze uzasadnione) pozwalające w danym rzędzie dysonowskiego rozwinięcia uwzględnić tylko skończoną liczbę parametrów. Zabawne jest to, że przesłanki, jakimi kierowano się dążąc do sformułowania Modelu Standardowego, tj. chęć zbudowania teorii renormalizowalnej, były, z dzisiejszej perspektywy, mało uzasadnione, mimo to skonstruowana teoria jest dziś najdokładniejszą z teorii fizycznych!

jako skończone ich funkcje, a także, jeśli wolimy się posługiwać „niskoenergetyczną” efektywną teorią pola, wyznaczyłaby parametry teże jako funkcje obciążenia; skoro jednak teorii fundamentalnej nie znamy, wypada się kontentować tym, że możemy wyeliminować nieznanne parametry teorii efektywnej, parametryzując jedne wielkości mierzalne przy niskich energiach za pomocą innych. Jest to w zasadzie fundament tego, co pozwala uprawiać fizykę, czyli tego, że (jak już wspominałem) świat zjawisk fizycznych dzieli się naturalnie na „warstwy” charakteryzujące się dobrze określonymi zakresami energii.

Od strony technicznej odwracanie związków funkcyjnych, by wyrazić parametry przez wybrane obserwabla, jest trudne, zatem wygodnie jest, zwłaszcza przy stosowaniu dysonowskiego rachunku zaburzeń, posłużyć się techniką kontrczłonów. Polega to na rozbiciu (*implicit* zależnych od obciążenia) parametrów na część skończoną (od obciążenia niezależną) i kontrczłon właśnie,¹⁹ tj. na napisaniu $M^2 = M_R^2 + \delta^{(1)}M^2 + \delta^{(2)}M^2 + \dots$, $\lambda = \lambda_R + \delta^{(1)}\lambda + \delta^{(2)}\lambda + \dots$ i dobieraniu zależnych od obciążenia kontrczłonów $\delta^{(1)}M^2$, $\delta^{(1)}\lambda$ itd. rząd po rzędzie w rozwinięciu w taki sposób, by parametry z dopiskiem $_R$ były zawsze tożsame (jeśli to możliwe, bo nie zawsze jest) z jakimiś mierzalnymi wielkościami (np. mierzoną masą fizycznej cząstki, wartością amplitudy jakiegoś procesu w wybranym punkcie kinematycznym itp.), którymi chcemy parametryzować inne przewidywane przez teorię wielkości. Można też wtedy postępować jeszcze ogólniej i wyznaczać w kolejnych rzędach rachunku zaburzeń kolejne kontrczłony narzucając jakieś ustalone warunki, które mogą, ale nie muszą mieć bezpośredniego związku z wielkościami mierzalnym (np. przy regularyzacji wymiarowej zażądać, by kontrczłony kasowały tylko bieguny w ϵ – nazywa się to schematem *minimalnego odjęcia*). Wszystkie obliczane wielkości mierzalne stają się wtedy (być może skomplikowanymi) funkcjami skończonych *zrenormalizowanych* parametrów z dopiskiem $_R$, których wartości liczbowe można teraz dopasować („dostroić”) by otrzymać zgodność z mierzonymi akurat wielkościami; pozostałe wyznaczone wielkości są wtedy przewidywaniami teorii. Wreszcie, wprowadzając do rozbicia parametrów gołych na parametry zrenor-

malizowane i kontrczłony sztuczny parametr, nazwijmy go sugestywnie μ (regularyzacja wymiarowa z konieczności wprowadza taki parametr i ma on sens pewnej charakterystycznej energii), od którego (na mocy konstrukcji!) przewidywania teorii zależeć nie mogą (co oznacza, że przy dopasowywaniu wartości parametrów z dopiskiem $_R$ tak, by otrzymać zgodność z wybranymi wielkościami mierzalnymi, liczbowe wartości tych parametrów zależą od ustalonej w zasadzie arbitralnie wartości μ – parametry te stają się *implicit* funkcjami μ – można dowolność wyboru μ wykorzystać) i na tym bazują niektóre (nie wszystkie) metody grupy renormalizacji (używane np. we wspomnianym na wstępie zastosowaniu metod teorii pola do obliczania charakterystyk zjawisk krytycznych) pozwalające np. w obliczeniach prowadzonych w ramach rachunku zaburzeń, sumować całe klasy przyczynków do obliczanych wielkości. Powinno być jednak oczywiste, że różne te możliwości są tylko różnymi praktycznymi sposobami realizacji tej samej idei renormalizacji, której istotą jest wyrażenie (z pomocą teorii) jednych wielkości mierzalnych przez inne, a wprowadzenie kontrczłonów jest tylko pewnym chwytym technicznym.

Wróćmy teraz do problemu, jak, mając daną kwantową teorię pola sformułowaną jako teoria pól, wyznaczyć wielkości mierzalne takie jak masy (ubranych) cząstek i amplitudy procesów (elementy macierzy S)? Jeśli jest to możliwe (co okazuje się „w praniu”), to można zrealizować już omówiony schemat wykorzystujący silne założenie odpowiedniości jeden do jednego stanów własnych swobodnej części H_0 hamiltonianu i hamiltonianu pełnego H . Założenie o identycznych energiach tych stanów oznacza, że rozbicie M^2 na M_R^2 i kontrczłony trzeba wtedy przeprowadzić w taki sposób, by masa ubranej cząstki (stany *in* i *out* H reprezentują asymptotyczne stany takich cząstek w procesach rozproszeniowych) była tożsama z parametrem M_R , tzn. dzielimy H na H_0 i oddziaływanie tak, by stany własne H_0 miały interpretację (w sensie już omówionym) swobodnych cząstek o masach M_R , a kontrczłony trzeba tak dobierać, aby (zobacz dalej) bieguny proste dwupunktowych funkcji Greena heisenbergowskich operatorów pola wypadały w $p^2 \equiv p_0^2 - \mathbf{p}^2 = M_R^2$. Jak jednak otrzymać residuum tego bieguna równe i (dla prostoty mam tu na myśli pole skalarne i cząstkę bezspinową, bowiem gdy cząstka ma niezerowy spin, residuum to ma postać czynnika i mnożącego iloczyn tensorowy takich funkcji, jak te występujące w wypisanym wcześniej rozkładzie typowego operatora pola w obrazie oddziaływania), jak tego wymaga założona odpowiedniość stanów *in* i *out* oraz stanów własnych H_0 ? To właśnie wymaga przejścia do przeskalowanych zmiennych polowych. Istotnie, jeśli residuum bieguna prostego dwupunktowej funkcji Greena

19. Kontrczłonami nazywa się także (i w tym właśnie sensie użyłem tego terminu wcześniej) całe człony oddziaływania, w których występują czynniki $\delta^{(k)}M^2$, $\delta^{(l)}\lambda$ i, jeśli używa się przeskalowanych pól, $\delta^{(i)}Z$. Zauważmy też, że użyta tu wcześniej uświęcona głupia tradycja (*because such is the power of tradition* jak gdzieś napisał Weinberg tłumacząc, dlaczego astronomowie używają jakichś nienormalnych jednostek) „multiplikatywna” notacja jest mało sensowna; jeśli są np. dwie stałe sprzężenia, to może się okazać, że „stała renormalizacyjna” Z_λ w iloczynie $Z_\lambda\lambda_R$ będzie miała składniki odwrotnie proporcjonalne do λ_R .

operatora $\hat{\phi}^H$ jest równe $iZ\varphi$, to residuum operatora $\hat{\phi}_R^H = Z^{-1/2}\hat{\phi}^H$ będzie równe $iZ\varphi$ i stałą Z (a właściwie, w rachunku zaburzeń, kontrczłon w jej rozbięciu na $Z = 1 + \delta^{(1)}Z + \dots$) można tak dobrać (dobierać rząd po rządzie w rachunku zaburzeń), by residuum było takie, jak tego wymaga założona odpowiedniość stanów H i H_0 . Tak więc korzystanie ze schematu zakładającego ścisłą odpowiedniość stanów *in* i *out* oraz stanów własnych H_0 wymusza posłużenie się bardzo szczególnym wyborem zmiennych kanonicznych (czasem te zmienne nazywa się unormowanymi „fizycznie”, a cały schemat renormalizacji – schematem „na powłoce masy”). W istocie jednak, schematu tego nie trzeba się trzymać (jak już wspomniałem, jego wyróżniona rola ma po prostu historyczne pochodzenie, ale nie daje się on zastosować w każdej teorii i do każdego pola), a przeskalowywanie zmiennych polowych jest tylko kwestią wygody rachunkowej. Zwykle dąży się do tego, by skończone były same funkcje Greena (choć zawarta jest w nich informacja o wielkościach mierzalnych (zobacz dalej), same one nie są wielkościami bezpośrednio mierzalnymi i przy usuwaniu obciążenia nie muszą być skończone) i to z tego właśnie powodu wykorzystuje się przeskalowane pola.²⁰ Pozostawia to jednak wciąż sporą dowolność w wyborze zmiennych kanonicznych, czyli w wyborze czynników skalujących typu²¹ Z (jedyne warunki, jaki się na nie wtedy nakłada, to zapewnienie kasowania rozbieżności). Przeskalowanie pól występujących w działaniu może (choć nie musi!) służyć do uczynienia skończonymi ich funkcji Greena, więc uczący się kwantowej teorii pola z typowego wykładu lub podręcznika na ogół wyno-

20. Niemala rolę odgrywa tu fakt, że przeprowadzając ścisłe dowody, iż procedura renormalizacji działa, wygodniej jest pokazywać, że czyni ona skończonymi właśnie funkcje Greena. Rzecz jasna, matematyk cieszy się z tego, że można udowodnić, iż wprowadzenie do działania odpowiednich kontrczłonów pozwala wyeliminować nieskończoność z funkcji Greena (nie jest to trywialne, trzeba bowiem pokazać, że systematyczne uwzględnianie kontrczłonów już wyznaczonych w niższych rzędach rozwinięcia perturbacyjnego eliminuje możliwość powstawania w następnych rzędach rozbieżności mających charakter nielokalny i przez to niemożliwych do usunięcia przez dopisywanie kolejnych lokalnych kontrczłonów); jednak poprzestanie na tym nie może być satysfakcjonujące dla fizyka. Zgłębiając takie renomowane podręczniki jak Itzyksona i Zuber, autorów o jawnie matematycznych inklinacjach, jasno widzi się, iż matematyk zawsze dąży do wypreparowania z problemu fizycznego „zgrabnego kawałka”, który można ująć w matematyczne „hieroglify”, sformalizować i ewentualnie podać jego rozwiązanie (niechby i tylko dowód jego istnienia!), ale mało go zwykle obchodzi sens fizyczny uzyskanych wyników i ich rola w bardziej całościowym obrazie świata fizycznego.

21. Jeśli występuje kilka pól o takich samych liczbach kwantowych, to w ogólności różne przeskalowane zmienne polowe są jedne z drugimi powiązane macierzowymi czynnikami Z : $\varphi_i = (Z^{1/2})_{ij}\varphi_j^R$.

są wrażenie, że zrenormalizowane pola są jakoś „lepsze”, ale zarazem nie są „kanoniczne”. Jest to całkowicie błędne i częściowo odpowiedzialna za to jest niefortunna terminologia, tj. nazywanie jednych zmiennych kanonicznymi²² a innych zrenormalizowanymi. Tymczasem wszystkie one są tak samo „kanoniczne” i powinny być traktowane równoprawnie. Trzeba przy tym pamiętać, że zgodnie z regułami kwantowania związki komutacyjne (lub antykomutacyjne) narzuca się na zmienne i pędy kanonicznie z nimi sprzężone (a nie na zmienne i ich pochodne czasowe!). Gdy w gęstości lagrangianu rzeczywistego pola skalarnego wyraz z pochodnymi ma współczynnik 1/2 (ten niby „kanoniczny”), to pędem sprzężonym z φ jest $\Pi = \partial_0\varphi$ i po przejściu do operatorów (czyli po kwantyzacji) równoczesowy związek komutacyjny (spełniany przez operatory w obrazie Heisenberga) ma postać $[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \partial_0\hat{\phi}(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Jeśli jednak wybraną zmienną jest $\varphi_R = Z^{-1/2}\varphi$, to pędem sprzężonym z φ_R jest $Z\partial_0\varphi$ i równoczesowy związek komutacyjny przybiera postać $[\hat{\phi}_R^H(t, \mathbf{x}), \partial_0\hat{\phi}_R^H(t, \mathbf{x}')] = iZ^{-1}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Unieważnia to spotykane gdzieś stwierdzenie, że operatory zrenormalizowane nie spełniają jakoby kanonicznych związków komutacyjnych.²³

Jeszcze raz należy tu podkreślić, iż do uczynienia skończonymi amplitud procesów elastycznego i nieelastycznego rozpraszania (czyli elementów macierzy S) oraz mas „fizycznych” (ubranych) cząstek wystarcza renormalizacja samych parametrów teorii (rozumiana tak, jak to przedstawiłem wcześniej). Oprócz amplitud procesów i mas, tylko dzięki tej renormalizacji skończone są też odnoszące się do układu wielkości termodynamiczne, takie jak potencjał Ω wielkiego zespołu kanonicznego, potencjały chemiczne czy energia swobodna F układu²⁴ obliczane za pomocą formalizmu z urojonym czasem, a także elementy macierzowe pomiędzy stanami *in* i/lub *out* pewnych szczególnych operatorów zbudowanych z operatorów pól elementarnych, tzn. tych pól, przez które wyrażone jest działanie.²⁵ Tymi wyróżnionymi

22. Często mówi się, że są one „kanoniczne”, ponieważ wyraz z pochodnymi w gęstości lagrangianu ma kanoniczny współczynnik (1/2 w przypadku rzeczywistego pola skalarnego) – jest to, oczywiście, tłumaczenie nie mające żadnej merytorycznej wartości...

23. Dla przejrzystości związku te należy zawsze pisać w postaci $[\hat{\phi}_R^H(t, \mathbf{x}), \hat{\Pi}_R^H(t, \mathbf{x}')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

24. Widać to szczególnie dobrze przy obliczeniach wykonywanych w ramach nierelatywistycznych teorii pola stanowiących teorie efektywne układów wielu nierelatywistycznych cząstek.

25. Skończoność wartości oczekiwanych w stanie próżni tych operatorów wymaga renormalizacji jeszcze jednego parametru działania, jakim jest tzw. stała kosmologiczna, czyli po prostu stały, niezależny od pól wyraz w działaniu klasycznym lub (po kwantyzacji) addytywna stała w hamiltonianie.

operatorami są: tensor energii-pędu²⁶ $T^{\mu\nu}$ – prąd Noether symetrii względem czasoprzestrzennych translacji układu, tensor $M^{\mu\nu\kappa}$ – prąd Noether symetrii względem przekształceń Lorentza oraz operatory prądów Noether symetrii (ściślych lub spontanicznie naruszonych) wewnętrznych. Wiąże się to tym, że całki po całej przestrzeni z $T^{0\nu}$ i $M^{0\nu\kappa}$ są klasycznie wielkościami mierzalnymi i zachowują ten sam charakter w teorii kwantowej jako generatory odpowiednich symetrii, dlatego skończone muszą być elementy między stanami własnymi pełnego hamiltonianu (ale oczywiście nie same ich funkcje Greena, elementy macierzowe z funkcji Greena otrzymuje się bowiem dopiero przez procedurę LSZ – zob. dalej) odpowiadających im w teorii kwantowej operatorów.²⁷ Podobnie, całki z czasowych składowych prądów Noether symetrii wewnętrznych układu pól stają się w teorii kwantowej operatorami związanymi z tymi symetriami zachowanych ładunków i ich elementy macierzowe między stanami fizycznymi są wobec tego także skończone.²⁸ W szczególności w przypadku symetrii naruszonych spontanicznie, skończone (po renormalizacji parametrów) są elementy macierzowe prądów Noether związanych z generatorami spontanicznie naruszonych symetrii pomiędzy stanem podstawowym H (próżnią) i stanem pojedynczego bezmasowego bozonu Goldstone’a odpowiadającego temu generatorowi. Bardziej subtelna jest skończoność analogicznych elementów macierzowych prądów Noether symetrii, które są naruszone spontanicznie i zarazem jawnie [np. w chromodynamice kwantowej elementy macierzowe prądów aksjalnych pomiędzy stanem podstawowym teorii i stanami pojedynczych mezonów π będących wskutek zarówno jawnego

26. Mogą tu wystąpić pewne subtelności: np. elementy macierzowe pomiędzy stanami *in* lub *out* najprostszego tensora energii-pędu rozpatrywanego tu w charakterze przykładu teorii pojedynczego pola skalarnego nie są skończone; wiadomo jednak, że tensory $T^{\mu\nu}$ i $M^{\mu\nu\kappa}$ można zawsze zmodyfikować (nie zmieniając przy tym mających sens wielkości fizycznych całek po całej przestrzeni z $T^{0\nu}$ i $M^{0\nu\kappa}$) i, jak można pokazać, elementy macierzowe odpowiednio zmodyfikowanego tensora energii-pędu będą już, dzięki renormalizacji parametrów, skończone (we wszystkich rzędach rachunku zaburzeń).

27. Należy tu jeszcze zastrzec, że w niektórych przypadkach występują tzw. anomalie: prądy Noether wszystkich symetrii klasycznej teorii czasem nie mogą być w teorii kwantowej jednocześnie zachowane i trzeba dokonać arbitralnego wyboru (tzn. można skonstruować różne teorie kwantowe odpowiadające tej samej teorii klasycznej), które z nich mają w teorii kwantowej być zachowane. (Jeśli jest to teoria z cechowaniem, zachowane muszą być prądy symetrii cechowania, gdyż inaczej teoria byłaby matematycznie niespójna.) Elementy macierzowe prądów Noether związanych z anomalnymi symetriami nie muszą być prawdopodobnie skończone, choć na ten temat nie znalazłem żadnych stwierdzeń w literaturze – być może dlatego, że jest to jedno z naturalnych pytań, na które wskutek bałamutnego przedstawiania przedmiotu nie zwrócono uwagi...

(z powodu niezerowych gołych mas kwarków), jak i spontanicznego (z powodu struktury stanu podstawowego) naruszenia związanych z tymi prądami symetrii chiralnych pseudobozonami Goldstone’a], są one skończone tylko wtedy, gdy jawne naruszenie symetrii jest „miękkie” tzn. tylko przez występujące w Hamiltonianie operatory wymiaru niższego niż cztery.²⁹

Odrębną sprawą jest wspomniana czasem w podręcznikach, zwykle bez wyjaśnienia jaka jest fizyczna rola tych obiektów, renormalizacja operatorów złożonych (tj. operatorów zbudowanych z iloczynów kilku operatorów pola i, być może, ich pochodnych, wziętych w tym samym punkcie czasoprzestrzeni), przez co rozumie się zapewnienie skończoności funkcji Greena, w których te operatory występują (na ogół jeden taki oprócz operatorów pól elementarnych). Nie jest to konieczne do otrzymania elementów macierzy S ; rzeczywiście przy wyznaczaniu tychże można bowiem użyć funkcji Greena dowolnych (także złożonych) i to wielu w tej samej funkcji Greena, operatorów (zobacz dalej), a funkcje Greena, jak już wspominałem same nie mają sensu fizycznego i wobec tego nie muszą być skończone. Chodzi o to, że gdy oddziaływanie jest tak silne, iż niemożliwe jest zastosowanie rachunku zaburzeń do bezpośredniego obliczenia całego elementu macierzy S odpowiadającego jakiemuś interesującemu nas procesowi, który charakteryzuje się dwiema bardzo różnymi skalami energii, np. małą nie-

28. Jest jednak istotna różnica między prądami Noether symetrii globalnych i prądami symetrii cechowania, takimi jak (zachowany) prąd symetrii $U(1)$ w elektrodynamice kwantowej, ponieważ do tych drugich sprzęgają się pola cechowania, elementy macierzowe operatorów samych tych prądów nie są (wbrew temu co można wyczytać w wielu podręcznikach) skończone, gdyż operatory te mieszają się z operatorem skonstruowanym z pól cechowania (będącym jednak pełną czterodwójką). Skończone są tylko elementy macierzowe całek po przestrzeni czasowych składowych tych prądów, ponieważ są one mierzalnymi ładunkami. W przypadku symetrii globalnych i czasoprzestrzennych skończone są także elementy macierzowe samych prądów, a co więcej ich elementy diagonalne nie zmieniają się w kolejnych rzędach rachunku zaburzeń (poprawki wyższego rzędu do tych elementów znikają, czyli, jak to się dawniej niezbyt precyzyjnie mówiło *zachowane prądy się nie renormalizują*); to właśnie było istotą hipotezy CVC (ang. *conserved vector currents*) wysuniętej przez Feynmana w celu wyjaśnienia mierzonych w procesach rozpadów beta jąder wartości elementów macierzowych wektorowych części prądów słabych, które Feynman śmiało utożsamiał z prądami Noether symetrii izospinowej.

29. Chodzi np. o wzór

$$\langle \Omega | \bar{\psi}^H \gamma^\mu \gamma^5 T^a \psi^H(0) | \pi^b(\mathbf{p}) \rangle \equiv \langle \Omega | J_5^a(0) | \pi^b(\mathbf{p}) \rangle = \delta^{ab} f_\pi p^\mu,$$

z pomocą którego, zwykle bezrefleksyjnie, definiuje się mierzalną „stałą rozpadu pionu” f_π . W żadnym podręczniku nie natknąłem się na wyjaśnienie, dlaczego taki element macierzowy miałby definiować skończoną wielkość f_π ...

zmienniczą masą hadronu początkowego i dużym przekazem pędu od leptonu zderzającego się z tym hadronem, można, gdy teoria, tak jak chromodynamika kwantowa, ma właściwość *asymptotycznej swobody*,³⁰ podzielić obliczanie odpowiedniej funkcji Greena (z której ów element macierzy S można otrzymać) na część „twardą”, dającą się obliczać za pomocą rachunku zaburzeń i drugą „nieperturbacyjną”, która właśnie jest elementem macierzowym jakiegoś operatora złożonego między hadronowym stanem początkowym (*in*) i końcowym (*out*). Taki element macierzowy parametryzuje się „fenomenologicznie” (i jego wartość wyznacza np. z innych procesów, których amplitudy można przezeń wyrazić), ale by to miało sens, musi on być skończony. W tym to właśnie celu wprowadza się „zrenormalizowane” operatory złożone, które są po prostu kombinacjami liniowymi innych operatorów złożonych z tak dobranymi (zależnymi od obciążenia) współczynnikami, że ich funkcje Greena z polami elementarnymi są skończone (po odpowiednim przeskalowaniu tychże pól elementarnych). Gwarantuje to, że skończony byłby (w zasadzie, ponieważ do tego rachunku nie można użyć rachunku zaburzeń) element macierzowy tego „zrenormalizowanego operatora złożonego” otrzymany za pomocą procedury LSZ z funkcji Greena tego operatora i operatorów (niekoniecznie elementarnych) odpowiednich dla otrzymania hadronowych stanów *in* i *out* badanego procesu.

Na zakończenie tych uwag o renormalizacji trzeba jeszcze dodać, że konsekwentne traktowanie przeska-

wanych polowych zmiennych jak pełnoprawnych zmiennych kanonicznych jest często przyjmowane z niedowierzaniem, ponieważ prowadzi do hamiltonianu, który wygląda „niekowieariantnie” (czyli w powszechnym odczuciu „dziwnie”, tak jakby hamiltonian w ogóle mógł wyglądać kowieariantnie!). Istotnie, gęstość hamiltonianu rozpatrywanej tu w charakterze przykładu teorii ma wtedy postać

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}Z^{-1}\Pi^2 + \frac{1}{2}Z\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{2}ZM^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}Z^2\varphi^4,$$

i jego „dziwność” („niekowieariantność”) polega na tym, że w członie zależnym od kanonicznego pędu Π stoi Z^{-1} a nie Z , jak w wyrazie z pochodnymi przestrzennymi. To właśnie jest jednak konieczne! Po wydzieleniu H_0 i przejściu do obrazu oddziaływania, w operatorze oddziaływania wystąpi dzięki temu zarówno „kowieariantny” kontrczłon $\partial_\mu\varphi^I\partial^\mu\varphi^I$ ze współczynnikiem $Z-1 = \delta^{(1)}Z + \dots$, jak i „niekowieariantny” $\partial_0\varphi^I\partial_0\varphi^I$ (z odpowiednim współczynnikiem); współczynniki te są ze sobą jednoznacznie związane, gdyż biorą się z rozwinięcia tego samego czynnika Z). Przy obliczaniu amplitud, czy funkcji Greena wykorzystującym rozwinięcie dysonowskie i twierdzenie Wicka, w wickowskich zwiężeniach operatorów $\partial_\mu\varphi^I$ pochodzących z pierwszego rodzaju kontrczłonów wystąpią człony niekowieariantne. Obecne w oddziaływaniu człony $\partial_0\varphi^I\partial_0\varphi^I$ są właśnie konieczne, by znosić te niekowieariantne przyczynki. Procedura kanoniczna działa sensownie i świadomość takich niuansów upewnia nas o poprawności całego formalizmu.

*cdn.*³¹

30. Tłumaczyłem tę właściwość przy okazji omawiania Nagrody Nobla 2004 dla D. Grossa, D.H. Politzera i F. Wilczka (*Postępy Fizyki* 56 (1)4 (2005)).

31. Kontakt z autorem: Piotr.Chankowski@fuw.edu.pl