

# Podstawy teoretyczne programowania robotów

Manipulatory robotów przemysłowych są mechanizmami składającymi się z kilku członów. Członki te są ze sobą połączone i przemieszczają się wzajemnie w celu uchwycenia lub przeniesienia części lub narzędzia zgodnie z zadanymi sygnałami sterującymi na podstawie wskazań operatora lub zgodnie z zapisanym i uruchomionym programem robota. We wszystkich tych przypadkach opis ruchu robota wymaga znajomości położenia poszczególnych członów systemu robotyzowanego względem siebie w funkcji czasu. W związku z powyższym zagadnienie zarówno sterowania, jak i programowania łączy się nierozdzielnie z koniecznością zastosowania odpowiednich układów współrzędnych, względem których realizowany będzie ruch manipulatora. Niezależnie od konstrukcji robota, zgodnie z normą ISO 9787:2013, możemy wyróżnić kilka standardowych układów współrzędnych stosowanych w robotyce.

Pierwszym jest **globalny układ współrzędnych** (ang. *World Coordinate System*), będący układem kartezjańskim odniesionym do Ziemi i niezależnym od ruchu robota. Umieszczenie tego układu jest szczególnie istotne, gdy na stanowisku robotyzowanym znajduje się kilka robotów i/lub maszyn, z którymi roboty współpracują – wówczas ich wzajemne posadowienie określane jest właśnie w tym układzie współrzędnych.

Drugim podstawowym układem współrzędnych, z którym można się spotkać, analizując zadania z zakresu robotyki, jest podstawowy układ współrzędnych (ang. *Base Coordinate System*), odniesiony do bazowej powierzchni montażowej (powierzchni łączącej robota z konstrukcją nośną dla niego przeznaczoną). Położenia narzędzia i innych układów

w przestrzeni roboczej konkretnego robota wyznaczone są względem tego układu współrzędnych. Najczęściej układ ten jest układem kartezjańskim nieruchomym, jednak w przypadku posadowienia robota na osi zewnętrznej suwliwej (tor jezdny) układ ten przesuwa się wraz z robotem.

Kolejnym układem (rys. 1) – naturalnym z punktu widzenia konstrukcji robota – jest **układ współrzędnych połączenia** (ang. *Joint Coordinate System*).

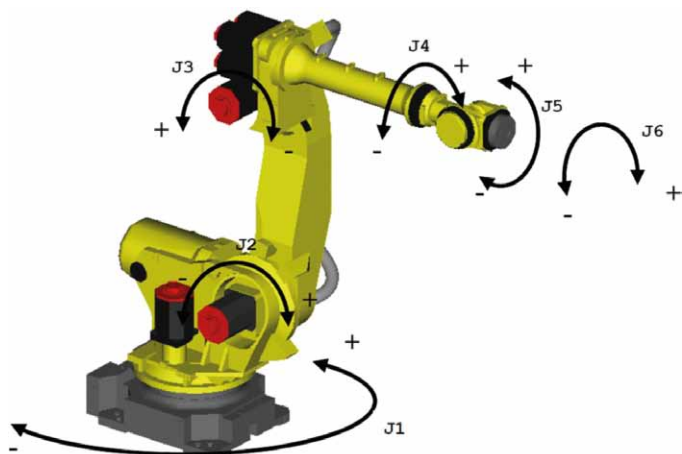
Układ ten w zależności od konstrukcji robota opisany jest za pomocą kątów poszczególnych osi robota lub przemieszczeń liniowych w przypadku połączeń suwliwych.

Istotnymi układami z punktu widzenia lokalizacji innych układów (wykorzystywanymi podczas konfiguracji pozostałych układów współrzędnych) występującymi w robotyce są:

- układ współrzędnych interfejsu mechanicznego (ang. *Mechanical Interface Coordinate System*);
- układ współrzędnych narzędzia (ang. *Tool Coordinate System*).

Układ współrzędnych narzędzia jest **odniesiony do interfejsu mechanicznego** (rys. 2), do którego przyłączany jest element wykonawczy robota (np. chwytak, palnik spawalniczy) i często oznaczany w systemie robota jako  $TOOL_0$ . Środek układu współrzędnych interfejsu mechanicznego znajduje się domyślnie w punkcie środkowym kołnierza (nazywany jest potocznie układem współrzędnych kołnierza – ang. *flange*). W przypadku **układu współrzędnych narzędzia** w zasadzie można mówić o grupie układów współrzędnych, gdyż podczas programowania robota często dochodzi do sytuacji, kiedy robot ma kilka zainstalowanych efektorów lub też za pomocą systemu wymiany narzędzi dokonuje wymiany efektora podczas pracy. Układ współrzędnych narzędzia (ang. *tool*) jest kartezjańskim układem współrzędnych, odniesionym do narzędzia lub elementu roboczego i związany jest z interfejsem mechanicznym robota (powierzchnią montażową na końcu struktury przegubowej, do której przymocowany jest element roboczy, np. chwytak). Układ współrzędnych TOOL jest przesuwany przez użytkownika do punktu roboczego narzędzia i orientowany zgodnie z osią narzędzia. Dlatego, jeśli narzędziem jest np. palnik, charakteryzujący się zgiętym kształtem, układy  $TOOL_0$  i  $TOOL_i$  będą względem siebie przesunięte i obrócone (nie będą układami równoległymi).

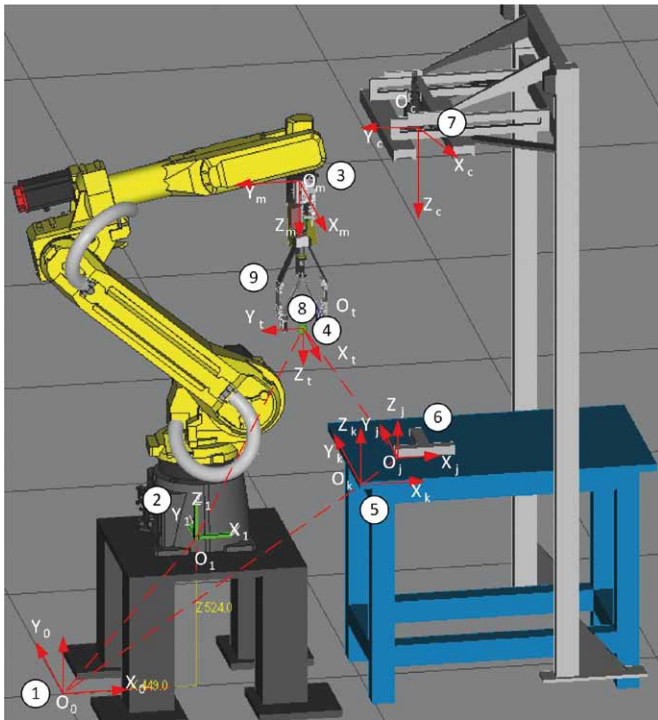
Kolejnym układem współrzędnych wymienionym w normie ISO 9787:2013 jest **układ współrzędnych zadania** (ang. *Task Coordinate System*). Układ współrzędnych zadania również jest układem kartezjańskim, umiejscowionym przez użytkownika w przestrzeni roboczej robota i wykorzystywanym w celu ułatwienia manipulacji robotem podczas określonych zadań, realizowanych w ramach procesu technologicznego. W zależności od potrzeby może być on definiowany wewnątrz maszyny,



Rys. 1. Układ współrzędnych połączenia

(Źródło: FANUC)

Wybierz swoją  
prenumeratę na  
[www.nis.com.pl](http://www.nis.com.pl)



reklama

**Rys. 2.** Umieszczenie układów współrzędnych systemu robotyzowanego: 1 – globalny układ współrzędnych (*World Coordinate System*); 2 – układ współrzędnych podstawy (*Base Coordinate System*); 3 – układ współrzędnych interfejsu mechanicznego (*Mechanical Interface Coordinate System*); 4 – układ współrzędnych narzędzia (*Tool Coordinate System*); 5 – układ współrzędnych zadania (*Task Coordinate System*); 6 – układ współrzędnych obiektu (*Object Coordinate System*); 7 – układ współrzędnych kamery (*Camera Coordinate System*); 8 – punkt środkowy narzędzia (*Tool Centre Point*); 9 – chwytak (*gripper*)

z którą współpracuje robot, na palecie, na stole, podajniku lub innym urządzeniu technologicznym. Część producentów robotów dla określenia układu współrzędnych, w którym realizowane są operacje procesowe, używa określenia *User Frame* (firma FANUC) lub *Base Frame* (firma KUKA). Układ ten (jego dowiązanie i orientowanie) może być zdefiniowany przez użytkownika w dowolnym punkcie przestrzeni roboczej.

Poza wymienionymi układami współrzędnych (zgodnie z normą ISO 9787:2013) czasami można spotkać dodatkowo **układ współrzędnych obiektu** (ang. *Object Coordinate System*) oraz **układ współrzędnych kamery** (ang. *Camera Coordinate System*). Pierwszy z nich powiązany jest z obiektem roboczym, zaś drugi – z kamerą systemu wizyjnego sprzężonego z robotem.

Zanim omówione zostanie zagadnienie programowania robota, warto przypomnieć podstawowe zależności związane z przekształceniami (transformacjami) poszczególnych układów współrzędnych względem siebie, ponieważ proces programowania nierozdzielnie wiąże się z generowaniem trajektorii robota od punktu do punktu.

Każde miejsce w przestrzeni roboczej może być określone przez wektor miejsca (rys. 3). Wektor ten tworzony jest za



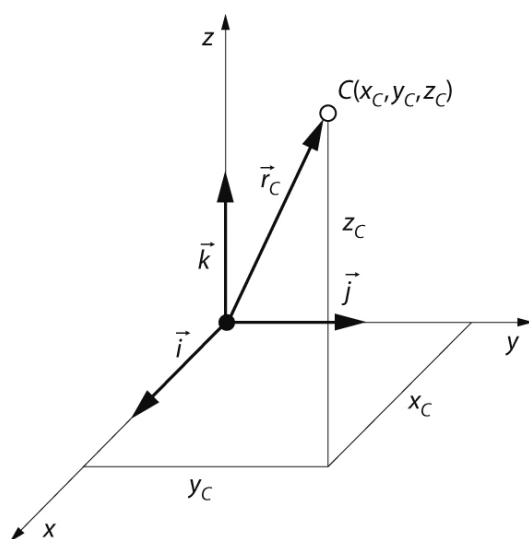
PRENUMERATA  
DRUKOWANA



PRENUMERATA  
ELEKTRONICZNA



PAKIET



Rys. 3. Wektory jednostkowe układu współrzędnych

pomocą tzw. wektorów jednostkowych ( $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ) charakteryzujących dowolny układ współrzędnych.

$$\vec{r}_C = x_C \cdot \vec{i} + y_C \cdot \vec{j} + z_C \cdot \vec{k} \quad (1)$$

lub w zapisie macierzowym

$$\vec{r}_C = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = [x_C, y_C, z_C]^T \quad (2)$$

gdzie  $T$  jako indeks górny oznacza macierz transponowaną (zamiana w macierzy kolumn na wiersze).

W rozważaniach kinematyki manipulatorów bardzo ważne są zależności pomiędzy współrzędnymi inercjalnymi (nieruchomymi) i współrzędnymi lokalnymi poszczególnych członów (rys. 4).

Jak widać, przemieszczenie układu lokalnego względem bazowego opisuje wektor miejsca. Łatwo zauważyć, że układ lokalny może być nie tylko przesunięty względem układu bazowego, ale również obrócony (względem poszczególnych osi układu – rys. 4). Tę drugą operację (obrót) można opisać poprzez tworzona za pomocą cosinusów kierunkowych macierzy obrotu o wymiarach  $3 \times 3$ .

Można zapisać dla układu bazowego:

$${}^0\vec{r}_C = {}^0x_C \cdot \vec{i}_0 + {}^0y_C \cdot \vec{j}_0 + {}^0z_C \cdot \vec{k}_0 \quad (3)$$

Dla układu  $i$ -tego (obróconego):

$${}^i\vec{r}_C = {}^ix_C \cdot \vec{i}_i + {}^iy_C \cdot \vec{j}_i + {}^iz_C \cdot \vec{k}_i \quad (4)$$

Obydwa wektory są reprezentacją tego samego wektora  $r$  – można więc zapisać:

$${}^0x_C = {}^0\vec{r}_C \cdot \vec{i}_0 = {}^i\vec{r}_C \cdot \vec{i}_0 = {}^ix_C \cdot \vec{i}_i \cdot \vec{i}_0 + {}^iy_C \cdot \vec{j}_i \cdot \vec{i}_0 + {}^iz_C \cdot \vec{k}_i \cdot \vec{i}_0 \quad (5)$$

$${}^0y_C = {}^0\vec{r}_C \cdot \vec{j}_0 = {}^i\vec{r}_C \cdot \vec{j}_0 = {}^ix_C \cdot \vec{i}_i \cdot \vec{j}_0 + {}^iy_C \cdot \vec{j}_i \cdot \vec{j}_0 + {}^iz_C \cdot \vec{k}_i \cdot \vec{j}_0 \quad (6)$$

$${}^0z_C = {}^0\vec{r}_C \cdot \vec{k}_0 = {}^i\vec{r}_C \cdot \vec{k}_0 = {}^ix_C \cdot \vec{i}_i \cdot \vec{k}_0 + {}^iy_C \cdot \vec{j}_i \cdot \vec{k}_0 + {}^iz_C \cdot \vec{k}_i \cdot \vec{k}_0 \quad (7)$$

Jako równanie wektorowe, równania (5–7) można zapisać w postaci:

$${}^0\vec{r}_C = {}^0rot_i \cdot {}^i\vec{r}_C \quad (8)$$

gdzie macierz obrotu jest równa ( $R^{3 \times 3}$  – zbiór liczb rzeczywistych):

$${}^0rot_i = \begin{bmatrix} \vec{i}_i \cdot \vec{i}_0 & \vec{j}_i \cdot \vec{i}_0 & \vec{k}_i \cdot \vec{i}_0 \\ \vec{i}_i \cdot \vec{j}_0 & \vec{j}_i \cdot \vec{j}_0 & \vec{k}_i \cdot \vec{j}_0 \\ \vec{i}_i \cdot \vec{k}_0 & \vec{j}_i \cdot \vec{k}_0 & \vec{k}_i \cdot \vec{k}_0 \end{bmatrix} \in R^{3 \times 3} \quad (9)$$

Dla przypadków szczególnych można zapisać następujące zależności:

- jeśli  $i$ -ty układ jest przesunięty względem układu bazowego, a jego orientacja jest taka sama, jak układu bazowego (poszczególne osie układu są do siebie równoległe – rys. 4 a):

$${}^0\vec{r}_C = {}^0\vec{r}_i + {}^0\vec{r}_{iC} \quad (10)$$

- jeśli  $i$ -ty układ jest obrócony względem układu bazowego, a jego początek pokrywa się z początkiem układu bazowego – rys. 4 b):

$${}^0\vec{r}_{iC} = {}^0rot_i \cdot {}^i\vec{r}_C \quad (11)$$

Pełną transformację współrzędnych (rys. 4 c) można przedstawić jako połączenie przemieszczenia (translacji) i obrotu (rotacji):

$${}^0\vec{r}_C = {}^0\vec{r}_i + {}^0rot_i \cdot {}^i\vec{r}_C \quad (12)$$

Zależność (12) mówi, iż znając współrzędne lokalne (wektor  ${}^i\vec{r}_C$ ) oraz pozycję (wektor  ${}^0\vec{r}_i$ ) i orientację (macierz obrotu  ${}^0rot_i$ )  $i$ -tego układu współrzędnych względem układu nieruchomego, można wyznaczyć współrzędne inercjalne punktu  $C$  (znaleźć transformację współrzędnych układu lokalnego względem układu nieruchomego).

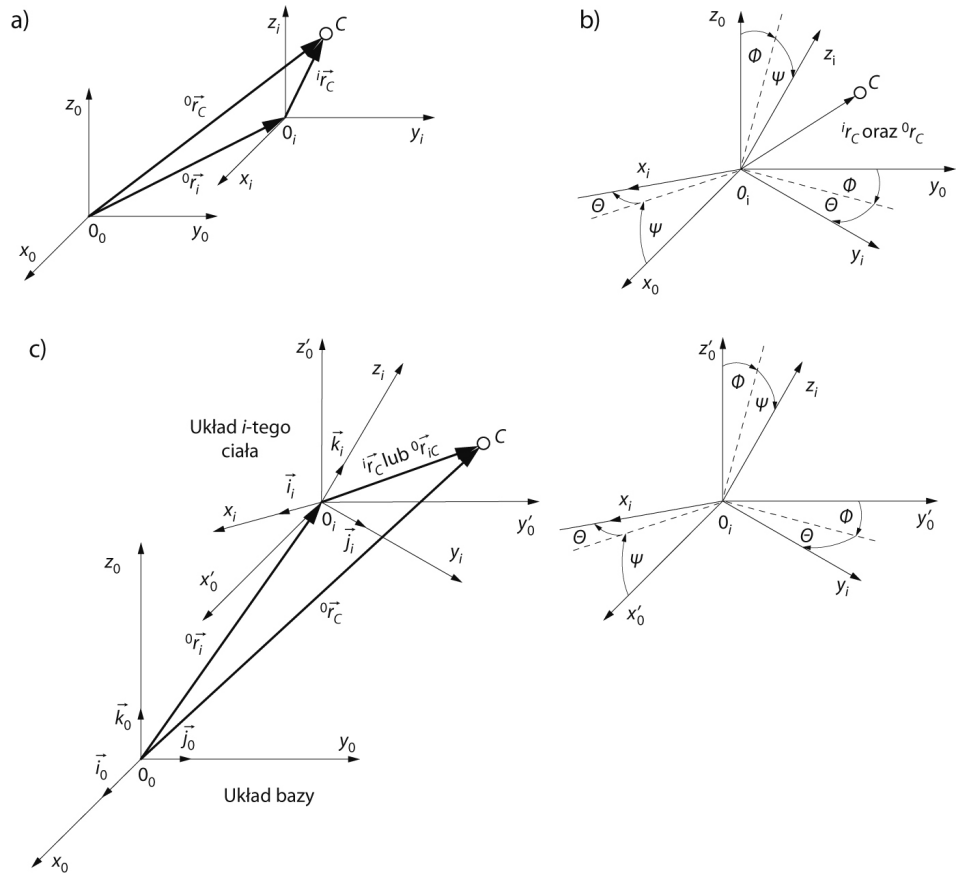
Odwrócenie tego związku prowadzi do równania transformacji odwrotnej, tzn. znalezienia transformacji współrzędnych układu nieruchomego względem układu lokalnego.

Rys. 4. Widok wzajemnego położenia układów współrzędnych:

- a) układ i-tego ciała jest przemieszczony względem układu bazowego;
- b) układ i-tego ciała jest obrócony względem układu bazowego;
- c) układ i-tego ciała jest przemieszczony i obrócony względem układu bazowego.

Oznaczenia:

- prawy, dolny indeks oznacza nowy układ lub nowe położenie po transformacji;
- lewy górny indeks oznacza układ, względem którego dokonano transformacji;
- $O_i$  - początek układu współrzędnych ciała  $i$ ;
- $C$  - zmienny punkt ciała;
- wektory jednostkowe układu inercjalnego -  $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ ;
- wektory jednostkowe układu ciała  $i$  -  $\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i$ ;
- wektor miejsca w układzie bazowym  ${}^0\vec{r}_C = {}^0x_C \cdot \vec{i}_0 + {}^0y_C \cdot \vec{j}_0 + {}^0z_C \cdot \vec{k}_0$ ;
- wektor miejsca w układzie lokalnym  ${}^i\vec{r}_C = {}^ix_C \cdot \vec{i}_i + {}^iy_C \cdot \vec{j}_i + {}^iz_C \cdot \vec{k}_i$



$${}^i\vec{r}_C = ({}^0rot_i)^T ({}^0\vec{r}_C - {}^0\vec{r}_i) = {}^irot_0 \cdot {}^0\vec{r}_C \quad (13)$$

Wyznaczone wyrażenia (12 i 13) pozwalają na rozwiązanie dwóch najważniejszych w teorii kinematyki manipulatorów zadań (prostego i odwrotnego), a poprzez ich różniczkowanie po czasie dają możliwość wyznaczenia zależności dla prędkości i przyspieszeń. Szczególnymi przypadkami omawianych transformacji są:

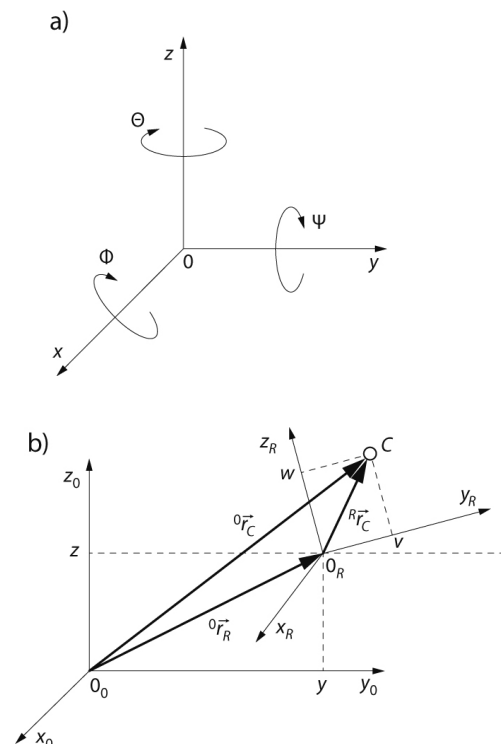
- czysty obrót (wektor przemieszczenia jest równy zero)  ${}^0\vec{r}_i = 0$ ;
- czyste przemieszczenie (macierz obrotu jest macierzą jednostkową)  ${}^0rot_i = I$ .

### Obroty elementarne

Zgodnie z ogólnie panującymi zasadami przyjęto prawoskrętny układ współrzędnych (rys. 5 a). Założono, że zmienne/wektory związane z obróconym układem współrzędnych będą oznaczane indeksem  $R$  (rys. 5 b). Można wówczas zapisać:

$${}^0\vec{r}_R = [x, y, z]^T, \quad {}^R\vec{r}_C = [u, v, w]^T \quad (14)$$

Dla poszczególnych obrotów elementarnych można zapisać następujące zależności:



Rys. 5. Oznaczenie obrotów poszczególnych osi układu

- Obrót wokół osi  $x$  (rys. 6 a).

Związek między współrzędnymi punktu  $C$  w bazowym układzie współrzędnych i w obróconym układzie współrzędnych ma postać:

$$\begin{aligned} {}^0\vec{r}_C &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = {}^0\vec{r}_R + \text{rot}_x(\phi) \cdot {}^R\vec{r}_C = \\ &= {}^0\vec{r}_R + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie macierz obrotu wokół osi  $x$  jest opisana macierzą:

$$\text{rot}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (15)$$

- Obrót wokół osi  $y$  (rys. 6 b).

Macierz obrotu wokół osi  $y$  można opisać wyrażeniem:

$$\text{rot}_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (16)$$

- Obrót wokół osi  $z$  (rys. 6 c)

Macierz obrotu wokół osi  $z$  można opisać wyrażeniem:

$$\text{rot}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

### Obroty złożone

Obroty złożone mogą być tworzone z trzech kolejno po sobie wykonywanych obrotów elementarnych.

Należy pamiętać o tym, iż mnożenie macierzy nie jest przemienne, dlatego kolejność wykonywania obrotów elementarnych jest ważna i wpływa na wynik końcowy (postać macierzy obrotów złożonych). Dowodem tego są macierze przedstawione poniżej jako wzory (18) i (19).

$$\begin{aligned} \text{rot}(\phi, \psi, \theta) &= \text{rot}_x(\phi) \cdot \text{rot}_y(\psi) \cdot \text{rot}_z(\theta) = \\ &= \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -c_\psi s_\theta & s_\psi \\ c_\phi s_\theta + s_\phi s_\psi c_\theta & c_\phi c_\theta - s_\phi s_\psi s_\theta & -s_\phi c_\psi \\ s_\phi s_\theta - c_\phi s_\psi c_\theta & s_\phi c_\theta + c_\phi s_\psi s_\theta & c_\phi c_\psi \end{bmatrix} \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\theta, \psi, \phi) &= \text{rot}_z(\theta) \cdot \text{rot}_y(\psi) \cdot \text{rot}_x(\phi) = \\ &= \begin{bmatrix} s_\psi c_\theta & -c_\phi s_\theta + s_\phi s_\psi c_\theta & s_\phi s_\theta + c_\theta s_\psi c_\phi \\ s_\theta c_\psi & c_\phi c_\theta + s_\phi s_\psi s_\theta & -s_\phi c_\theta + c_\phi s_\psi s_\theta \\ -s_\psi & s_\phi c_\psi & c_\phi s_\psi \end{bmatrix} \quad (19) \end{aligned}$$

Gdzie przykładowo:

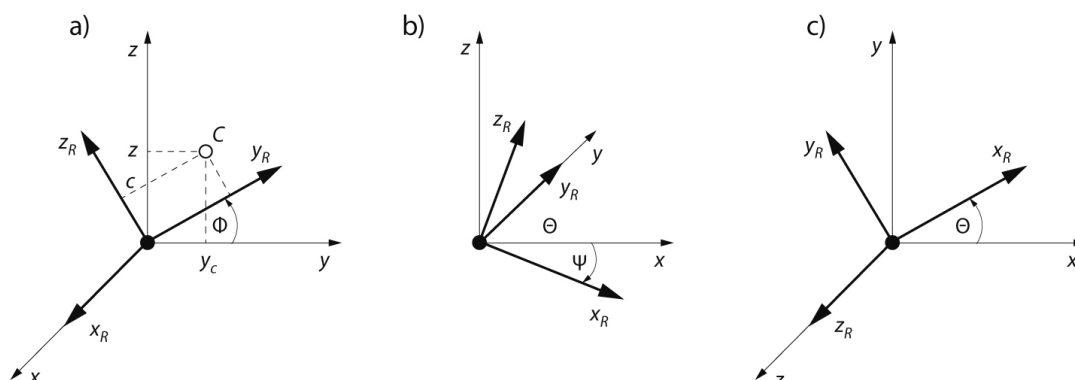
$$s_\psi = \sin(\psi), c_\theta = \cos(\theta), \dots$$

### Współrzędne i transformacje jednorodne

Przedstawione wyżej rozważania przeprowadzono, opierając się na współrzędnych niejednorodnych. Jednak już od 1969 roku, kiedy to do obliczeń wykorzystano komputery, wszystkie problemy związane z kinematyką manipulatorów rozwiązywane są przy wykorzystaniu **współrzędnych homogenicznych (jednorodnych)**.

Zasada wykorzystania współrzędnych jednorodnych polega na tym, że punkt o współrzędnych kartezjańskich  $x, y, z$  opisuje się czterema liczbami  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , przy czym nie wszystkie z nich mogą być jednocześnie równe zero. Zależność między współrzędnymi prostokątnymi  $(x, y, z)$  i współrzędnymi jednorodnymi można zapisać następująco:

$$x = \frac{x_1}{x_4} \quad y = \frac{x_2}{x_4} \quad z = \frac{x_3}{x_4} \quad (20)$$



Rys. 6. Obroty elementarne wokół: a) osi  $x$ ; b) osi  $y$ ; c) osi  $z$



Współrzędne jednorodne można określić za pomocą wektora:

$$\bar{R} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

lub przy założeniu, że  $x_4 = 1$  (rozpatrywane ciała – człony manipulatora – są ciałami sztywnymi, więc współczynnik skali, jakim jest  $x_4$ , równa się jedności).

$$\bar{R} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ 1]^T \quad (21)$$

Wprowadzenie współrzędnych jednorodnych umożliwiło rozszerzenie macierzy  $N$ -wymiarowej do wymiaru  $(N + 1)$ , tworząc tzw. **jednorodną macierz transformacji** o postaci:

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} \text{macierz rotacji} & \text{wektor translacji} \\ \hline 000 & \text{czynnik skali} \end{array} \right] \quad (22)$$

Czynnik skali może opisywać np. odkształcenie (przeskalowanie) obiektu w trójwymiarowej przestrzeni i jest szeroko stosowany w grafice komputerowej. W robotyce, ze względu na to, iż rozpatrywane ciała są ciałami sztywnymi, przyjmuje się go jednak jako równy jeden. W efekcie tego macierz transformacji jednorodnej  $T$  przybiera następującą ogólną postać:

$${}^{i-1}T_i = \left[ \begin{array}{c|c} \text{macierz rotacji} & \text{wektor translacji} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} {}^{i-1}rot_i & {}^{i-1}\vec{r}_i \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right] \in R^{4 \times 4} \quad (23)$$

Przypadkami szczególnymi jednorodnej macierzy transformacji są:

- czysta rotacja ( $\vec{r} = 0$ ) – wektor przemieszczenia jest równy zeru

$$T_{r=0} = Rot = \left[ \begin{array}{c|c} rot & 0 \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right] \quad (24)$$

- czysta translacja ( $rot = I$ ) – macierz obrotu jest macierzą izogonalną

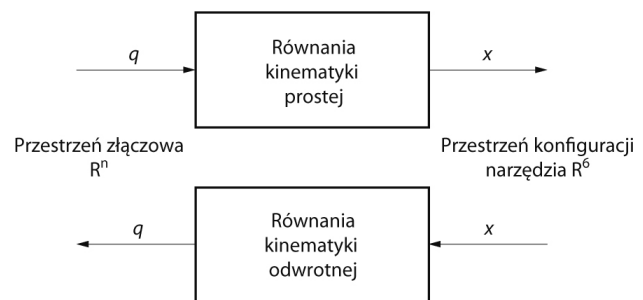
$$T_{rot=I} = P = \left[ \begin{array}{c|c} I & \vec{r} \\ \hline 000 & 1 \end{array} \right] \quad (25)$$

### Kinematyka prosta (bezpośrednia) i odwrotna

W robotach przemysłowych nie ma bezpośredniego pomiaru położenia końcówki efektora. Położenie poszczególnych par kinematycznych określa się w podstawowym układzie współrzędnych dla robota, a mianowicie w układzie współrzędnych złączowych (osiowych).

Naturalnymi zmiennymi, w jakich pracuje robot, są współrzędne złączowe (nazywane często zmiennymi złączowymi):

- kąt – dla złącza obrotowego;
- przesunięcie – dla złącza pryzmatycznego.



Rys. 7. Zadanie proste kinematyki a zadanie odwrotne

Pomiary wartości zmiennych złączowych realizowane są za pomocą enkoderów lub resolwerów w sposób ciągły w poszczególnych złączach (osiach) łańcucha kinematycznego. Do przeliczenia pomiarów w złączach na położenie końcówki w układzie kartezyjskim wykorzystuje się równania kinematyki robota, co nazywane jest w robotyce zadaniem prostym kinematyki.

Jednym z głównych problemów związanych z zagadnieniami robotyki jest opis kinematyczny układu wielociałowego, jakim jest manipulator. Przez opis taki rozumie się związek opisujący zależność geometryczną między współrzędnymi uogólnionymi  $q$  i współrzędnymi kartezyjskimi otoczenia (rys. 7):

$$\bar{R} = f(q) \quad (26)$$

Przedstawiona zależność ma szczególne znaczenie przy wyznaczaniu położenia chwytaka. Często jednak występuje sytuacja odwrotna, tzn. znając położenie chwytaka, konieczne jest wyznaczenie zmiennych uogólnionych, co sprowadza się do określenia konfiguracji układu wielociałowego według zależności (rys. 7):

$$q = f^{-1}(\bar{R}) \quad (27)$$

### Zadanie proste kinematyki

Konfiguracja (parametry geometryczne) układu manipulatora jest realizowana poprzez zmienne konfiguracyjne złączy  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , tzn. że każdej wartości zmiennej konfiguracyjnej odpowiada jedno położenie chwytaka w układzie bazowym. Zakładając, że chwytak  $C$  jest zdefiniowany miejscem na ciele i układu wielociałowego, można to zapisać:

$${}^0\bar{R}_C = {}^0T_i \cdot {}^i\bar{R}_C \quad (28)$$

Zadanie bezpośrednie kinematyki można podzielić na etapy:

1. Usytuowanie manipulatora w położeniu początkowym i wprowadzenie układu bazowego.
2. Wprowadzenie układów lokalnych dla wszystkich członów manipulatora.
3. Wprowadzenie współrzędnych konfiguracyjnych.
4. Wyznaczenie wzajemnych położen poszczególnych członów za pomocą jednorodnych macierzy transformacji  ${}^{i-1}T_{ii} = 1, 2, \dots, n$ .

5. Wyznaczenie położenia końcówki manipulatora względem układu bazowego  ${}^0T_i = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot \dots \cdot {}^{i-1}T_i$ .

6. Wyznaczenie zależności pomiędzy współrzędnymi bazowymi i współrzędnymi lokalnymi końcówki manipulatora  ${}^0\vec{R}_C = {}^0T_i \cdot {}^i\vec{R}_C$ .

Założono, że należy wyznaczyć jednorodną macierz transformacji  ${}^0T_2$  oraz współrzędne wektora  ${}^0r_2$  manipulatora przedstawionego na rysunku 8.

Ze względu na dwuczłonową budowę wprowadzono trzy układy współrzędnych (bazowy  $U_0$  i dwa lokalne  $U_1$  i  $U_2$ ).

Transformację układu bazowego  $U_0$  do pierwszego układu lokalnego  $U_1$  można opisać jako iloczyn macierzy obrotu i przemieszczenia:

$${}^0T_1 = {}^0Rot_1 \cdot {}^0P_1$$

gdzie:

$${}^0Rot_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ 0 & \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & l_1 \cdot \cos \phi_1 \\ 0 & \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & l_1 \cdot \sin \phi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podobnie można opisać transformację układu lokalnego  $U_1$  do drugiego układu lokalnego  $U_2$ :

$${}^1T_2 = {}^1Rot_2 \cdot {}^1P_2$$

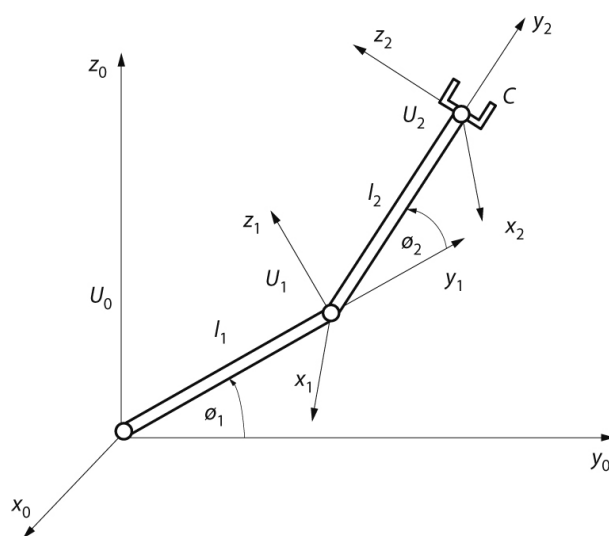
gdzie:

$${}^1Rot_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ 0 & \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & l_2 \cdot \cos \phi_2 \\ 0 & \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & l_2 \cdot \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz transformacji jednorodnej  ${}^0T_2$  można zapisać w postaci:

$${}^0T_2 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_1 + \phi_2) & -\sin(\phi_1 + \phi_2) & l_1 \cdot \cos \phi_1 + l_2 \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ 0 & \sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) & l_1 \cdot \sin \phi_1 + l_2 \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 8. Widok manipulatora dwuramiennego

Współrzędne końcówki manipulatora we współrzędnych bazowych można wyznaczyć ze wzoru:

$${}^0\vec{R}_C = {}^0T_2 \cdot {}^2\vec{R}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \cdot \cos \phi_1 + l_2 \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ l_1 \cdot \sin \phi_1 + l_2 \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

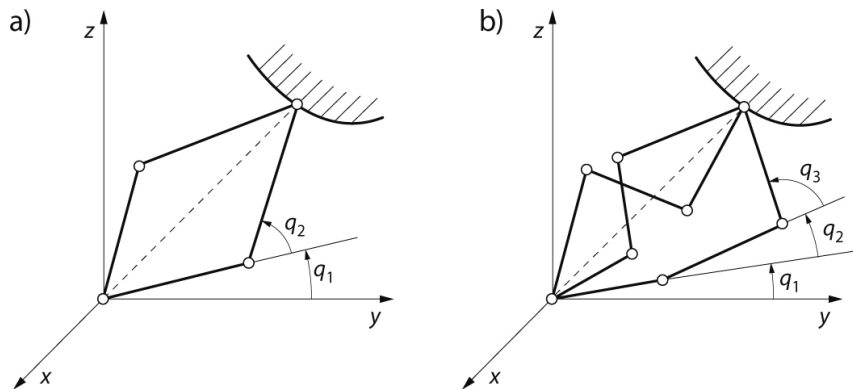
gdzie:  ${}^0\vec{R}_2$  oznacza wektor we współrzędnych jednorodnych.

Wartości współrzędnych układu globalnego można opisać wzorami:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= l_1 \cdot \cos \phi_1 + l_2 \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ z_0 &= l_1 \cdot \sin \phi_1 + l_2 \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2) \end{aligned}$$

### Zadanie odwrotne kinematyki

Podczas sterowania i programowania robotów przemysłowych zadane w programie współrzędne, opisujące położenie i orientację narzędzia, muszą być przekształcone na zmienne złączowe robota. Dzięki temu kontroler robota może wysterować i ustawić osie robota w celu osiągnięcia zadanego położenia i orientacji. Zadanie to w robotyce nazywane jest zadaniem odwrotnym kinematyki. Z uwagi na nieliniowość funkcji  $f(q)$  zadanie odwrotne kinematyki można rozwiązać tylko w szczególnych przypadkach. Może się jednak zdarzyć, że rozwiązania nie ma w ogóle lub ilość rozwiązań jest nieskończona. Ilość rozwiązań zależy od relacji pomiędzy liczbą stopni swobody i liczbą współrzędnych otoczenia. Relacja ta powoduje, iż układy można podzielić na:



Rys. 9. Układy manipulatorów: a) układ normalny; b) układ redundantny

- **układy normalne**, w których liczba stopni swobody odpowiada wymiarowi wektora otoczenia (równanie  $q = f^{-1}(\vec{R})$  jest jednoznacznie rozwiązywalne do symetrii – rys. 9 a);
- **układy podoznaczone**, w których liczba stopni swobody jest mniejsza od wymiaru wektora otoczenia (równanie  $q = f^{-1}(\vec{R})$  można rozwiązać tylko w szczególnych przypadkach);
- **układy redundantne**, których liczba stopni swobody jest większa od wymiaru wektora otoczenia (równanie  $q = f^{-1}(\vec{R})$  ma nieskończenie wiele rozwiązań – rys. 9 b).

Dla przykładu wyznaczono współrzędne konfiguracyjne dla manipulatora przedstawionego na rysunku 8. Dane są więc zależności:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= l_1 \cdot \cos \phi_1 + l_2 \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ z_0 &= l_1 \cdot \sin \phi_1 + l_2 \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2) \end{aligned}$$

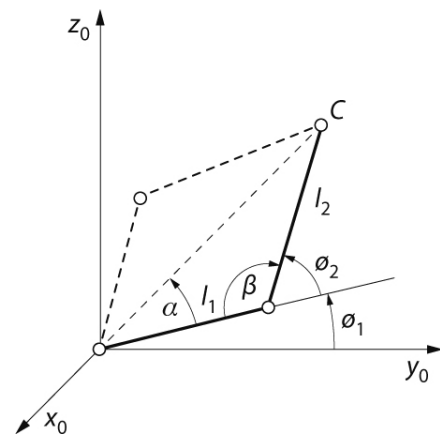
Rozwiązanie w tym przypadku polega na wyznaczeniu kątów  $\phi_1$  i  $\phi_2$  w funkcji  $x, y, z$ , czyli  $f_i = f^{-1}(x, y, z)$ . W związku z tym, iż  $x_0 = 0$ , układ sprowadza się do zależności  $\phi_i = f^{-1}(y, z)$ .

Wprowadzono dodatkowe kąty  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 10). Z poniższego rysunku można wyciągnąć wniosek, że istnieją dwa rozwiązania zadania (w nomenklaturze robotyki pozycje: łokieć u góry, łokieć u dołu).

Po wprowadzeniu  $\beta = \pi - \phi_2$  z twierdzenia cosinusów wynika:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos(\pi - \phi_2) = -\cos \phi_2 \\ y_0^2 + z_0^2 &= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \phi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \phi_2 &= \left( \frac{y_0^2 + z_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \cdot l_2} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \phi_2 &= \arccos \left( \frac{y_0^2 + z_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \cdot l_2} \right) \end{aligned}$$



Rys. 10. Manipulator dwuramienny

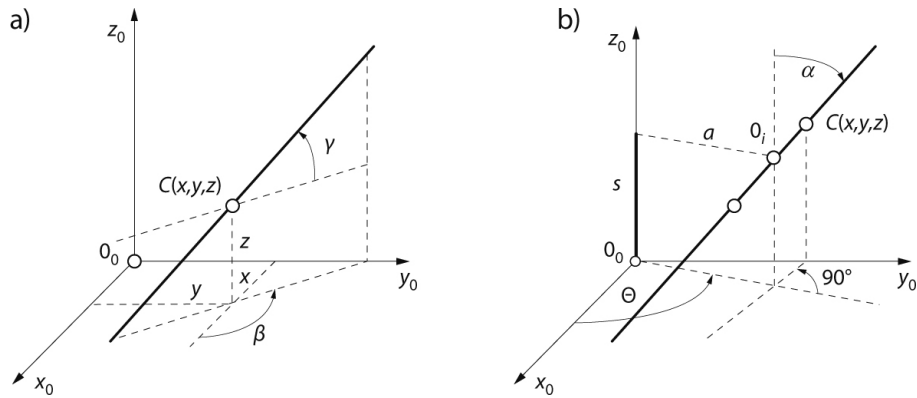
Z uwagi na fakt, iż funkcja cosinus jest parzysta, wygodniej jest przedstawić powyższą zależność w postaci:

$$\begin{aligned} \cos \phi_2 &= \left( \frac{y_0^2 + z_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \cdot l_2} \right) = D \\ \phi_2 &= \arccos \left( \frac{\pm \sqrt{1 - D^2}}{D} \right) \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu  $\alpha$  z twierdzenia sinusów wynika:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{l_2}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}} \sin \phi_2 = \frac{l_2}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}} \sqrt{1 - \cos^2 \phi_2} = \\ &= \frac{l_2}{\sqrt{y_0^2 + z_0^2}} \sqrt{1 - \left( \frac{y_0^2 + z_0^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 \cdot l_2} \right)^2} \end{aligned}$$





**Rys. 11.** Układy współrzędnych: a) układ tradycyjny; b) układ współrzędnych według notacji D-H

podstawiając:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \phi_1) = \frac{z_0}{y_0} \rightarrow \phi_1 = \arctg\left(\frac{z_0}{y_0}\right) - \alpha$$

uzyskano rozwiązanie

$$\phi_1 = \arctg\left(\frac{y_0}{z_0}\right) - \arcsin\left[\sqrt{\frac{(2l_1 \cdot l_2)^2 - (y_0^2 + z_0^2 - l_1^2 - l_2^2)^2}{4l_1^2 \cdot (y_0^2 + z_0^2)}}\right]$$

**Notacja Denavita-Hartenberga**

Biorąc pod uwagę, iż każde złącze (oś) robota ma jeden stopień swobody (połączenie klasy V), działanie każdego złącza można opisać jedną liczbą rzeczywistą (zmienną złączową/osiową): kątem obrotu w przypadku członu obrotowego lub przemieszczeniem w przypadku członu pryzmatycznego (przesuwnego). W związku z powyższym do opisu kinematyki robotów można wykorzystywać podejście oparte na równaniach mechaniki klasycznej lub zastosować odpowiednią konwencję obliczeń.

Z uwagi na fakt, iż podczas rozwiązywania zadań kinematyki manipulatorów może dojść do niejednoznaczności przyjmowania układów współrzędnych (ich położenia i orientacji), a co za tym idzie – powstawania utrudnień w analizie wyników obliczeń (zwłaszcza jeśli analizę prowadzą osoby, które nie wykonywały obliczeń), należy stosować się do pewnych ogólnie przyjętych zasad [I.7, I.22, I.23, I.27].

Analizę mechanizmów zajmowano się już w XIX wieku. Wielu naukowców szukało metody, która umożliwiłaby nie tylko analizę mechanizmów istniejących, ale również syntezę nowych. Opracowanie nowej, niezawodnej metody zapoczątkował F. Reloux w 1900 roku. Jednak dopiero w latach 50. udało się utworzyć notację występującą do dzisiaj pod nazwą Denavita-Hartenberga (dalej: notacja D-H). Jak wcześniej wspomniano, możliwe jest dokonanie obliczeń bez przestrzegania tej konwencji, jednak w celu uproszczenia równań oraz dla kreowania

uniwersalnego języka notacja ta jest bardzo często wykorzystywana do opisu kinematyki.

Jak wiele istniejących metod, również notacja D-H ma zalety i wady.

Do zalet z całą pewnością należy zaliczyć:

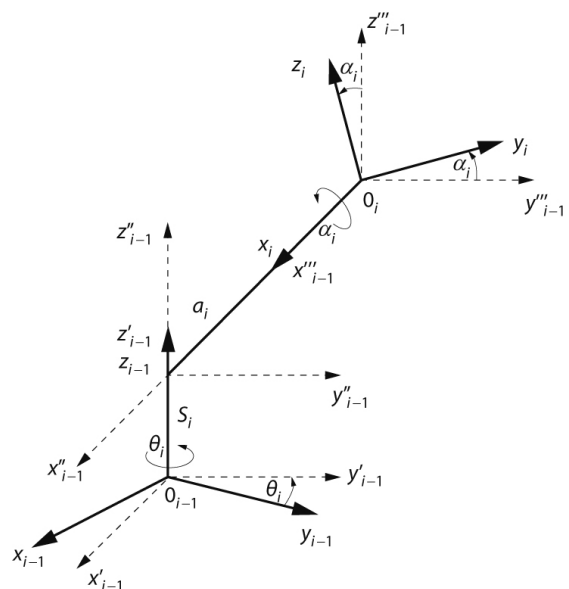
- możliwość opisu typu mechanizmu;
- możliwość przedstawienia ruchu mechanizmu;
- możliwość opisu ruchu za pomocą równań matematycznych.

Jej główne wady to:

- opis par kinematycznych niższego rzędu;
- komplikacja obliczeń.

Zaproponowany przez J. Denavita i R.S. Hartenberga specjalny układ współrzędnych umożliwia opis prostej w przestrzeni czterema (rys. 11 b), a nie pięcioma (rys. 11 a) parametrami.

Odnosząc opis do układu manipulatora, można powiedzieć, że położenie dwóch kolejnych układów współrzędnych  $i-1$  oraz  $i$  może być określone za pomocą czterech parametrów (rys. 12).



**Rys. 12.** Charakterystyka notacji D-H

Oś wiążąca dwa człony kinematyczne nazywana jest **osią pary kinematycznej**. W przypadku par kinematycznych klasy V (pary mające jeden stopień swobody) osiami pary kinematycznej są:

- oś obrotu członu  $i$  względem  $i-1$  dla pary obrotowej – oś  $z_{i-1}$ ;
- prosta o kierunku przemieszczania się członu  $i$  względem  $i-1$  dla pary przesuwniej – oś  $z_{i-1}$ .

Wzajemne usytuowanie dwóch kolejnych układów wyznaczają parametry:

- kąt konfiguracji członów  $\theta_i$  powstały w wyniku obrotu wokół osi  $z_{i-1}$  do momentu, aż osie  $x_{i-1}$  i  $x_i$  staną się równoległe;
- odsunięcie członu  $s_i$  powstałe w wyniku przesunięcia wzdłuż osi  $z_{i-1}$  do momentu, aż osie  $x_{i-1}$  i  $x_i$  pokryją się;
- długość członu  $a_i$  powstała w wyniku przesunięcia wzdłuż osi  $x_i$  do momentu, aż początki układów  $0_{i-1}$  i  $0_i$  pokryją się;
- kąt skręcenia członu  $\alpha_i$  powstały w wyniku obrotu wokół osi  $x_i$  do momentu, aż pokryją się wszystkie osie.

Spośród czterech wymienionych parametrów  $a_i$  oraz  $s_i$  są zawsze stałe, ponieważ określa je konstrukcja członów. Dwa pozostałe natomiast mogą być zmienne.

Ogólnie dla wektora przemieszczenia we współrzędnych jednorodnych można zapisać:

$${}^{i-1}\vec{R}_i = {}^{i-1}T_i \cdot {}^i\vec{R}_i \quad \text{gdzie} \quad {}^{i-1}T_i = Rot_{z(i-1)} \cdot P_{z(i-1)} \cdot P_{x(i)} \cdot Rot_{x(i)} \quad (29)$$

gdzie:

$Rot_{z(i-1)}$  – macierz transformacji jednorodnej dla czystego obrotu wokół osi  $z_{i-1}$ ;

$P_{z(i-1)}$  – macierz transformacji jednorodnej dla czystego przemieszczenia wzdłuż osi  $z_{i-1}$ ;

$P_{x(i)}$  – macierz transformacji jednorodnej dla czystego przemieszczenia wzdłuż osi  $x_i$ ;

$Rot_{x(i)}$  – macierz transformacji jednorodna dla czystego obrotu wokół osi  $x_i$ .

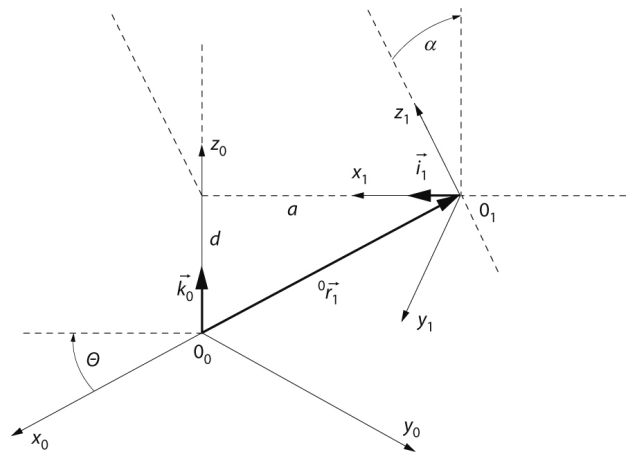
Po wymnożeniu (29) macierz transformacji jednorodnej przyjmuje postać:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Aby można było jednoznacznie zdefiniować kierunki osi (wersory kierunkowe) układów: układy  $0_{i-1}$  oraz  $0_i$  charakteryzują się następującymi własnościami (rys. 13):

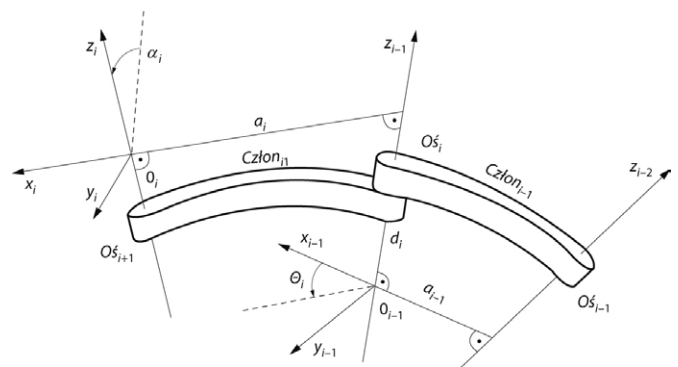
- oś  $x_i$  jest prostopadła do osi  $z_{i-1}$  – warunek  $D-H_1$
- oś  $x_i$  przecina oś  $z_{i-1}$  – warunek  $D-H_2$ .

Początek układu  $0_i$  nie musi leżeć na przegubie  $i$ . Poza tym istnieje wiele możliwości wyboru położenia układów (dwóch inżynierów może przypisać kolejne układy w różny sposób). W celu ustalenia  $i$ -tego układu niezbędne jest rozpatrzenie dwóch przypadków:



Rys. 13. Wzajemne położenie sąsiadujących ze sobą układów współrzędnych

(Źródło: opracowano na podstawie [I.22, I.23, I.27])



Rys. 14. Wzajemne położenie sąsiadujących ze sobą układów współrzędnych: osie  $z_{i-1}$ ,  $z_i$  nie leżą w jednej płaszczyźnie

(Źródło: na podstawie [I.22, I.23, I.27])

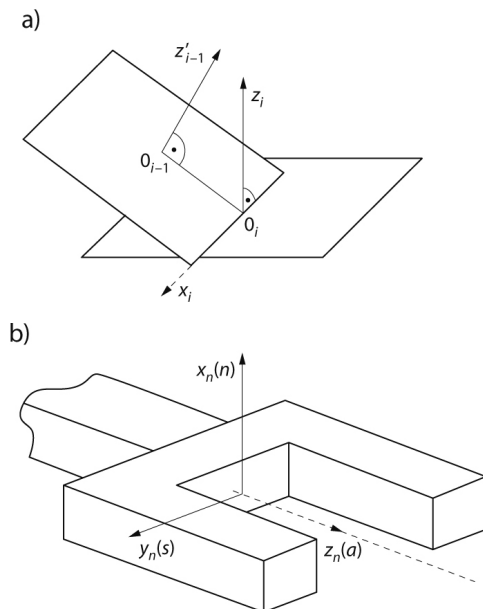
1. Osie  $z_{i-1}$ ,  $z_i$  nie leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 14) – wówczas istnieje dokładnie jeden odcinek prostopadły do obu osi, który łączy obie osie i ma najmniejszą długość. Prosta zawierająca ten odcinek (prostopadłą do osi  $z_{i-1}$  i  $z_i$ ) należy obracać za oś  $x_i$ , a punkt przecięcia z osią  $z_i$ , przyjmując za początek układu  $0_i$ . Oś  $y_i$  dobiera się tak, aby tworzyła z pozostałymi osiami układ prawoskrętny.
2. Osie  $z_{i-1}$ ,  $z_i$  leżą w jednej płaszczyźnie:
  - a) są równoległe – istnieje wówczas nieskończenie wiele wspólnych normalnych między nimi, dlatego przyjmuje się, że:
    - oś  $x_i$  jest prostopadła do  $z_{i-1}$ ;
    - wybrany na  $i$ -tym przegubie początek układu  $0_i$  spełnia warunek, że oś  $x_i$  przez niego przechodzi;
  - b) przecinają się – oś  $x_i$  jest skierowana prostopadłe do  $z_{i-1}$  oraz  $z_i$  i przyjmowana jest zgodnie z zasadą przedstawioną na rysunku 15 a (oś  $x_i$  jest normalna do płaszczyzny, na

której leżą osie  $z_{i-1}$  oraz  $z_i$ ). Można też przyjąć oś  $x_i$  jako prostopadłą do płaszczyzny wyznaczonej przez osie  $z_{i-1}$  i  $z_i$  na przecięciu się tych osi. Oś  $y_i$  dobiera się tak, aby tworzyła z pozostałymi osiami układ prawoskrętny.

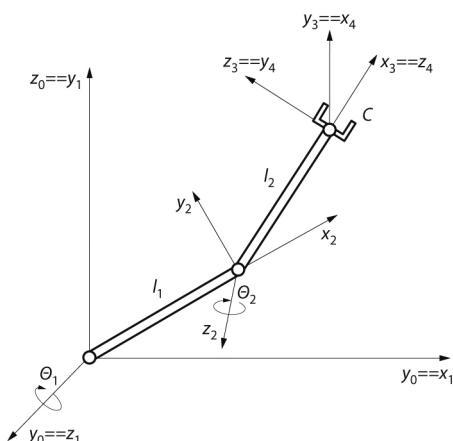
Układ współrzędnych związany z chwytakiem orientuje się oddzielnie (rys. 15 b):

- oś  $z_n$  określa kierunek zbliżania się chwytaka do obiektu (ang. *a-approach*);
- oś  $y_n$  leży w płaszczyźnie chwytania – wzdłuż tej osi poruszają się szczęki chwytaka (ang. *s-sliding*);
- oś  $x_n$  jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez osie  $z_n$  i  $y_n$  i tworzy z nimi układ prawoskrętny (ang. *n-normal*).

Dla przykładu przedstawiono metodykę wyznaczania jednorodnej macierzy transformacji  ${}^0T_3$  manipulatora przedstawionego na rysunku 16 przy wykorzystaniu notacji D-H.



Rys. 15. Zasada przyjmowania osi układów: a) w osiach manipulatora; b) w chwytaku



Rys. 16. Widok manipulatora dwuramiennego

Zadanie można rozwiązać, opierając się na zasadach rozważania wcześniej przedstawionych układów manipulatorów. Wprowadzono cztery układy współrzędnych.

Położenie i orientację występujących w manipulatorze układów można zestawzić w tabeli 1.

Macierze transformacji jednorodnej mają następującą postać:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \cdot \cos(0) & \sin(\theta_1) \cdot \sin(0) & l_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \cdot \cos(0) & -\cos(\theta_1) \cdot \sin(0) & l_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(0) & \cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & l_1 \cdot \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & l_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin(\theta_2) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & l_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos(\theta_2) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & l_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & -\sin(\theta_2) & l_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) & l_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz transformacji jednorodnej  ${}^0T_4$  można wyznaczyć z równania:

$${}^0T_4 = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \cdot {}^2T_3 \cdot {}^3T_4$$

Tabela 1. Położenie i orientacja układów występujących w manipulatorze

Przekształcenie	$\theta_i$	$s_i$	$a_i$	$\alpha_i$
Zorientowanie układów współrzędnych związanych z członami manipulatora				
$0 \Rightarrow 1$	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$
$1 \Rightarrow 2$	$\theta_1$	0	$l_1$	0
$2 \Rightarrow 3$	$\theta_2$	0	$l_2$	$-\frac{\pi}{2}$
Zorientowanie układu współrzędnych związanego z chwytakiem				
$3 \Rightarrow 4$	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$

W przypadku fizycznego stanowiska zrobotyzowanego wyznaczenie położenia poszczególnych układów współrzędnych względem układu bazowego realizowane jest zgodnie z instrukcjami dostarczonymi przez producenta. Położenie układów WORLD i BASE standardowo umieszczone jest w tym samym miejscu u podstawy robota. Układ WORLD można oczywiście przemieścić, o ile wymaga tego konstrukcja stanowiska i potrzeba ustawienia robota względem punktu odniesienia na stanowisku. Położenie układu interfejsu mechanicznego (Def\_TPC) jest zdefiniowane przez producenta, ale pozostałe układy współrzędnych, wykorzystywane podczas

programowania robotów, powinny być zdefiniowane przez użytkownika.

Należy zauważyć, że niezależnie od postawionego zadania, każdy program sterujący robotem odpowiada za przemieszczanie narzędzia, jakim operuje robot, zgodnie z wymaganą w danym procesie technologicznym trajektorią. Trajektorią ta stanowi zaś zbiór punktów wytyczonych przez punkt TCP narzędzia w funkcji czasu względem aktywnego układu współrzędnych (zakładając, że robot będzie poruszał się w układzie współrzędnych zadania TF, będą to punkty  ${}^{TF}P[i]_{TCP\_Tool}$ . W zależności od wybranego typu ruchu punkty pośrednie będą interpolowane liniowo, kołowo lub nie będą wyznaczane przez kontroler robota. ■

Bibliografia dostępna pod linkiem: [nis.com.pl/bibliografia.html](http://nis.com.pl/bibliografia.html)

Fragment pochodzi z książki: *Programowanie robotów przemysłowych* W. Kaczmarek, J. Panasiuk, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2017