

Anna Stankiewicz
Katedra Podstaw Techniki
Akademia Rolnicza w Lublinie

ALGORYTM IDENTYFIKACJI ZMIENNEGO W CZASIE WSPÓŁCZYNNIKA POISSONA LEPKOSPĘŻYSTYCH MATERIAŁÓW ROŚLINNYCH OPISANYCH MODELEM KELVINA

Streszczenie

W pracy rozważa się problem wyznaczenia zmiennego w czasie współczynnika Poissona roślinnych materiałów liniowo lepkospężystych opisanych uogólnionym modelem Kelvina na podstawie pomiarów funkcji pełzania w stanach jednoosiowego odkształcenia i jednoosiowego naprężenia. Dla pięcioparametrowych modeli Kelvina pokazano, że współczynnik Poissona można przedstawić jako sumę składowej stałej, funkcji wykładniczych oraz splotów pierwotnych i zmodyfikowanych funkcji Bessela oraz podano dokładny analityczny algorytm obliczeniowy. Przedstawiono schemat identyfikacji zmiennego w czasie współczynnika Poissona na podstawie dyskretnych pomiarów jednoosiowych funkcji pełzania, uzyskanych w podwójnym teście pełzania. Efektywność metody zilustrowano wyznaczając zmienny w czasie współczynnik Poissona próbek korzenia buraka cukrowego.

Słowa kluczowe: lepkospężystość, jednoosiowy test pełzania, funkcja pełzania, model Kelvina, współczynnik Poissona, algorytm identyfikacji

Wykaz oznaczeń

$v(t)$ – współczynnik Poissona,-,

$\delta(t)$ – delta Diraca,

$x(s)$, $Y(s)$ – transformaty Laplace'a funkcji $x(t)$, $Y(t)$,

$\phi(t) * \psi(t) = \int_0^t \phi(t - \tau)\psi(\tau)d\tau$ – splot funkcji $\phi(t)$ i $\psi(t)$.

Wprowadzenie, cel i zakres pracy

W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat powstały nowe konstytutywne metody opisu własności dynamicznych materiałów pochodzenia roślinnego [Rao 1999]. Większość spośród modeli konstytutywnych materiałów biologicznych stanowią lepkosprężyste modele reologiczne, dobrze opisujące związki pomiędzy odkształceniem a naprężeniem, a także modelujące zjawiska płynięcia materiałów oraz relaksacji naprężeń w zakresie niewielkich deformacji. Analiza odkształceń i naprężeń w materiałach biologicznych, takich jak wysoko uwodnione warzywa i owoce, jest zazwyczaj prowadzona w dziedzinie czasu, gdzie dynamiczne własności materiałów są dobrze charakteryzowane przez zależne od czasu moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego oraz współczynnik Poissona. Współczynnik Poissona nie jest wprost dostępny pomiarowo, musi więc być wyznaczany w oparciu o inne charakterystyki uzyskane doświadczalnie. W literaturze znane są metody wyznaczania zmiennego w czasie współczynnika Poissona na podstawie pomiarów funkcji relaksacji [De Baerdemeaker, Segerlind 1976], brak jest natomiast metod bazujących na teście pełzania, który jest jednym z podstawowych źródeł informacji o własnościach lepkosprężystych [Rao 1999].

W pracy [Stankiewicz 2005b] wyprowadzono formułę analityczną określającą zależność pomiędzy współczynnikiem Poissona a funkcjami pełzania w stanach jednoosiowego odkształcenia oraz naprężenia i przedstawiono schemat identyfikacji zmiennego w czasie współczynnika Poissona na podstawie pomiarów funkcji jednoosiowych pełzania próbki swobodnej i próbki ściskanej w cylindrze, którego implementacja komputerowa, w ogólnym przypadku, wymaga stosowania numerycznych technik odwrotnego przekształcenia Laplace'a.

Celem tej pracy było opracowanie algorytmu identyfikacji zmiennego w czasie współczynnika Poissona materiałów lepkosprężystych na podstawie pomiarów funkcji pełzania badanego materiału w stanach jednoosiowego odkształcenia oraz jednoosiowego naprężenia w przypadku, gdy funkcje pełzania opisane są modelami Kelvina. Pokazano, że dla pięcioparametrowych modeli Kelvina współczynnik Poissona jest sumą składowej stałej, funkcji wykładniczych oraz splotów pierwotnych i zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego rodzaju. Przedstawiono algorytm identyfikacji współczynnika Poissona na podstawie dyskretnych pomiarów jednoosiowych funkcji pełzania w walcowych próbkach badanego materiału uzyskanych w dwu niezależnych testach pełzania.

Współczynnik Poissona

W pracy [Stankiewicz 2005b] wychodząc z całkowych równań konstytutywnych i stosując zasadę analogii pomiędzy liniowymi zjawiskami sprężystymi a lepko-sprężystymi oraz aparat całkowego przekształcenia Laplace'a pokazano, że transformata Laplace'a współczynnika Poissona $v(t)$ dana jest wzorem

$$v(s) = \frac{1}{4s} \left[[J_X(s)/J_E(s) - 1] + \sqrt{[1 - J_X(s)/J_E(s)]^2 + 8[1 - J_X(s)/J_E(s)]} \right] \quad (1)$$

gdzie $J_E(s)$ i $J_X(s)$ są transformatami funkcji pełzania $J_E(t)$ i $J_X(t)$ w stanach jednoosiowego naprężenia oraz odkształcenia. Zmienny w czasie współczynnik Poissona można wyznaczyć jako oryginał transformaty (1) stosując znane numeryczne techniki odwrotnego przekształcenia Laplace'a. W praktyce funkcje pełzania opisane są modelami kilkuparametrowymi, współczynnik Poissona można wówczas wyznaczyć w oparciu o dokładne formuły analityczne.

Algorytm obliczeniowy dla modelu Kelvina

Powszechnie przyjętym sposobem opisu zjawiska pełzania (retardacji) zachodzącego w materiale liniowo lepko-sprężystym jest model Kelvina. Funkcje pełzania $J_E(t)$ i $J_X(t)$ materiałów roślinnych dobrze aproksymują pięcioparametrowe modele Kelvina [Rao 1999]:

$$J_E(t) = J_{10} + J_{11} \left(1 - e^{-t/\lambda_{11}}\right) + J_{12} \left(1 - e^{-t/\lambda_{12}}\right) \quad (2a)$$

$$J_X(t) = J_{20} + J_{21} \left(1 - e^{-t/\lambda_{21}}\right) + J_{22} \left(1 - e^{-t/\lambda_{22}}\right) \quad (2b)$$

gdzie $J_{ij} = 1/E_{ij}$, E_{ij} to moduły sprężystości, natomiast λ_{ij} czasy retardacji.

Transformatę $v(s)$ daną wzorem (1) można przedstawić jako sumę

$$v(s) = v_1(s) + v_2(s) \quad (3)$$

wyrażenia wymiernego

$$v_1(s) = \frac{1}{4s} [J_X(s)/J_E(s) - 1] \quad (4)$$

którego oryginał dla modeli (2) jest kombinacją liniową składowej stałej, co najwyżej czterech rzeczywistych składowych wykładniczych oraz ewentualnie co najwyżej dwu funkcji postaci $te^{-t/\lambda_{2j}}$, $j = 1, 2$ i funkcji

$$v_2(s) = -v_1(s) \sqrt{w(s)} \quad (5)$$

gdzie $w(s)$ jest wyrażeniem wymiernym zdefiniowanym wzorem

$$w(s) = [9J_E(s) - J_X(s)] / [J_E(s) - J_X(s)] \quad (6)$$

Ponieważ licznik i mianownik $w(s)$ są wielomianami zmiennej zespolonej s czwartego stopnia, funkcję $w(s)$ można przedstawić w równoważnej postaci

$$w(s) = \alpha w_1(s) w_2(s) \quad (7)$$

gdzie $\alpha = [9J_{10} - J_{20}] / [J_{10} - J_{20}]$, natomiast funkcje $w_1(s)$ i $w_2(s)$ są ilorazami wielomianów stopnia drugiego o jednostkowych współczynnikach przy s^2 . Zera i bieguny $w_1(s)$ i $w_2(s)$ zależą od parametrów modeli (2), a ich położenie na płaszczyźnie zespolonej decyduje o postaci oryginałów transformat $u_1(s) = \sqrt{w_1(s)}$ i $u_2(s) = \sqrt{w_2(s)}$. Rozstrzyga to Twierdzenie podane w Dodatku A. Na podstawie wzoru (A1) oryginały z $u_1(s)$ i $u_2(s)$ przyjmują postać

$$u_1(t) = \bar{u}_1(t) + \delta(t) \quad \text{i} \quad u_2(t) = \bar{u}_2(t) + \delta(t) \quad (8)$$

gdzie funkcje $\bar{u}_1(t)$ i $\bar{u}_2(t)$ dane są odpowiednimi spośród wzorów (A2)-(A5).

Wobec tego na podstawie wzorów (3)-(8) otrzymujemy

$$v(s) = v_1(s) - \sqrt{\alpha} v_1(s) * [\bar{u}_1(t) + \delta(t)] * [\bar{u}_2(t) + \delta(t)] \quad (9)$$

a stąd, uwzględniając selektywność delty Diraca, mamy ostatecznie

$$v(s) = (1 - \sqrt{\alpha}) v_1(s) - \sqrt{\alpha} v_1(s) * [\bar{u}_1(t) * \bar{u}_2(t) + \bar{u}_1(t) + \bar{u}_2(t)] \quad (10)$$

Współczynnik Poissona można więc przedstawić jako kombinację liniową składowej stałej, funkcji wykładniczych, funkcji postaci te^{-t/λ_j} , $j = 1, 2$, oraz splotów funkcji Bessela. Funkcje Bessela są dostępne w prawie każdym pakiecie obliczeniowym (np. $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_n(m, x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$ w Mathcadzie i $BesselI(v, x)$ oraz $BesselJ(v, x)$ w Matlabie). Do wyznaczenia całek splotowych w (10) można zastosować standardowe procedury całkowania numerycznego.

Algorytm identyfikacji

Funkcje pełzania $J_E(t)$ i $J_X(t)$ można wyznaczyć doświadczalnie w dwu niezależnych testach pełzania przeprowadzonych dla dwu próbek z tego samego materiału. Opis eksperymentu przedstawiono w [Stankiewicz 2005b]. Załóżmy, że przeprowadzono eksperyment dyskretny, którego rezultatem są zbiory pomiarów $\{J_{E,eksp}(t_i)\}$ i $\{J_{X,eksp}(t_i)\}$ funkcji pełzania, $i = 1, K, N$. Problem identyfikacji modeli (2) polega na takim doborze ich parametrów, aby modele te przybliżyły wyniki eksperymentu jak najlepiej w sensie najmniejszych kwadratów

$$\sum_{i=1}^N [J_{E,eksp}(t_i) - J_{E,model}(t_i)]^2 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^N [J_{X,eksp}(t_i) - J_{X,model}(t_i)]^2 \quad (11)$$

Zadania minimalizacji wskaźników (11) są nieliniowymi problemami najmniejszych kwadratów, ich własności omówiono w [Stankiewicz 2005a]. Badania numeryczne potwierdzają skuteczność zastosowania do minimalizacji wskaźników (11) metody Levenberga-Marquardta. Współczynnik Poissona można więc wyznaczyć stosując następującą procedurę:

1. Przeprowadź eksperyment i zgromadź pomiary jednosiowych funkcji pełzania próbki swobodnej $\{J_{E,eksp}(t_i)\}$ i ograniczonej $\{J_{X,eksp}(t_i)\}$.
2. Wyznacz modele (2) optymalne w sensie najmniejszej sumy kwadratów.
3. Wyznacz oryginał $v_1(t)$ wyrażenia wymiernego $v_1(s)$ (4).
4. Wyznacz zera i bieguny wyrażenia wymiernego $w(s)$ (6), a następnie przedstaw $w(s)$ w postaci (7) definiując funkcje $w_1(s)$ i $w_2(s)$.
5. Wyznacz współczynnik Poissona $\nu(t)$ na podstawie wzoru (10).

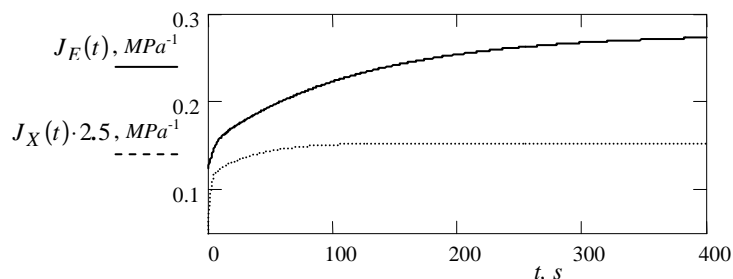
Przykład

Przykład (obliczeniowy) bazuje na danych uzyskanych eksperymentalnie przez Gołackiego dla walcowych próbek korzeni buraka cukrowego w teście relaksacji naprężeń [Stankiewicz, Gołacki 2004]. Wykorzystując równoważność testów relaksacji i pełzania oraz zależność między funkcjami pełzania i relaksacji daną całką Duhamela, wyznaczono pięcioparametrowe modele Kelvina odpowiadające danym eksperymentalnym. Parametry modeli podano w tab. 1, przebieg funkcji pełzania przedstawia rys. 1. Na rys. 2 przedstawiono przebiegi współczynnika Poissona uzyskane: dla modeli (2)-linia ciągła, oraz dla czteroparametrowych modeli Maxwella-linia przerywana. Rozbieżności, naturalne wobec odmienności zjawisk pełzania i relaksacji naprężeń, wynikają także stąd, iż czteroparametrowy model Maxwella nie uwzględnia składowej stałej funkcji relaksacji, która, jak wskazują badania [Jakubczyk, Lewicki 2003], dla materiałów roślinnych stanowi istotny składnik rzeczywistej funkcji relaksacji, natomiast pięcioparametrowe modele Kelvina uwzględniają niezerową początkową wartość funkcji pełzania (parametry J_{10}, J_{20} - p. tab. 1).

Tabela 1. Parametry modeli Kelvina (2)

Table 1. The parameters for Kelvin models (2)

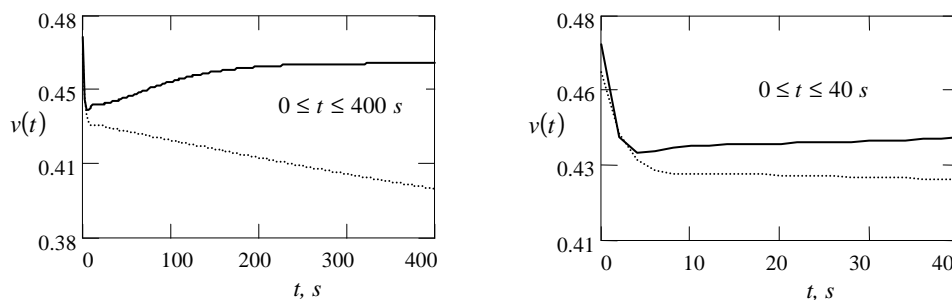
Funkcja pełzania $J_E(t)$ (2a)		Funkcja pełzania $J_X(t)$ (2b)	
$J_{10} = 0.124322 \text{ MPa}^{-1}$		$J_{20} = 0.020067 \text{ MPa}^{-1}$	
$J_{11} = 0.125942 \text{ MPa}^{-1}$	$\lambda_{11} = 118.875 \text{ s}$	$J_{21} = 0.015619 \text{ MPa}^{-1}$	$\lambda_{21} = 33.3038 \text{ s}$
$J_{12} = 0.027906 \text{ MPa}^{-1}$	$\lambda_{12} = 3.9686 \text{ s}$	$J_{22} = 0.025607 \text{ MPa}^{-1}$	$\lambda_{22} = 1.3422 \text{ s}$



Rys. 1. Jednoosiowe funkcje pełzania $J_E(t)$ (linia przerywana) i $J_X(t)$ (linia ciągła) próbki korzenia buraka cukrowego
 Fig. 1. Uniaxial creep compliance $J_E(t)$ (dash line) and $J_X(t)$ (solid line) of a sample of the sugar beet root

Uwaga końcowa

W pracy przedstawiono kompletny algorytm wyznaczania zmiennego w czasie współczynnika Poissona materiałów lepkosprężystych, opisanych pięcioparametrowym modelem Kelvina, na podstawie uzyskanych eksperymentalnie czasowych przebiegów jednoosiowych funkcji pełzania badanego materiału, w którym obliczenia realizowane są w części w oparciu o standardowe procedury numeryczne, w części zaś w oparciu o nie iteracyjne formuły analityczne.



Rys. 2. Współczynnik Poissona próbki korzenia buraka cukrowego (linia ciągła - model Kelvina, linia przerywana - model Maxwell)
 Fig. 2. Poisson's ratio of a sample of the beet sugar root (solid line - Kelvin model, dash line - Maxwell model)

Dodatek A

Niech $J_n(x)$ i $I_n(x)$ oznaczają, odpowiednio, pierwotne i zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rodzaju n -tego rzędu.

Twierdzenie [Stankiewicz 2005a]. Dla dowolnych zespolonych z_1, z_2 i s_1, s_2 oryginał transformaty Laplace'a

$$h(s) = \sqrt{\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-s_1)(s-s_2)}}$$

istnieje i przyjmuje postać:

$$h(t) = \bar{h}(t) + \delta(t) \quad (\text{A1})$$

gdzie funkcja $\bar{h}(t)$ dana jest wzorem:

$$\bar{h}(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_1(t) * f_2(t) \quad \text{gdy } z_1, z_2, s_1, s_2 \in R \quad (\text{A2})$$

$$\bar{h}(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_1(t) * g_2(t) \quad \text{gdy } z_1, z_2 \in R, s_1, s_2 \in C \quad (\text{A3})$$

$$\bar{h}(t) = (u_4 - r_4)g_3(t) + u_3g_4(t) + \frac{r_3^2}{2}g_3(t) * g_5(t) \quad \text{gdy } z_1, z_2 \in C, s_1, s_2 \in R \quad (\text{A4})$$

$$\bar{h}(t) = (r_4 - r_2)g_6(t) - r_1g_7(t) + \frac{r_3^2}{2}g_5(t) * g_6(t) \quad \text{gdy } z_1, z_2, s_1, s_2 \in C \quad (\text{A5})$$

R i C to, odpowiednio, zbiór liczb rzeczywistych i zespolonych, natomiast:

$$f_i(t) = p_i e^{q_i t} [I_0(p_i t) + I_1(p_i t)], \quad p_i = (s_i - z_i)/2, \quad q_i = (s_i + z_i)/2, \quad i = 1, 2$$

$$g_1(t) = u_1 e^{u_2 t} [I_0(u_1 t) + I_1(u_1 t)], \quad u_1 = (z_2 - z_1)/2, \quad u_2 = (z_1 + z_2)/2$$

$$g_2(t) = e^{r_2 t} [(r_2 - z_2)J_0(r_1 t) - r_1 J_1(r_1 t)], \quad r_1 = |\text{Im}(s_1)|, \quad r_2 = \text{Re}(s_1),$$

$$g_{i+3}(t) = e^{u_4 t} I_i(u_3 t), \quad i = 0, 1, \quad u_3 = (s_2 - s_1)/2, \quad u_4 = (s_1 + s_2)/2$$

$$g_5(t) = e^{r_4 t} [J_0(r_3 t) + J_2(r_3 t)], \quad r_3 = |\text{Im}(z_1)|, \quad r_4 = \text{Re}(z_1)$$

$$g_{i+6}(t) = e^{r_2 t} J_i(r_1 t), \quad i = 0, 1 \quad \blacksquare$$

Bibliografia

De Baerdemeaker J. G., Segerlind L. J. 1976. Determination of the viscoelastic properties of the apple flesh. Transaction of the ASAE 19: 346-353.

Jakubczyk E., Lewicki P.P. 2003. Własności mechaniczne tkanki jabłka w odniesieniu do jej struktury. Acta Agrophysica 2(3): 549-557.

Rao M. A. 1999. Rheology of Fluid and Semisolid Foods. Principles and Applications. Aspen Publishers, Inc., Gaithersburg, Maryland

Stankiewicz A., Gołacki K. 2004. Algorytm identyfikacji zmiennych w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego roślinnych materiałów lepkosprężystych. Acta Scientiarum Polonorum, Technica Agraria 3(1-2): 79-95.

Stankiewicz A. 2005a. Algorytm identyfikacji zmiennych w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego roślinnych materiałów lepkosprężystych na podstawie funkcji pełzania. Acta Agrophysica 5(1): 149-166.

Stankiewicz A. 2005b. Identyfikacja zmiennego w czasie współczynnika Poissona lepkosprężystych materiałów biologicznych na podstawie testu pełzania. Skierowano do Inżynierii Rolniczej.

A SCHEME FOR IDENTIFICATION OF TIME-DEPENDENT POISSON'S RATIO OF VISCOELASTIC PLANT MATERIALS WITH THE KELVIN MODEL

Summary

Most of the constitutive models of biological materials are for a viscoelastic regime, which is good for characterising strain-stress dependence, creep and stress relaxation within a small deformation. The stress and strain problems of biological materials are usually solved in the time domain, where the dynamic properties can effectively be characterised by the time-dependent Poisson's ratio. In this paper the problem of the Poisson's ratio determining using discrete time-measurements of the uniaxial creep compliance of unconfined and a laterally constrained cylindrical specimens of the material obtained in double creep experiment is considered. It is proved that for five-element Kelvin models of the uniaxial relaxation functions the Poisson's ratio can be described as a linear combination of constant and exponential functions and multiple convolution integrals of original and modified Bessel functions. A resulting identification scheme is outlined. The effectiveness of the method is demonstrated through the computation of the Poisson's ratio of the beet sugar root samples.

Key words: viscoelasticity, uniaxial creep test, creep compliance, Kelvin model, Poisson's ratio, identification algorithm