

# APARATURA

## BADAWCZA I DYDAKTYCZNA

### Modele matematyczne jakości procesów na przykładzie branży piekarniczej

RADOSŁAW DROZD<sup>1</sup>, JAN PIWNIK<sup>2</sup>

<sup>1</sup>POLITECHNIKA GDAŃSKA, WYDZIAŁ ZARZĄDZANIA I EKONOMII

<sup>2</sup>CENTRALNY OŚRODEK BADAWCZO ROZWOJOWY APARATURY BADAWCZEJ I DYDAKTYCZNEJ  
COBRABID WARSZAWA

**Słowa kluczowe:** modele matematyczne, wektor jakości procesów, względna jakość produktu, jakość procesu

#### STRESZCZENIE:

W niniejszym artykule przedstawiono nowe podejście do ilościowej, bezwymiarowej oceny efektywności i konkurencyjności procesów produkcyjnych. Wprowadzono nowe pojęcia jakości procesu i względnej jakości produktu. Jakość procesu wyrażono wektorowo i skalarnie. Wektor jakości procesu  $\vec{J}\vec{P}$  wyrażono iloczynem niezawodności przez wektor z sumy trzech składowych uwzględniającej skład powtarzalności gramatury i minimum kosztów. Zaproponowano dwie nowe skalarnie miary jakości procesu jako modułu wektora jakości i iloczynu mieszanego trzech wektorów bazy procesu. Wyróżniono też nowe pojęcie względnej jakości produktu (WJP). Przedstawiono separowalność i związek obydwu pojęć. Metodę oceny zilustrowano obliczeniami na przykładzie procesów piekarniczych realizowanych w piekarni w województwie pomorskim. Wykazano przydatność robotyzacji prowadzącej do znacznego podwyższenia wskaźników jakości procesu. Opracowane nowe ilościowe i wektorowe miary jakości procesu dają możliwości budowy algorytmów technologicznych, ekonomicznych i organizacyjnych prowadzących do innowacyjności i wzrostu efektywności procesów produkcyjnych.

# Mathematical models of process quality on the example of the bakery industry

**Keywords:** mathematical models, process quality vector, relative product quality, process quality

## ABSTRACT:

This article presents a new approach to quantitative dimensionless assessment of the efficiency and competitiveness of production processes. New concepts of process quality and relative product quality have been introduced. Process quality was expressed in vector and scalar. The process quality vector  $\vec{JP}$  was expressed by the product of reliability by the vector from the sum of three components taking into account the composition of grammage repeatability and the minimum cost. Two new scalar measures of process quality as a quality vector module and the mixed product of three process base vectors are proposed. A new concept of relative product quality (WJP) was also highlighted. Separability and relationship of both concepts is presented. The assessment method is illustrated by calculations on the example of baking processes carried out at the bakery in the Pomeranian Voivodeship. The usefulness of robotization leading to a significant increase in process quality indicators has been demonstrated. New quantitative and vector measures of process quality have been developed that provide the opportunity to build technological, economic and organizational algorithms that lead to innovation and increase in the efficiency of production processes.

## 1. WPROWADZENIE

Aktualnie rozpatruje się głównie metody analizy jakości produktu, szczególnie w przemyśle spożywczym i ochronie zdrowia [4, 5].

Do istotnych czynników mających dominujący wpływ na jakość produktu należą:

- a) parametry jakościowe i koszty surowców,
- b) precyzja i kontrola dozowania składników,
- c) receptura technologii i składu substytutów,
- d) powtarzalność projektowanych cech produktów w procesie wytwarzania,
- e) wysoka wartość niezawodności pracy instalacji technologicznych.

Istotnym problemem oceny jakości produktu jest organizacja struktury tego pojęcia i jej metryzowalność.

Napotyka się tu na trudności natury podstawowej.

Z wymienionych powyżej czynników silnie związanych z jakością produktu widzimy organiczny łańcuch powiązań: technicznych, technologicznych, ekonomicznych i szeregu innych odnoszących się do różnych dziedzin nauki i organizacji.

Stąd istnieje pilna potrzeba sformułowania nowego podejścia do oceny jakości produktu w kontekście jej związku z całością procesu produkcji i potrzeb konsumenta.

Celem pracy jest propozycja sformułowania nowego pojęcia jako „jakości procesu” oznaczonego dalej symbolem (JP).

Jakość procesu (JP) łączy względną jakość produktu (WJP) z uwarunkowaniami systemowymi procesów wytwarzania i ekonomii. Wyraża ona efektywność procesu i kierunki innowacyjności. Zaproponowano również wektorową i skalarną miarę jakości procesu (JP) i względnej jakości produktu (WJP).

Metryzowalność wymienionych pojęć (JP) i (WJP) jest punktem wyjścia do rozwoju nowoczesnych technologii produkcji. Problem zilustrowano na przykładzie procesów piekarniczych.

## 2. STRUKTURA I METRYZOWALNOŚĆ JAKOŚCI PROCESU (JP) I WZGLĘDNEJ JAKOŚCI PRODUKTU (WJP) W BRANŻY PIEKARNICZEJ

### 2.1 Uwagi wstępne

Model jakości procesu (JP) w procesie piekarniczym powinien uwzględniać następujące główne cechy:

1. Dopuszczalne normy składu pieczywa gwarantujące walory smakowe (S).
2. Powtarzalność i stabilność gramatury składu strukturalnego produktu (P).
3. Minimalizację kosztów produkcji (K).

4. Kontrolowanie niezawodności i wydajności procesu (N).

Względny model jakości produktu (WJP) zadośćuczyni cechom:

$$1(S), 2(P) \text{ i } 3(K).$$

Dalej pokazano wektorowe i skalarnie miary jakości (JP) i (WJP). Wartości skalarnie obydwu miar zawierają się w przedziale od zera do jedności.

## 2.2 Wektorowe reprezentacje (JP) i (WJP)

Rozpatrzmy trójwymiarowy ortogonalny układ współrzędnych z wersorami  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

Wektor dopuszczalnych norm składu ma postać:

$$\vec{S} = s \times \vec{e}_1, \quad (1)$$

gdzie

$$s = \frac{\sum_{i=1}^k \times Si(r)}{\sum_{i=1}^j \times Si(n)}. \quad (2)$$

Wielkości  $Si(r)$  oznaczają wartości kolejnych i-tych składników rzeczywistych struktury produktu w procesie.

Wielkości  $Si(n)$  oznaczają wartości kolejnych i-tych składników struktury ustalonych normą.

Ilość składników normowych „j” powinna być równa ilości składników rzeczywistych „k”.

Zatem w prawidłowo prowadzonym procesie piekarniczym

$$j = k \quad (3)$$

Wartość modułu wektora  $\vec{S}$  w prawidłowo prowadzonym procesie spełnia związek

$$0 \leq S \leq 1. \quad (4)$$

Wektor powtarzalności i stabilności gramatury  $\vec{P}$  ma postać:

$$\vec{P} = p \times \vec{e}_2, \quad (5)$$

gdzie

$$p = \frac{\sum_{i=1}^k \times \frac{Si(r)}{\Delta ti(r)}}{\sum_{i=1}^j \times \frac{Si(n)}{\Delta ti(n)}}. \quad (6)$$

Wielkość p oznacza ilorazy wartości składników rzeczywistych i normowych przez czasy rzeczywiste  $\Delta ti(r)$  i normatywne  $\Delta ti(n)$  wyznaczone gramaturą procesu.

Wartość modułu wektora  $\vec{P}$  w prawidłowo prowadzonym procesie spełnia związek

$$0 \leq P \leq 1. \quad (7)$$

Kolejny wektor odpowiedzialny za minimalny koszt produkcji wynikający ze zużycia surowców i energii  $\vec{K}$  ma postać

$$\vec{K} = k \times \vec{e}_3. \quad (8)$$

Wartość modułu wektora  $\vec{K}$  w prawidłowo prowadzonym procesie ma postać:

$$K = \frac{k_r}{k_n}. \quad (9)$$

Wielkość  $k_r$  oznacza sumaryczny koszt rzeczywistego udziału wszystkich komponentów produktu. Ma on postać:

$$k_r = \sum_{i=1}^k \times Si(r) \times ki(r). \quad (10)$$

Wielkość  $K$  oznacza sumaryczny koszt normowy udziału wszystkich komponentów produktu. Wyrażamy to jako:

$$k_n = \sum_{i=1}^j \times Si(n) \times ki(n). \quad (11)$$

Wielkości  $K_i(r)$  i  $K_i(n)$  oznaczają odpowiednio zmieniony koszt jednostkowy udziału komponentów w rzeczywistym procesie i koszt jednostkowy ustalony normą.

Wartość modułu wektora  $\vec{K}$  w prawidłowo prowadzonym procesie spełnia zależność:

$$0 \leq K \leq 1. \quad (12)$$

Pokazane powyżej wektory  $\vec{S}, \vec{P}, \vec{K}$  oraz skalarna wartość niezawodności  $N$  stanowią dalej podstawę wyznaczenia wektorowych i skalarnych miar jakości procesu (JP) i względnej jakości produktu (WJP).

Wielkości:  $s, p, k$  we wzorach (2), (6), (9) są bezwymiarowe.

## 3. METRYZOWALNOŚĆ JAKOŚCI PROCESU (JP)

Metryzowalność (JP) proponuje się dwoma wielkościami, tj. wektorową i skalarną.

Wektor jakości procesu ma postać  $\vec{JP}$

$$\vec{JP} = \frac{N_{JP}}{\sqrt{3}}, \quad (13)$$

gdzie

$$\vec{JP} = \frac{N}{\sqrt{3}} \vec{S} + \vec{P} + \vec{K}. \quad (14)$$

Uwzględniając zależności (2), (6), (9) mamy:

$$\vec{JP} = \frac{N}{\sqrt{3}} (\vec{s}_{e_1} + \vec{p}_{e_2} + \vec{k}_{e_3}). \quad (15)$$

Wielkość  $N$  oznacza niezawodność i kontrolowalność procesu.

Wielkość  $N$  wyznaczamy empirycznie w konkretnym procesie produkcyjnym metodą strumieniowo-systemową lub probabilistycznie. Sprawy te omówiono w pracach autorów [1-3].

Mając bazę wyjściową wektorów  $\vec{S}, \vec{P}, \vec{K}$  oraz wartości  $N$ , możemy zaproponować dwie miary skalarnie jakości procesu JP.

Pierwszą miarą skalarną jest moduł wektora  $\vec{JP}$ . Oznaczamy go symbolem  $jP_m$ . Wartość modułu  $jP_m$  spełnia związek:

$$jP_m = \frac{N}{\sqrt{3}} \sqrt{s^2 + p^2 + k^2}. \quad (16)$$

Wartości  $jP_m$  zawierają się w nierówności:

$$0 \leq jP_m \leq 1. \quad (17)$$

Drugą miarą jakości procesu jest iloczyn niezawodności  $N$  i wartości iloczynu mieszanego wektorów  $\vec{S}, \vec{P}, \vec{K}$ .

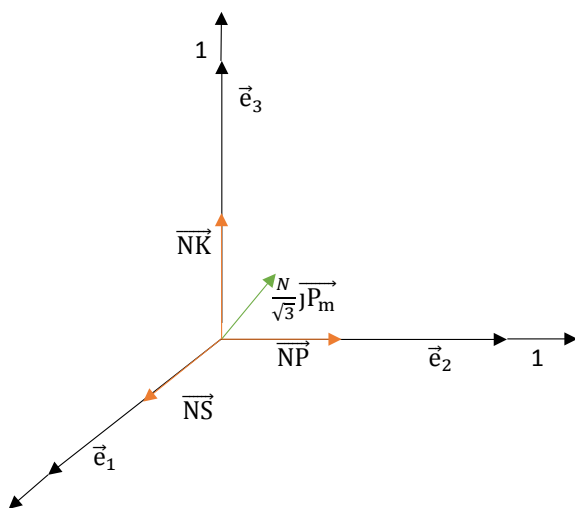
Ma on postać:

$$jP_0 = N (\vec{S} \times \vec{P}) \times \vec{K} = N \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = N \cdot s \cdot p \cdot k \quad (18)$$

Wielkość skalarna  $\vec{JP}_0$  ma interpretację objętości wyznaczonej iloczynem mieszanym wektorów:  $\vec{S}, \vec{P}, \vec{K}$ , pomnożonej przez wartość niezawodności. Wartość  $\vec{JP}_0$  spełnia zawsze nierówności:

$$0 \leq \vec{JP}_0 \leq 1. \quad (19)$$

Wektor  $\vec{JP}$  jakości procesu ilustruje Rysunek nr 1.



**Rysunek 1** Orientacja wektora  $\vec{JP}$  względem osi (bazy procesu) daje możliwość szybkiej oceny względem poszczególnych składowych bazy wartości  $\vec{JP}$ .

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badań wykonanych w piekarni X

#### 4. METRYZOWALNOŚĆ JAKOŚCI WZGLĘDNEJ PRODUKTU (JWP)

Pojęcie to odnosi się tylko do spełnienia pierwszych trzech cech produktu wymienionych w punkcie 2.

Zatem wektor jakości produktu  $\vec{JWP}$  ma postać

$$\vec{JWP} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{S} + \vec{P} + \vec{K}). \quad (20)$$

Miarą skalarną wektora  $\vec{JWP}$  jest jego moduł  $jwp_m$

$$jwp_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{s^2 + p^2 + k^2}. \quad (21)$$

Drugą miarą skalarną jest iloczyn mieszany wektora  $\vec{S}, \vec{P}$  i  $\vec{K}$  dany jako:

$$jwp_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{S} \times \vec{P}) \times \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{3}} spk. \quad (22)$$

Oznaczenia we wzorach (20), (21) i (22) są analogiczne jak dla wektora jakości procesu.

Wartości  $jwp_m$  i  $jwp_0$  spełniają następujące nierówności:

$$0 \leq jwp_m \leq 1, \quad (23)$$

$$0 \leq jwp_0 \leq 1. \quad (24)$$

#### 5. PRZYKŁADY OBLICZEŃ DLA PIEKARNI W WOJEWÓDZTWIE POMORSKIM

Pokazane powyżej miary jakości procesu i jakości względnej produktu zastosowano do oceny efektywności w rzeczywistych procesach piekarniczych przy wypieku chleba w piekarni w województwie pomorskim.

Dane szczegółowe o procesie zawierają prace [1, 2, 3].

Po uwzględnieniu tabel, norm, składu pieczywa gwarantującego walory smakowe i pomiarów technologicznych w procedurach kolejnych etapów technologicznych z uwzględnieniem obliczeń niezawodności otrzymano następujące wartości jakości procesu:

$jP_m = 0,69$  (piekarnia bez robotyzacji),

$jP_m = 0,89$  (piekarnia po robotyzacji),

$jP_0 = 0,71$  (piekarnia bez robotyzacji),

$jP_0 = 0,92$  (piekarnia po robotyzacji).

#### 6. WNIOSKI

Zademonstrowane miary wektorowe i skalarnie jakości procesu i względnej jakości produktu dają nowe możliwości kompleksowej oceny efektywności procesów pod kątem uzyskania najlepszych produktów z uwzględnieniem minimalizacji koszt-

tów, materiałów i energii. Wskazują też kierunki poprawy jakości.

Ilościowe bezwymiarowe oceny jakości procesu pokazały też jasnowo zyski z tytułu wprowadzenia robotyzacji w piekarni X.

Ilościowe, bezwymiarowe oceny jakości procesu dają możliwość ekonomicznej predykcji efektywności produkcji, racjonalnej gospodarki i precyzyjnego rozpoznania konkurencji.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Drozd R., Niezawodność maszyn produkcyjnych w branży piekarniczej – zagadnienia teoretyczne i praktyczne, ABiD 2019, t. 24, nr 3.
- [2] Drozd R., Wpływ robotyzacji na niezawodność procesu produkcyjnego w branży piekarniczej, ABiD 2019, t. 24, nr 3.
- [3] Drozd R., Piwnik J., Koncepcja niezawodności strumieniowo-systemowej na przykładzie branży piekarniczej, ABiD 2019, t. 24, nr 3.
- [4] Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2019.
- [5] Ambroziak Z. et al., Piekarstwo. Receptury, normy, porady i przepisy prawne. Warszawa: Zakład Badawczy Przemysłu Piekarskiego, Handlowo-Usługowa Spółdzielnia „Samopomoc Chłopska”, 2002.