



## Ścieżki wyężenia stalowego dźwigara kratowego

ANETA BRZUZY, GRZEGORZ BĄK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,  
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2, abrzyzy@wat.edu.pl, grzegorz.bak2@neostrada.pl

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono analizę reakcji jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego, stalowego dźwigara kratowego na quasi-statyczny proces obciążania siłą węzłową narastającą proporcjonalnie. Sztywność sześcioprętowego dźwigara kształtowano poprzez losowe ustalanie profili prętów spośród założonego zbioru rur walcowanych na gorąco. Wyróżniono dwa stadia wyężenia dźwigara, sprężyste i pozasprężyste. Stadium sprężyste kończy się wystąpieniem idealnego płynięcia plastycznego jednego z prętów rozciąganych albo wyboczeniem giętnym jednego z prętów ściskanych. Wprowadzając pewne założenia upraszczające, wskazano na możliwość ukształtowania się w stadium pozasprężystym trzyprętowego ustroju nośnego statycznie wyznaczalnego i segmentu dźwigara, który jest bierny w dalszym procesie obciążania podczas tego stadium. Zarówno ustrój nośny, jak również segment bierny, mogą mieć dwie różne postaci, w zależności od przyjętych profili na pręty dźwigara. Każda z tych dwóch postaci ustroju nośnego ma własną ścieżkę wyężania prowadzącą do osiągnięcia stanu granicznego jednego z trzech jego czynnych prętów. Podano algorytm poszukiwania ścieżki wyczerpania nośności kratownicy w przypadku ogólnym. Na każdej ścieżce znaleziono rozwiązanie wewnętrznie spójne, tzn. że wartości sił w prętach i osiągnane stany graniczne są adekwatne do wyników analiz statycznych, w tym przypadku analiz sprężystych w obydwu stadiach. Przedstawiono przykłady rozwiązań numerycznych.

**Słowa kluczowe:** stany graniczne konstrukcji, dźwigar kratowy, wyboczenie giętno prętów osiowo ściskanych, nośność sprężysta, zniszczenie lokalne i globalne konstrukcji

DOI: 10.5604/12345865.1157335

### 1. Wstęp

W artykule rozważamy przypadek kratownicy, której ustrój nośny jest statycznie wewnętrznie niewyznaczalny. Sprawdzenie warunku stanu granicznego nośności wymaga rozważenia możliwych ścieżek wyężenia ustroju pod działaniem narastających

obciążeń zewnętrznych do poziomu wartości obliczeniowych w niekorzystnych sytuacjach obciążeniowych. Przesłanką podjętych rozważań jest znany fakt, że stosowanie ogólnie przyjętej procedury projektowania, w której wydzielamy etapy ustalania obciążeń, analiz statycznych i wymiarowania, prowadzi zwykle do rozwiązań wewnętrznie niespójnych. Podejmowane decyzje projektowe etapu końcowego — wymiarowania przekrojów czy elementów — rzutują na rozkład sztywności. Rozkład ten wpływa na siły wewnętrzne, a więc zaburza wyniki uprzednio przeprowadzonych analiz statycznych w zakresie sprężystym, wykonanych przy założeniu konkretnego rozkładu sztywności, na ogół różnego od wynikowego. Stąd warunki stanu granicznego użyteczności wymagane do sprawdzenia w obliczeniach projektowych przy poziomie obciążeń charakterystycznych mogą nie odpowiadać rzeczywistości.

Brak konsekwencji dostrzeżemy również przy sprawdzaniu warunków stanu granicznego nośności. Warunki te sprawdzamy oddzielnie w poszczególnych przekrojach krytycznych czy względem elementów konstrukcyjnych. Zwykle nie przeprowadzamy analiz zachowania ustroju o założonej sztywności, traktowanego globalnie w miarodajnych procesach obciążania, do wystąpienia stanów wyczerpania nośności. Stany te powinny stanowić zakończenie możliwych ścieżek obciążania i wynikać z analiz statycznych przeprowadzanych w zakresie niesprężystym w sytuacjach obciążeniowych poziomu obliczeniowego. Wyniki tych analiz powinny opisywać globalną nośność graniczną ustroju, a nie tylko poszczególnych jego elementów.

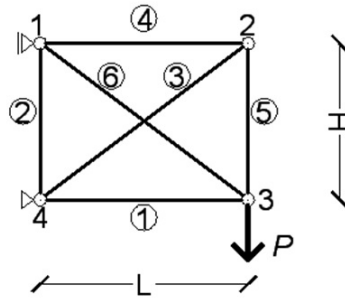
Eliminacji przedstawionych mankamentów projektowania według etapowej procedury można dokonać sposobem iteracyjnym, co jest uciążliwe. Innym sposobem może być rezygnacja z tej procedury i wykorzystanie scalonej procedury projektowania opartej na wykorzystaniu nieliniowych analiz statycznych.

W niniejszej pracy skoncentrujemy się na prognozie możliwych ścieżek obciążania kratowego dźwigara stalowego. Prognoza taka jest użyteczna w procedurze projektowania w ujęciu globalnym, bez wprowadzania podziału na etapy obliczeń statycznych i wymiarowania. Nie rozważamy zagadnienia projektowania dźwigara. Skupiamy się tylko na jego kształtowaniu z uwagi na nośność sprężystą i graniczną.

## 2. Przedmiot analizy i założenia

Poszukujemy ścieżek obciążania stalowego dźwigara kratownicowego typu wspornikowego do wystąpienia stanów granicznych nośności na przykładzie dźwigara wewnętrznie statycznie niewyznaczalnego o schemacie jak na rysunku 1. Przyjmujemy, że obciążeniem kratownicy jest narastająca proporcjonalnie statyczna siła  $P$  działająca w węźle 3. Zaniedbujemy obciążenia, które mogą występować w pozostałych węzłach dźwigara.

W kratownicy występują pręty ściskane 1, 2, 3 oraz rozciągane 4, 5, 6. Przy proporcjonalnym narastaniu siły  $P$  ich status wyłączenia nie ulega zmianie. Przyjmujemy,



Rys. 1. Schemat statyczny czterowzłowej kratownicy

że stan graniczny pręta rozciąganego, zdolnego do idealnego odkształcania plastycznego, występuje przy sile obliczeniowej dla przekroju poprzecznego brutto  $A$

$$N_{t,Rd} = A \cdot f_y, \quad (1)$$

gdzie:  $f_y$  jest granicą plastyczności stali.

Natomiast o nośności pręta osiowo ściskanego decyduje wyboczenie giętne. Według normy [2] nośność pręta przy wyboczeniu jest następująca:

$$N_{b,Rd} = \begin{cases} \chi \cdot A \cdot f_y, & \text{gdy } \bar{\lambda} > 0,2 \\ A \cdot f_y, & \text{gdy } \bar{\lambda} \leq 0,2. \end{cases} \quad (2)$$

Współczynnik wyboczenia  $\chi$  określa wzór

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1,0, \quad \varphi = 0,5 \cdot \left[ 1 + \alpha \cdot (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right], \quad (3)$$

gdzie:  $\alpha$  — parametr imperfekcji określający odpowiednią krzywą niestateczności.

Smukłość względną  $\bar{\lambda}$  jest określona nośnością przekroju  $Af_y$  i Eulerowską siłą krytyczną odpowiadającą miarodajnej postaci wyboczenia

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}}, \quad N_{cr} = \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 E \cdot A, \quad (4)$$

gdzie:  $\lambda$  jest smukłością, a  $\lambda_p$  smukłością porównawczą pręta ściskanego.

Konsekwencje utraty stateczności pręta ściskanego odzwierciedlimy w sposób przybliżony. Zakładamy, że pręty ściskane mogą doznać wyboczenia giętnego, nie powodując utraty płaskiej postaci dźwigara i jego globalnej destrukcji. Dźwigar

jest zabezpieczony odpowiednią konstrukcją usztywniającą, która powstrzymuje rozwój lawinowego zniszczenia, towarzyszącego często wyboczeniu. Współdziałanie usztywnień nie stanowi przedmiotu prezentowanej analizy. Przyjmujemy, że po wyboczeniu pręt staje się bierny w dalszym procesie obciążania, tzn.: wyczerpują się rezerwy jego nośności, ale nie towarzyszy mu istotne odciążenie z uwagi na współdziałanie z usztywnieniami. Współdziałanie to również nie jest analizowane. Zanedbujemy także wpływ efektów dynamicznych wyboczenia z uwagi na ich krótkotrwały charakter. Przyjęte założenia upraszczające w niniejszej pracy eliminują efekty nieliniowości geometrycznej. Za podstawę analiz przyjęto więc teorię geometrycznie liniową.

### 3. Stadia wyężenia dźwigara

W procesie obciążania kratownicy wyróżniamy dwa stadia. Pierwsze stadium sprężyste, w którym ustrój jest wewnętrznie statycznie niewyznaczalny i reaguje wyężeniem wszystkich sześciu prętów. Jego schemat statyczny jest przedstawiony na rysunku 1. Rozwiązanie w zakresie sprężystym metodą sił można przedstawić następującymi wzorami, które określają siły podłużne  $S_i$  w  $i$ -tym pręcie:

$$S_i = \xi_i \cdot P, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (5)$$

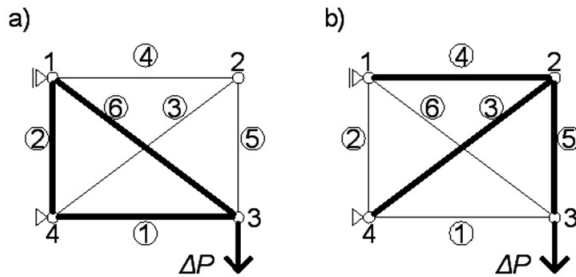
gdzie:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \left( \eta \cdot \frac{H}{L_K} - 1 \right) \cdot \frac{L}{H}, \quad \xi_2 = \left( \eta \cdot \frac{H}{L_K} - 1 \right), \quad \xi_3 = -\eta, \\ \xi_4 &= \eta \cdot \frac{L}{L_K}, \quad \xi_5 = \eta \cdot \frac{H}{L_K}, \quad \xi_6 = \left( \frac{L_K}{H} - \eta \right), \quad L_K = \sqrt{L^2 + H^2}, \\ \eta &= \frac{L_K}{H} \frac{A_{34}}{L^3 a + H^3 b + L_K^3 c}, \\ a &= \left( \frac{1}{A_{12}} + \frac{1}{A_{34}} \right), \quad b = \left( \frac{1}{A_{23}} + \frac{1}{A_{14}} \right), \quad c = \left( \frac{1}{A_{13}} + \frac{1}{A_{24}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Powyższe wzory pokazują, że wartości sił wewnętrznych w ustroju statycznie niewyznaczalnym zależą od pól przekrojów poprzecznych prętów kratownicy,  $A_{12}, A_{23}, \dots, A_{14}$ , podlegających w niniejszej analizie losowemu wyborowi. Wybór ten warunkuje rozpoczęcie procedury projektowania.

W drugim stadium pozasprężystym, rozpoczynającym się po osiągnięciu nośności sprężystej  $P_{spr}$ , następuje przekształcenie dźwigara w ustrój statycznie wyznaczalny na skutek uplastycznienia pręta rozciąganego albo wyboczenia pręta ściskanego. Wystąpienie takiego lokalnego stanu granicznego nośności w kratownicy powoduje równocześnie, że dwa inne pręty, mające węzeł wspólny z tym, który doznał stanu granicznego, również stają się bierne wytyżeniowo i odkształceniowo. Zachowują one wytyżenie i odkształcenie sprężyste z końca stadium sprężystego. Ich dalsza bierność jest wymuszona równaniem równowagi węzła wspólnego. Pręty bierne tworzą segment dźwigara, który może być uważany za lokalną destrukcję układu wyjściowego. Nie podlega ona rozwojowi z uwagi na zastosowany system usztywnień przestrzennych dźwigara.

W stadium pozasprężystym w dźwigarze zmniejsza się więc liczba prętów aktywnych z sześciu do trzech, ale powstały ustrój nośny jest zdolny do dalszego przejmowania przyrostu obciążenia zewnętrznego  $\Delta P$  ponad  $P_{spr}$ . Pręty aktywne w stadium pozasprężystym mają rezerwę nośności o charakterze odpowiadającym rozciąganiu albo ścisaniu. Występują więc dwie możliwości przekształcenia dźwigara w ustrój statycznie wyznaczalny (rys. 2).



Rys. 2. Możliwe typy statycznie wyznaczalnych układów nośnych w stadium pozasprężystym: a) ustrój nośny typu usw I; b) ustrój nośny typu usw II

Liniami cienkimi na rysunku 2 oznaczono pręty bierne. Tylko jeden z nich osiągnął stan graniczny przy  $P = P_{spr}$ . Pozostałe zachowują intensywność wytyżenia osiągniętą w stadium sprężystym.

Siły w aktywnych prętach ustrojów właściwych stadium pozasprężystego wyznaczmy wzorami:

$$S_j = S_j(P_{spr}) + \Delta S_j(\Delta P), \quad j = 1, 2, 6 \text{ (usw I)}, \text{ albo } j = 3, 4, 5 \text{ (usw II)}, \quad (7)$$

gdzie:  $\Delta S_j(\Delta P) = \beta_j \cdot \Delta P$ ,  $\beta_{1(4)} = -(+)\frac{L}{H}$ ,  $\beta_{2(5)} = -(+)1$ ,  $\beta_{3(6)} = -(+)\frac{L_k}{H}$ ;

współczynnik  $\beta$  indeksowany numerem pręta ściskanego (rozciąganego) z określonym znakiem minus (plus).

Wzory na  $\Delta S_j(\Delta P)$  wyznaczono z równowagi odpowiednich węzłów, bez potrzeby stosowania analizy w zakresie niesprężystym. Można uważać, że sposób ten odzwierciedla metodę rozwiązań sprężystych stosowaną w przypadku wprowadzenia podziału na etapy procesu proporcjonalnego obciążania konstrukcji doznającej sukcesywnie uplastycznień przekrojów krytycznych. Pierwszy etap odpowiada stadium sprężystemu — do  $P_{spr}$ . W stadium pozasprężystym rozważamy tylko oddziaływanie nadwyżki obciążenia  $\Delta P$  na stosowny ustrój nośny (rys. 2), który ukształtował się przy  $P = P_{spr}$ . Idea metody rozwiązań sprężystych, jako odmiany podejścia statycznego teorii nośności granicznej, jest prezentowana w [1] na przykładzie ramy statycznie niewyznaczalnej. Innym sposobem byłoby zastosowanie kontynuualnej analizy niesprężystej i rozważanie wyjściowego ustroju (rys. 1) pod działaniem obciążenia  $P > P_{spr}$ .

Wskazemy na pewną osobliwość przekształcenia wyjściowego ustroju nośnego w ustrój statycznie wyznaczalny. Przede wszystkim możliwe układy nośne o statusie statycznej wyznaczalności do dalszego przejmowania obciążania zewnętrznego wykształcają się automatycznie. Nie należy traktować ich w kategoriach schematów podstawowych stosowanych przy rozwiązywaniu zadania statycznie niewyznaczalnego metodą sił. Trzeba traktować je jako układy nośne, które w stadium pozasprężystym dźwigara są zdolne do przejmowania dalszego przyrostu obciążenia  $\Delta P$  ponad nośność sprężystą dźwigara  $P_{spr}$ .

Ocenę jakościową utworzenia się segmentu biernego kratownicy przedstawimy, uwzględniając przyczynę inicjacji. Jeżeli jest nią uplastycznienie pręta rozciąganego przy  $P = P_{spr}$ , to można wnioskować o quasi-statycznym przejściu do stadium pozasprężystego. Płynięcie plastyczne tego pręta nie może realizować się jako swobodne, pomimo założenia idealnej plastyczności stali. Jest ono regulowane przyrostami przemieszczeń węzłów tego pręta, czyli ugięciami dźwigara w dalszym przejmowaniu przyrostu obciążenia ponad nośność sprężystą  $P_{spr}$ .






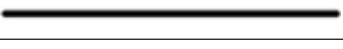
Jeżeli natomiast utworzenie się omawianego fragmentu biernego kratownicy jest spowodowane wyboczeniem giętym pręta ściskanego, to należy rozważać pewne efekty dynamiczne. Zagadnienie to nie jest poddane analizie w pracy. Przyjmujemy, że efekty te są tłumione systemem usztywnień przestrzennym obiektu, w którym funkcjonuje analizowany dźwigar. Nie mają one wpływu na dalsze wyężenie powstałego trzyprętowego ustroju nośnego przy  $P = P_{spr}$ .

#### 4. Ścieżki wyężenia dźwigara kratowego do wyczerpania nośności granicznej

Możliwy status prętów dźwigara w stadium pozasprężystym —  $P_{spr} \leq P \leq P_{gr}$  — określają oznaczenia podane w tabeli 1.

TABELA 1

Symbolika statusu prętów w stadium pozasprężystym

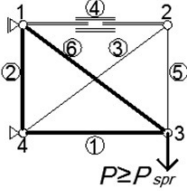
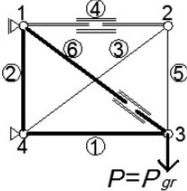
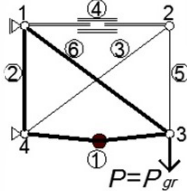
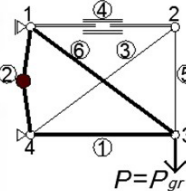
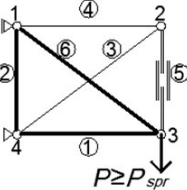
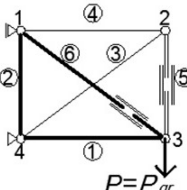
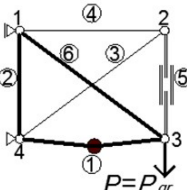
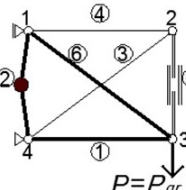
Symbol	Opis symbolu
	Pręt rozciągany, ulegający uplastycznieniu przy $P = P_{spr}$
	Pręt rozciągany, ulegający uplastycznieniu przy $P = P_{gr}$
	Pręt ściskany, ulegający wyboczeniu przy $P = P_{spr}$
	Pręt ściskany, ulegający wyboczeniu przy $P = P_{gr}$
	Pręt bierny w fazie pozasprężystej
	Pręt czynny w fazie pozasprężystej

Symbole te wskazują przyczyny efektów wytężenia: uplastycznienie pręta rozciąganego albo utratę stateczności pręta ściskanego z osiągnięciem nośności sprężystej lub stanu granicznego. Zobrazowanie pręta linią cienką podwójną oznacza stosowny efekt kończący stadium sprężyste, a użycie linii grubej wskazuje na efekt wyczerpania nośności pręta na koniec stadium pozasprężystego.

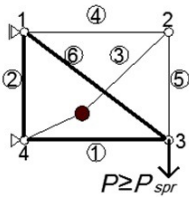
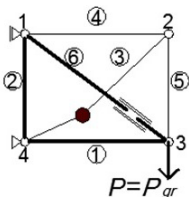
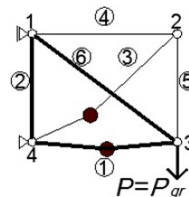
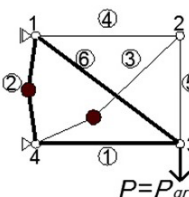
Przykładowe ścieżki wytężenia kratownicy, zależne od zadanych wstępnie przekrojów poprzecznych prętów, są przedstawione w tabelach 2. Dotyczą one przypadków tworzenia się ustroju statycznie wyznaczalnego typu **usw I** (rys. 2a), albo **usw II** (rys. 2b) i dalszej ich ewolucji w stadium pozasprężystym do wystąpienia stanu wyczerpania nośności — utworzenia się mechanizmu zniszczenia **mzn**.

Możliwe ewolucje ustroju statycznie wyznaczalnego **usw I** powstałego przy  $P = P_{spr}$  w mechanizmy zniszczenia **mzn** po osiągnięciu  $P = P_{gr}$ .

TABELA 2A

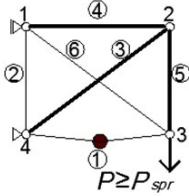
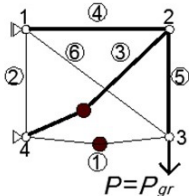
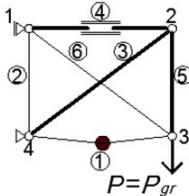
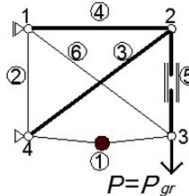
Lp.	Typ ustroju nośnego <b>usw I</b>	Rodzaje globalnych mechanizmów zniszczenia ( <b>mzn</b> ) dźwigara			
1	 <p><b>usw I-4</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 4 kończy stadium sprężyste. Powstaje lokalny mechanizm zniszczenia. Tworzy się statycznie wyznaczalny ustrój nośny typu I.</p>	 <p><b>mzn(usw I-4)-6</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 6 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągłwe całego dźwigara.</p>	 <p><b>mzn(usw I-4)-1</b> Wyboczenie pręta ściskanego nr 1 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>	 <p><b>mzn(usw I-4)-2</b> Wyboczenie pręta ściskanego nr 2 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>	
2	 <p><b>usw I-5</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 5 kończy stadium sprężyste. Powstaje lokalny mechanizm zniszczenia. Tworzy się statycznie wyznaczalny ustrój nośny typu I.</p>	 <p><b>mzn(usw I-5)-6</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 6 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągłwe całego dźwigara.</p>	 <p><b>mzn(usw I-5)-1</b> Wyboczenie pręta ściskanego nr 1 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>	 <p><b>mzn(usw I-5)-1</b> Wyboczenie pręta ściskanego nr 2 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>	

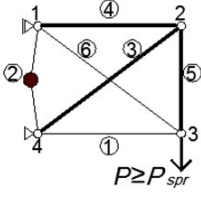
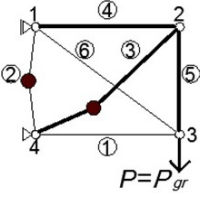
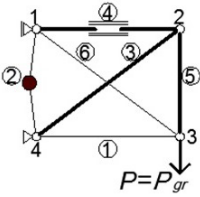
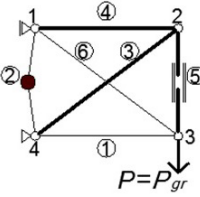
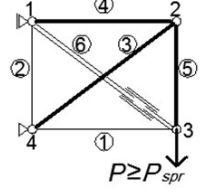
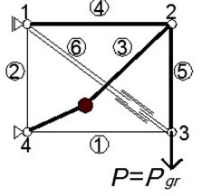
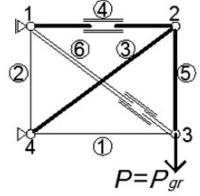
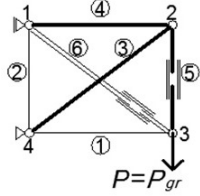


3	 <p style="text-align: center;"><math>P \geq P_{spr}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>usw I-3</b></p> <p>Wyboczenie pręta ściskanego nr 3 kończy stadium sprężyste. Powstaje lokalny mechanizm zniszczenia. Tworzy się statycznie wyznaczalny ustrój nośny typu I.</p>	 <p style="text-align: center;"><math>P = P_{gr}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>mzn(usw I-3)-6</b></p> <p>Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 6 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągłiwe.</p>	 <p style="text-align: center;"><math>P = P_{gr}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>mzn(usw I-3)-1</b></p> <p>Wyboczenie pręta ściskanego nr 1 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>	 <p style="text-align: center;"><math>P = P_{gr}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>mzn(usw I-3)-2</b></p> <p>Wyboczenie pręta ściskanego nr 2 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>
---	---	--	---	--

Możliwe ewolucje ustroju statycznie wyznaczalnego **usw II** powstałego przy  $P = P_{spr}$  w mechanizmy zniszczenia **mzn** po osiągnięciu  $P = P_{gr}$ .

TABELA 2B

Lp.	Typ ustroju nośnego <b>usw II</b>	Rodzaje globalnych mechanizmów zniszczenia ( <b>mzn</b> ) dźwigara		
1	 <p style="text-align: center;"><math>P \geq P_{spr}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>usw II-1</b></p> <p>Wyboczenie pręta ściskanego nr 1 kończy stadium sprężyste. Powstaje lokalny mechanizm zniszczenia. Tworzy się ustrój statycznie wyznaczalny typu II.</p>	 <p style="text-align: center;"><math>P = P_{gr}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>mzn(usw II-1)-3</b></p> <p>Wyboczenie pręta ściskanego nr 3 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>	 <p style="text-align: center;"><math>P = P_{gr}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>mzn(usw II-1)-4</b></p> <p>Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 4 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągłiwe.</p>	 <p style="text-align: center;"><math>P = P_{gr}</math></p> <p style="text-align: center;"><b>mzn(usw II-1)-5</b></p> <p>Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 5 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągłiwe.</p>

2	 <p><b>usw II-2</b> Wyboczenie pręta ściskanego nr 2 kończy stadium sprężyste. Powstaje lokalny mechanizm zniszczenia. Tworzy się statycznie wyznaczalny ustrój nośny typu II.</p>	 <p><b>mzn(usw II-2)-3</b> Wyboczenie pręta ściskanego nr 3 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>	 <p><b>mzn(usw II-2)-4</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 4 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągliwe.</p>	 <p><b>mzn(usw II-2)-5</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 5 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągliwe.</p>
3	 <p><b>usw II-6</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 6 kończy stadium sprężyste. Powstaje lokalny mechanizm zniszczenia. Tworzy się statycznie wyznaczalny ustrój nośny typu II.</p>	 <p><b>mzn(usw II-6)-3</b> Wyboczenie pręta ściskanego nr 3 wywołuje postępujące zniszczenie całego dźwigara.</p>	 <p><b>mzn(usw II-6)-4</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 4 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągliwe.</p>	 <p><b>mzn(usw II-6)-5</b> Uplastycznienie pręta rozciąganego nr 4 wywołuje zniszczenie plastyczne ciągliwe.</p>

## 5. Algorytm poszukiwania ścieżek wyłączenia dźwigara

W celu uogólnienia rozważań nie przyjmujemy konkretnych przekrojów prętów kratownicy, ale zakładamy pewne granice zbioru profili stalowych o przekrojach poprzecznych  $\{A_n\}$  z przynależnymi im cechami geometrycznymi. W celu przeprowadzenia analiz szczegółowych przyjęto 80 rur okrągłych o różnej średnicy zewnętrznej i grubości ścianki z przedziału  $< \Phi = 31,8/g = 2,9 \text{ mm}, \dots, \Phi = 180/g = 12 \text{ mm} >$ .

Opracowano indywidualny program komputerowy w języku Fortran, który umożliwił opis zachowania kratownicy do wyczerpania nośności włącznie. Spośród założonego zbioru profili wybierano przy użyciu generatora liczb losowych profile na pręty kratownicy i określano siły graniczne prętów,  $N_{i,gr} = (N_{t,Rd}, N_{b,Rd})$ , stosownie do ich wyłączenia: ściskane, rozciągane. W pierwszej części programu wyznaczono siły w prętach  $S_i$  według wzorów (4). Dokonywano sprawdzenia, który z prętów osiąga najwcześniej lokalną nośność graniczną. Tym samym wyznaczano wartość obciążenia, które jest nośnością sprężystą dźwigara,  $P_{spr}$ . W kolejnym stadium wyłączenia pozasprężystego pręt wyłączeniowo najslabszy stawał się prętem biernym, razem z dwoma prętami o wspólnym węźle. Dźwigar dotychczas statycznie niewyznaczalny przekształcał się w trzyprętowy ustrój nośny statycznie wyznaczalny, **usw I** albo **usw II**. W stadium wyłączenia pozasprężystego analizowano możliwe wystąpienie stanu nośności granicznej z uwagi na rezerwy nośności prętów czynnych odpowiedniego ustroju.

Algorytm programu komputerowego jest przedstawiony w tabeli 3.

TABELA 3

Algorytm programu

START
1. Zadanie zestawu profili do skonstruowania dźwigara
2. Losowy wybór zestawu profili do skonstruowania dźwigara
3. Wyznaczenie nośności granicznej $i$ -tego pręta: $N_{gr,i} = \left\langle N_{t,Rd}, \dots, N_{b,Rd} \right\rangle \Big _{i=1, \dots, 6}$
↓ <b>Analiza w stadium sprężystym</b>
4. Wyznaczenie obciążenia $P_{spr,i}$ ze względu na nośność $i$ -tego pręta na podstawie wzoru (4), $P_{spr,i} = \frac{S_i}{\xi_i} \Big _{S_i = N_{gr,i} \dots i=1, \dots, 6}$

<p>5. Wyznaczenie nośności sprężystej <math>P_{spr} = \min P_{spr,i} \Big _{i=1,\dots,6}</math></p> <p>i sił w prętach kratownicy <math>S_i(P_{spr})</math> wraz z numerem pręta decydującym o zakończeniu stadium sprężystego i typem ustroju statycznie wyznaczalnego: <b>usw I</b> czy <b>usw II</b>, właściwych wyciężeniu w stadium pozasprężystym.</p>
<p style="text-align: center;">↓ <b>Analiza w stadium pozasprężystym</b></p> <p>6. Wyznaczenie przyrostów obciążenia <math>\Delta P_j</math> z uwagi na rezerwy nośności granicznej każdego z prętów aktywnych w ustrojach nośnych <b>usw I</b>, albo <b>usw II</b>, na podstawie wzorów (6),</p> $\Delta P_j = \frac{N_{gr,j} - S_j(P_{spr})}{\beta_j}, \dots j = 1, 2, 6, \dots \text{ albo } \dots j = 3, 4, 5$
<p>7. Wyznaczenie <math>\Delta P = \min \Delta P_j</math> i obciążenia granicznego <math>P_{gr} = P_{spr} + \Delta P</math> ze względu na wylosowany zestaw profili, wraz z numerem <math>M</math> pręta generującego mechanizm zniszczenia</p> <p><b><u>mzn(usw I-J)-M</u></b> albo <b><u>mzn(usw II-J)-M</u></b>.</p>
<p>8. Następne losowanie =&gt; 2.</p>
<p>STOP</p>

## 6. Wyniki analiz numerycznych

W tabeli 4 zamieszczono wyniki obliczeń nośności sprężystej i granicznej wraz z informacjami o ścieżkach wyciężenia kratownicy w procesie obciążania. Podano wylosowany komplet profili prętów ze zbioru  $\{A_n\}$ . W pierwszym wierszu zamieszczono profile prętów ściskanych nr 1, 2, 3 (średnica rury/grubość ścianki); w drugim wierszu profile prętów rozciąganych nr 4, 5, 6. Pręt rozciągany nr 6 konstruowano z dwóch profili z uwagi na możliwość niekolizyjnego usytuowania pręta ściskanego nr 3. Podano typ ustroju statycznie wyznaczalnego **usw I(II)** kształtującego się przy  $P = P_{spr}$  wraz z podaniem numeru pręta „**M**” odpowiedzialnego za zmianę schematu nośnego.

Osiągnięcie stanu granicznego nośności przy  $P = P_{gr}$  traktujemy jako powstanie globalnego mechanizmu zniszczenia dźwigara — **mzn**. Oznaczenie to uzupełniono numerem pręta „**j**”, którego wyciężenie graniczne kończy stadium pozasprężyste dźwigara. Celem scharakteryzowania natury niesprężystego wyciężenia dźwigara podczas obciążania w drugim stadium w kolumnie z **mzn** podano literowe oznaczenia *R* i *W*. Oznaczają one uplastycznienie pręta rozciąganego i wyboczenie pręta ściskanego z przypisanymi numerami.

Przedstawione rozwiązania szczegółowe odnoszą się do relacji  $P_{gr} \approx 1,5P_{spr}$  i obejmują jedynie wybrane przykłady analiz numerycznych.

TABELA 4

Nośność sprężysta  $P_{spr}$ , i graniczna  $P_{gr}$ , wraz z informacjami o charakterze ścieżek wytyżenia w zależności od wylosowanych profili na pręty kratownicy

Lp.	Wylosowane profile (nr pręta) profile prętów ściskanych (nr pręta) profile prętów rozciąganych	usw I/II-J	$P_{SPR}$ [kN]	mzn(usw I/II-J)-M Typ ścieżki w stadium pozasprężystym	$P_{GR}$ [kN]
1	(1)R76.1/11; (2)R76.1/6.3; (3)R159/7.1 (4)R31.8/2.9; (5)R108/5.6; (6)2xR133/5	usw I-4	219,30	<b>mzn(usw I-4)-6</b> R4 => R6	329,80
2	(1)R114.3/6.3; (2)R88.9/8.8; (3)R101.6/12.5 (4)R114.3/10; (5) R31.8/2.9; (6)2xR88.9/5.6	usw I-5	177,10	<b>mzn(usw I-5)-6</b> R5 => R6	269,10
3	(1)R63.5/7.1; (2)R88.9/5.6; (3) R57/8.8 (4)R44.5/3.2; (5)R33.7/3.2; (6)2xR33.7/2.9	usw II-6	73,99	<b>mzn(usw II-6)-5</b> R6 => R5	111,80
4	(1)R114.3/5; (2)R63.5/10; (3)R101.6/12.5 (4)R31.8/2.9; (5)R108/4; (6)2xR76.1/10	usw I-4	213,10	<b>mzn(usw I-4)-1</b> R4 => W1	320,90
5	(1)R76.1/6.3; (2)R108/5; (3)R133/8.8 (4)R168.3/5; (5)R31.8/3.2; (6)2xR63.5/8.8	usw I-5	168,20	<b>mzn(usw I-5)-1</b> R5 => W1	251,10
6	(1)R57/6.3; (2)R76.1/11; (3)R57/8 (4)R44.5/3.6; (5)R44.5/2.9; (6)2xR31.8/2.9	usw II-6	74,47	<b>mzn(usw II-6)-3</b> R6 => W3	111,50
7	(1)R38/4.5; (2)R48.3/5.6; (3)R63.5/10 (4)R31.8/2.9; (5)R88.9/11; (6)2x R38/3.6	usw II-1	45,59	<b>mzn(usw II-1)-4</b> W1 => R4	69,02
8	(1)R57/6.3; (2)R31.8/3.2; (3)R76.1/6.3 (4)R88.9/7.1; (5)R31.8/2.9; (6)2xR44.5/4.5	usw II-2	59,65	<b>mzn(usw II-2)-5</b> W2 => R5	89,23
9	(1)R76.1/6.3; (2)R70/10; (3)R38/2.9 (4)R31.8/4.5; (5)R57/5; (6)2xR31.8/2.9	usw I-3	31,65	<b>mzn(usw I-4)-6</b> W4 => R6	47,72
10	(1)R31.8/2.9; (2)R57/5.6; (3)R38/3.6 (4)R44.5/3.2; (5)R31.8/2.9; (6)2xR60.3/10	usw II-1	14,64	<b>mzn(usw II-1)-3</b> W1 => W3	21,87
11	(1)R88.9/6.3; (2)R31.8/2.9; (3)R48.3/3.6 (4) (5) R33.7/3.2; (6)2xR70X7.1	usw II-2	34,19	<b>mzn(usw II-2)-3</b> W2 => W3	51,28
12	(1), (2)R33.7/4.5 x2; (3)R31.8/3.2 (4)R60.3/8; (5)R76.1/5.6; (6)2xR38/2.9	usw I-3	14,51	<b>mzn(usw I-3)-1</b> W3 => W1	21,74

Wyniki podane w tabeli 4 wskazują na silną zależność ścieżek wytyżenia od wylosowanego kompletu profili na pręty dźwigara. Uzyskane rozwiązania mogą być traktowane jako kształtowanie dźwigara kratowego z uwagi na charakter wytyżenia pozasprężystego. Ukształtowane dźwigary mogą być zaliczone do czterech grup.

Grupa 1 — stan nośności sprężystej i stan graniczny nośności są osiągnięte przez uplastycznienie prętów rozciąganych. Rozwiązania są podane w wierszach oznaczonych liczbą porządkową (1, 2, 3).

Grupa 2 — stan nośności sprężystej osiągnąć jest przez uplastycznienie pręta rozciąganego, a stan graniczny nośności jest inicjowany wyboczeniem pręta ściskanego — rozwiązania w kolejnych wierszach (4, 5, 6).

Grupa 3 — stan nośności sprężystej osiąga się przez wyboczenie pręta ściskanego, a stan graniczny nośności jest inicjowany uplastycznieniem pręta rozciąganego, rozwiązania zamieszczone w wierszach (7, 8, 9).

Grupa 4 — stan nośności sprężystej i stan graniczny nośności są osiągnąć przez wyboczenie prętów ściskanych, co ilustrują rozwiązania (10, 11, 12).

Z przedstawionego podziału na grupy wynika, że przy odpowiednim doborze profili dźwigar można ukształtować jako konstrukcję ciągliwą plastycznie. Takie rozwiązania uzyskamy przy osiągnięciu stanu nośności sprężystej i stanu granicznego dźwigara przez uplastycznienie prętów rozciąganych — grupa 1. Mogą one interesować projektanta ze względu na sygnalizację zniszczenia poprzez nadmierne przemieszczenia. Pewne własności dysypatywne będzie miał również dźwigar ukształtowany zgodnie z grupą 2.

## 7. Wnioski

W pracy przedstawiono analizę stadiów wyciężenia dźwigara kratowego w procesie proporcjonalnego wzrostu obciążenia w celu wyznaczenia nośności sprężystej oraz nośności granicznej. Przekroje prętów dźwigara ustalano przez losowy wybór profili stalowych z przyjętego zbioru.

Zasadniczy akcent postawiono na ustalenie różnych typów ścieżek wyciężenia w stadium pozasprężystym. Znajomość tych ścieżek umożliwia racjonalne kształtowanie dźwigara, które może być użyteczne w projektowaniu z uwagi na jego zdolności dysypatywne.

Osobliwością analizy jest wykorzystanie rozwiązań statycznie wewnętrznie spójnych, to znaczy zgodnych z założonym rozkładem sztywności prętów oraz ich nośności, z rozróżnieniem nośności plastycznej prętów rozciąganych i nośności prętów ściskanych z uwzględnieniem wyboczenia giętnego według [2]. Wykorzystano w tym celu wzory analityczne na siły wewnętrzne w prętach właściwe schematom statycznym: niewyznaczalnemu w stadium sprężystym oraz wyznaczalnym w stadium pozasprężystym. Wskazano, że zmiana schematu statycznego realizuje się z osiągnięciem nośności sprężystej z jednoczesnym utworzeniem się segmentu obejmującego trzy pręty, które zachowują się biernie w dalszym procesie obciążania. Segmenty te mogą być traktowane jako pewne odpowiedniki stref uplastycznienia powstających w dźwigarach o przekrojach pełnościennych.

Rozwiązania statyki wewnętrznie spójne dla ustrojów statycznie niewyznaczalnych możemy otrzymać nie tylko na podstawie wykorzystywanych w pracy wzorów analitycznych (4) i (5) na siły w prętach. Możliwe jest również wykorzystanie

do analizy statycznej oprogramowania systemowego wspomagającego obliczenia statyczne i wytrzymałościowe w zakresie analizy fizycznie nieliniowej. W tym celu konieczne jest tylko potraktowanie prętów ściskanych podlegających wyboczeniu jako prętów doznających fikcyjnego płynięcia plastycznego na poziomie naprężeń krytycznych. Takie uproszczone postępowanie, zaniedbujące dynamiczny efekt utraty stateczności, pozwala na odzwierciedlenie wyczerpania nośności prętów podlegających wyboczeniu i ich bierności w dalszym przejmowaniu siły przekraczającej wartość krytyczną. Tym samym jest możliwe oszacowanie nośności sprężystej i granicznej dźwigara, zgodnie z przedstawionym w pracy uproszczonym podejściem do opisu zachowań sprężysto plastycznych kratownic. Wyniki podane w tabelach 2 i 4, uzyskane w oparciu o dokładne wzory analityczne, zostały zweryfikowane w wyżej proponowany sposób programem Autodesk Robot Structural Analysis.

Źródło finansowania pracy — grant własny RMN 900.

Artykuł wpłynął do redakcji 12.09.2014 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 29.09.2014 r.

#### LITERATURA

- [1] WOJEWÓDZKI W., *Nośność graniczna konstrukcji prętowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2012.
- [2] PN-EN 1993-1-1, *Projektowanie konstrukcji stalowych*, Część 1-1. *Reguły ogólne i reguły dla budynków*.

A. BRZUZY, G. BĄK

#### Paths of the truss girder exertion

**Abstract.** The analysis of the response of the statically undetermined truss girder in the process of the proportional loading is presented in this paper. Rigidity of the six-bar girder is selected by the draw of the profile bars among the assumed collection of the steel hot-rolled tubes. Two stadiums of exertion of the girder-elastic and non-elastic ones are considered. Each of these stadiums ends by plastification of the one of the tensile bars or buckling of the one of the bars in compression. Assuming some approximate assumptions, the possibilities are indicated for creating the statically determined three-bar structure and a passive part of the girder in the non-elastic stadium. Both the structure and the passive part can have two different forms depending on the drawn profiles of the bars. Each form of the structures has its own path of exertion to achieve the state of limit capacity. It depends which the active bar of the structure experiences plastification in stretching or buckling in compression. Some features are indicated during transforming the initial structure functioning in the elastic stadium into the structure proper to the non-elastic stadium. The algorithm of seeking the exertion paths in the general case is given. Each of the paths is characterized by the consistent states of forces in the active bars. Numerical examples are given on the base of the own elaborated computer program.

**Keywords:** limit state of structure, truss girder, bending buckling of bar in compression, elastic capacity, local fracture, global destroying

