

# Analiza obliczeniowa dwuprzęsłowych belek betonowych zbrojonych prętami FRP według wybranych norm



prof. dr hab. inż.  
**RENATA KOTYNIA**  
Politechnika Łódzka  
Wydział Budownictwa,  
Architektury i Inżynierii Środowiska  
**ORCID: 0000-0002-7247-1229**



mgr inż.  
**KONRAD SZCZĘPAŃSKI**  
Politechnika Łódzka  
Wydział Budownictwa,  
Architektury i Inżynierii Środowiska  
**ORCID: 0000-0003-4252-645X**

Normy dotyczące projektowania konstrukcji z betonu ze zbrojeniem niemetalicznym nie uwzględniają zjawiska redystrybucji momentów zginających w analizie nośności, stąd temat tego zjawiska wydaje się bardzo istotny do szerszej analizy i podjęcia badań doświadczalnych, które są tematem planu badawczego realizowanego w Katedrze Budownictwa Betonowego Politechniki Łódzkiej.

Zbrojenie niemetaliczne popularnie zwane *Fiber Reinforced Polymer* (FRP) upowszechniło się na rynku budowlanym ponad 20 lat temu i stanowi interesującą alternatywę zbrojenia stalowego. Ma ono zastosowanie przede wszystkim w konstrukcjach poddanych agresywnym wpływom środowiska, gdzie wyjątkowe właściwości tego zbrojenia związane z odpornością korozyjną, neutralnością elektromagnetyczną, bardzo wysoką wytrzymałością na rozciąganie oraz niewielkim ciężarem sprawiają, że jego zastosowanie przy rosnącej cenie zbrojenia stalowego jest uzasadnione.

## Dotychczasowe badania

Opublikowano jak dotąd szereg badań jednoprzęsłowych elementów betonowych z takim zbrojeniem, jednak brak miarodajnych badań elementów wieloprzęsłowych, które wyraźnie wskazywałyby wpływ zbrojenia FRP na redystrybucję momentów w takich elementach.

Jedne z pierwszych badań dwuprzęsłowych belek ze zbrojeniem niemetalicznym potwierdziły wystąpienie redystrybucji, jednak autorzy nie wykazali bezpośredniego związku stopnia zbrojenia podłużnego z poziomem redystrybucji. W programie badawczym [3] potwierdzono nieznaczny stopień redystrybucji belek zaprojektowanych według zaleceń ACI 440, jednak wyniki z tych badań również nie dały konstruktywnych wniosków na temat wpływu parametrów zmiennych na poziom redystrybucji momentów. Inne badania [1] potwierdziły wystąpienie redystrybucji w belkach ciągłych ze zbrojeniem FRP, a tym samym stały się podstawą projektowania takich elementów z założeniem redystrybucji momentów. W badaniach tych wykaza-

no również, że na skutek utraty przyczepności zbrojenia do betonu należy uwzględnić wpływ tej przyczepności, biorąc pod uwagę różne sposoby wykończenia powierzchni zbrojenia niemetalicznego.

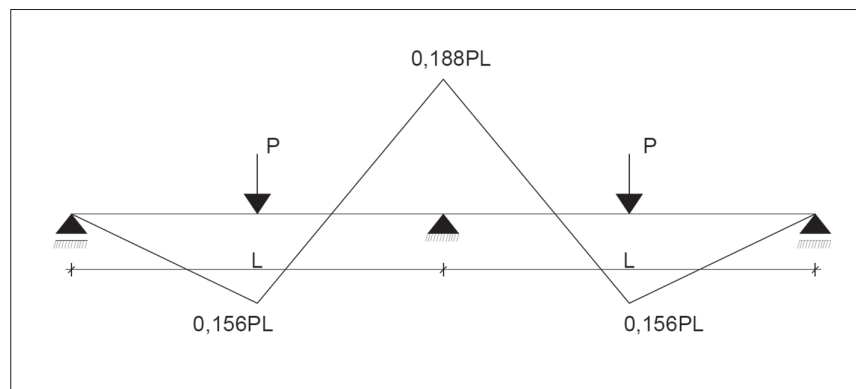
Zagadnienie wpływu zbrojenia poprzecznego na zjawisko redystrybucji momentów omówiono w tych samych badaniach [1], wykazując wpływ różnic stopnia skrępowania belek na rozkład momentów zginających po ich zarysowaniu. Mniejszy rozstaw strzemion w badaniach [4] znacząco poprawił warunki redystrybucji momentów oraz wpłynął na zwiększenie nośności tych elementów na zginanie.

Interesujący był brak spadku nośności belek na skutek utraty przyczepności zbrojenia FRP do betonu nad podporą w badaniach [5], co jednak można wyjaśnić postępującą redystrybucją z podpory do przęsła. Badania te potwierdziły, że utrata przyczepności zbrojenia FRP do betonu nad podporą, a tym samym zwiększony stopień redystrybucji nie doprowadziły do zmniejszenia nośności na zginanie.

Na uwagę zasługują badania [6], w których potwierdzono korzystny wpływ niesymetrycznego obciążenia na wzrost stopnia redystrybucji momentów w belkach ciągłych ze zbrojeniem FRP. W badaniach [7] potwierdzono z kolei brak spadku nośności po redystrybucji momentów w porównaniu z analizą sprężystą. Korzystając z obszernej bazy wyników doświadczalnych przeprowadzono szczegółową analizę, na podstawie której wybrano tylko elementy o przekroju prostokątnym, rzeczywistej skali i jednolicie zbrojone prętami FRP.

## Projektowanie konstrukcji z betonu ze zbrojeniem niemetalicznym w normach

W zakresie normalizacji dotyczącej projektowania konstrukcji z betonu ze zbrojeniem niemetalicznym opublikowano jak dotąd następujące normy: amerykańska ACI [8], kanadyjskie: CSA [9] i ISIS [10], japońska JSCE [11], włoska CNR [12] oraz wytyczne *fib* Bulletin 40 [13]. We wszystkich procedurach normowych zalecanym modelem zniszczenia



Rys. 1. Schemat statyczny belek. Źródło: [1]

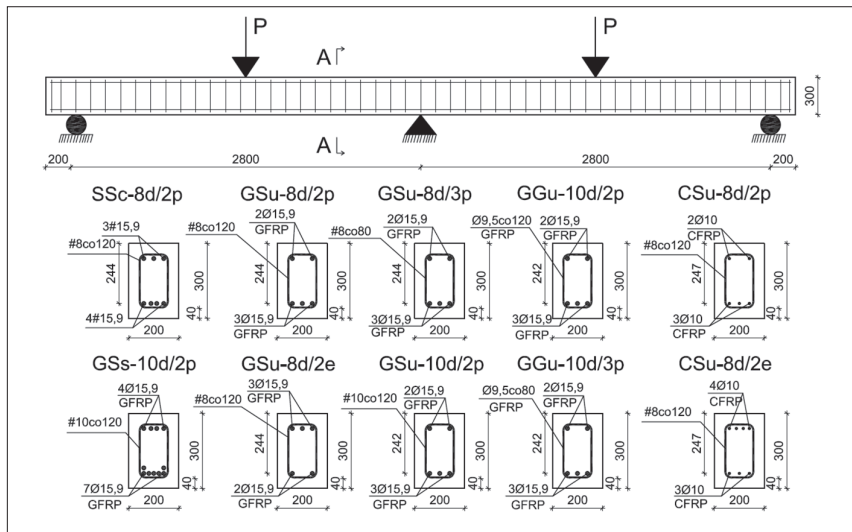
na zginanie jest zmiężdżenie betonu w strefie ściskanej. Charakterystyka wytrzymałościowa zbrojenia FRP jest przy tym sprężysto-liniowa w całym zakresie, co znacząco różni ją od zbrojenia stalowego z typowo liniowo-plastyczną zależnością  $\sigma - \varepsilon$ , która istotnie poprawia redystrybucję momentów w belkach żelbetowych. Brak uplastycznienia prętów FRP może więc poddawać w wątpliwość zjawisko redystrybucji momentów zginających w belkach ciągłych. Żadne z wymienionych norm nie uwzględniają jednak tego zjawiska w analizie nośności, stąd temat redystrybucji momentów wydaje się bardzo istotny do szerszej analizy i podjęcia badań doświadczalnych, które są tematem planu badawczego realizowanego w Katedrze Budownictwa Betonowego Politechniki Łódzkiej.

### Baza danych doświadczalnych

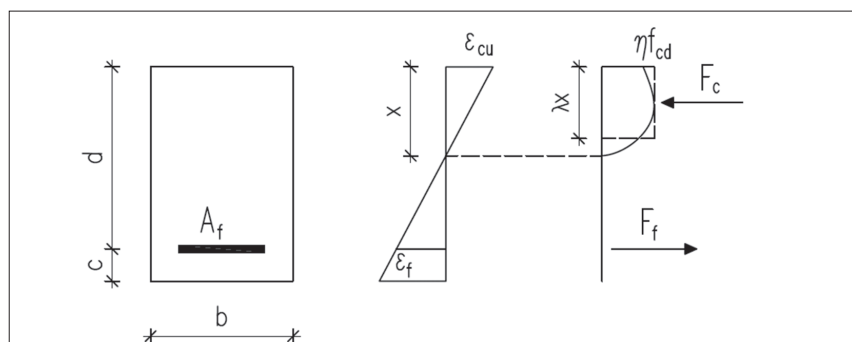
Podstawą analizy obliczeniowej jest program badawczy opublikowany w pracy [1], który obejmuje dziesięć dwuprzęsłowych belek o schemacie statycznym i zbrojeniu przedstawionym na rys. 1 i 2. oraz parametrach materiałowych zestawionych w tab. 1. i 2. Górne i dolne zbrojenie belek zaprojektowano jako ciągłe, a strzemiona mają jednolity rozstaw na całej długości elementów (rys. 2).

### Analiza obliczeniowa

Zasadniczym celem artykułu jest porównanie wyników badań doświadczalnych z wynikami obliczeń opracowanych według wymienionych norm. W analizie obliczeniowej w oczywisty sposób nie uwzględniono żadnych współczynników bezpieczeństwa. Procedury przedstawione w *fib* Bulletin 40 [13] i normie włoskiej CNR [12] są spójne z wytycznymi Eurocode 2 [14], różnią się jedynie materiałowymi współczynnikami bezpieczeństwa, co nie jest istotne w prowadzonych rozważaniach. Normy [8, 10, 11, 13] opierają się na modyfikacji obowiązujących zaleceń dla



Rys. 2. Geometria i zbrojenie belek. Źródło: [1]



Rys. 3. Model obliczeniowy do analizy nośności na zginanie. Źródło: opracowanie własne

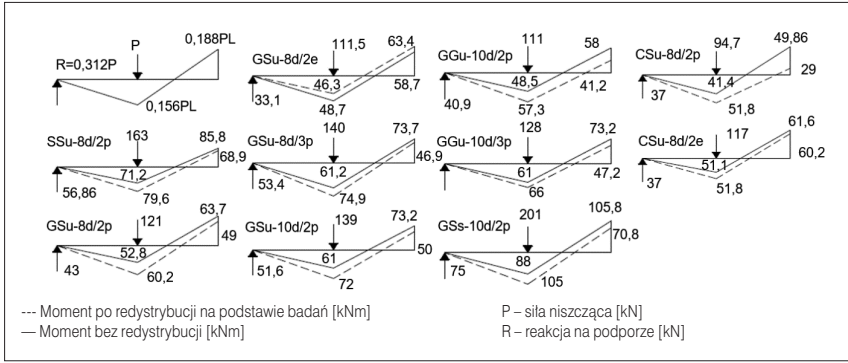
Tabela 1. Charakterystyka wytrzymałościowa zbrojenia. Źródło: [1]

Zbrojenie główne stalowe		Strzemiona stalowe		Strzemiona GFRP $\phi 9,5$	
$f_y$ [MPa]	485	$f_y$ [MPa]	300	$f_u$ [MPa]	512
$E_s$ [GPa]	200	$E_s$ [GPa]	200	$E_s$ [GPa]	45
$\varepsilon_F$ [%]	2,4	$\varepsilon_F$ [%]	1,6	$\varepsilon_F$ [%]	16
Zbrojenie główne GFRP $\phi 15,9$		Zbrojenie główne CFRP $\phi 9,5$			
$f_u$ [MPa]	731	$f_u$ [MPa]	1388		
$E_s$ [GPa]	46	$E_s$ [GPa]	116		
$\varepsilon_F$ [%]	16	$\varepsilon_F$ [%]	12		

Tabela 2. Specyfikacja elementów badawczych. Źródło: [1]

Symbol	Rodzaj zbrojenia głównego	Zbrojenie główne		Zbrojenie na ścinanie	Sposób wykończenia powierzchni	$f_{ck}$ [MPa]
		Góra	Dołem			
SSc-8d/2p	Stal	3#15,9	4#15,9	#8co120	Żebrowana	28
GSu-8d/2p	GFRP	2 $\phi 15,9$	3 $\phi 15,9$	#8co120	Posypka piaskowa	28
GSu-8d/2e		3 $\phi 15,9$	2 $\phi 15,9$	#8co120		26
GSu-8d/3p		2 $\phi 15,9$	3 $\phi 15,9$	#8co80		32
GSu-10d/2p		2 $\phi 15,9$	3 $\phi 15,9$	#10co120		33
GGu-10d/2p		2 $\phi 15,9$	3 $\phi 15,9$	Ø9,5co120		27
GGu-10d/3p		2 $\phi 15,9$	3 $\phi 15,9$	Ø9,5co80		32
GSs-10d/2p		4 $\phi 15,9$	7 $\phi 15,9$	#10co120		33
CSu-8d/2p	CFRP	2 $\phi 10$	3 $\phi 10$	#8co120	26	
CSu-8d/2e		4 $\phi 10$	3 $\phi 10$	#8co120	27	

SSc-8d/2p – pierwsza duża litera – rodzaj zbrojenia głównego (S – stal, G – GFRP C – CFRP); druga duża litera – rodzaj zbrojenia na ścinanie (S – stal, G – GFRP); trzecia mała litera – kryterium projektowania (u – stan graniczny nośności, s – stan graniczny użyteczności, c – belka ze zbrojeniem stalowym, będąca punktem odniesienia dla belek ze zbrojeniem FRP); cyfra 8 / 10 – średnica prętów zbrojenia na ścinanie; rozstaw strzemion ( $d/2=120$  mm;  $d/3=80$  mm); ostatnia mała litera (e / p – zbrojenie projektowane bez lub z redystrybucją momentów



Rys. 4. Porównanie momentów przed i po redystrybucji na podstawie badań dla połowy belki  
Źródło: [1]

Tabela 3. Zestawienie wzorów użytych do obliczeń według wybranych norm

Norma	Wzory w kolejności norm	
	Zniszczenie przez zmiążdżenie betonu ( $\rho_f > \rho_{fb}$ )	Zniszczenie przez zerwanie prętów ( $\rho_f < \rho_{fb}$ )
Fib Bulletin 40 [13]	$\rho_{fb} = \eta \lambda \frac{f_{cd}}{f_{fd}} \frac{E_f \epsilon_{cu}}{E_f \epsilon_{cu} + f_{fd}} \quad (1.1)$	
	$M_u = \eta f_{cd} b d^2 (\lambda \xi) \left(1 - \frac{\lambda \xi}{2}\right) \quad (1.2)$	$M_u = \frac{A_f f_k \gamma_f}{\gamma_f} \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \quad (1.3)$
	$M_u = \rho_f f_{fd} \left(1 - 0,5 \frac{\rho_f f_{fd}}{f_{cd}}\right) b \quad (1.4)$	Fib Bulletin 40 - wzór uproszczony
<p><math>\rho_{fb}</math> – graniczny stopień zbrojenia; <math>\eta</math> – efektywna wysokość strefy ściskanej; <math>\lambda</math> – efektywna wytrzymałość; <math>f_{cd}</math> – obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie; <math>f_{fd}</math> – obliczeniowa wytrzymałość zbrojenia FRP na rozciąganie; <math>E_f</math> – obliczeniowy moduł sprężystości zbrojenia FRP; <math>\epsilon_{cu}</math> – odkształcenie graniczne betonu na ściskanie; <math>M_u</math> – nośność przekroju; <math>A_f</math> – pole przekroju zbrojenia; <math>f_k</math> – charakterystyczna wytrzymałość zbrojenia FRP na rozciąganie; <math>\gamma_f</math> – częściowy współczynnik bezpieczeństwa dla zbrojenia FRP; <math>\xi</math> – względna wysokość strefy ściskanej; <math>\rho_f</math> – stopień zbrojenia przekroju; <math>b</math> – szerokość przekroju; <math>d</math> – użyteczna wysokość przekroju</p>		
ACI 440 [8]	$\rho_{fb} = 0,85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_{fu}} \frac{E_f \epsilon_{cu}}{E_f \epsilon_{cu} + f_{fu}} \quad (2.1)$	$M_n = A_f f_{fu} \left(d - \frac{\beta_1 c_b}{2}\right) \quad (2.3)$
	$M_n = \rho_f f_f \left(1 - 0,59 \frac{\rho_f f_f}{f'_c}\right) b d^2 \quad (2.2)$	
<p><math>\beta_1</math> – współczynnik zależny od wytrzymałości betonu, według ACI 318 [N1]; <math>f'_c</math> – wytrzymałość betonu na ściskanie; <math>f_{fu}</math> – obliczeniowa wytrzymałość zbrojenia FRP na rozciąganie; <math>M_n</math> – nośność przekroju; <math>c_b</math> – graniczna wysokość strefy ściskanej; <math>f_f</math> – naprężenia w zbrojeniu rozciągającym FRP</p>		
ISIS [10]	$\rho_{frpb} = \alpha_1 \beta_1 \frac{\phi_c f'_c}{\phi_f f_{frpu}} \left(\frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{frpu}}\right) \quad (3.1)$	
	$C = \alpha_1 \phi_c f'_c \beta_1 c_b b \quad (3.2)$	$C = \alpha_1 \phi_c f'_c \beta c b \quad (3.3)$
	$T = A_{frp} \phi_{frp} f_{frp} \quad (3.4)$	$T = A_{frp} \phi_{frp} \epsilon_{frpu} E_{frp} \quad (3.5)$
	$C = T \quad (3.6)$	
	$M_r = C \left(d - \frac{\beta_1 c_b}{2}\right) \quad (3.7)$	$M_r = T \left(d - \frac{\beta c}{2}\right) \quad (3.8)$
<p><math>\rho_{frpb}</math> – graniczny stopień zbrojenia; <math>\alpha_1, \beta_1</math> – współczynnik ściskanej strefy betonu; <math>\alpha_2, \beta_2</math> – współczynniki dla strefy ściskanej betonu według CSA A23.3-94; <math>\phi_c, \phi_f, \phi_{frp}</math> – współczynniki redukcji odpowiednio dla betonu i zbrojenia FRP; <math>\epsilon_{cu}</math> – wytrzymałość zbrojenia FRP na rozciąganie; <math>\epsilon_{frpu}</math> – graniczne odkształcenie zbrojenia FRP na rozciąganie; <math>C</math> – siła ściskająca w betonie; <math>T</math> – siła rozciągająca w zbrojeniu; <math>c</math> – wysokość strefy ściskanej; <math>A_{frp}</math> – pole przekroju zbrojenia; <math>M_r</math> – nośność przekroju</p>		
JSCE [11]	$\rho_{fb} = k_1 \beta \frac{f_{cd}}{f_{fud}} \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{fu}} \quad (4.1)$	
	$M_r = k_1 \beta f'_{cd} b x \left(d - \frac{\beta x}{2}\right) \quad (4.2)$	$M_n = A_f f_{fu} \left(d - \frac{\beta c_b}{2}\right) \quad (4.3)$
<p><math>k_1</math> – współczynnik redukcji wytrzymałości betonu; <math>\beta</math> – współczynnik redukcji; <math>f'_{cd}</math> – obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie; <math>f_{fud}</math> – obliczeniowa wytrzymałość zbrojenia FRP na rozciąganie; <math>\epsilon_{cu}</math> – odkształcenie graniczne betonu na ściskanie; <math>\epsilon_{fu}</math> – graniczne odkształcenie zbrojenia FRP na rozciąganie; <math>x</math> – wysokość strefy ściskanej</p>		

zbrojenia stalowego, dlatego liniowo-sprężystą charakterystykę zbrojenia FRP uwzględniono przez wprowadzenie odpowiednich współczynników redukcji materiałowych. Elementy zginane z tego typu zbrojeniem ulegają zniszczeniu na skutek zmiążdżenia betonu w strefie ściskanej lub zerwania prętów zbrojenia. Sposób zniszczenia elementu w dużej mierze zależy od stopnia zbrojenia.

Podstawowym warunkiem w obliczaniu nośności na zginanie jest określenie porównawczego stopnia zbrojenia ( $\rho_{fb}$ ) przy założonym modelu zniszczenia (rys. 3). Nośność na zginanie przy zniszczeniu poprzez zerwanie prętów określona jest warunkiem:  $\rho_f < \rho_{fb}$ , w przypadku  $\rho_f > \rho_{fb}$  modelem zniszczenia jest zmiążdżenie betonu w strefie ściskanej.

Warunek nośności dla wszystkich zaleceń normowych jest jednolity oraz opiera się na równaniach równowagi sił i momentów w przekroju przy założeniu prostokątnego rozkładu naprężeń w ściskanej strefie przekroju (rys. 3). Główne różnice w podejściach polegają na:

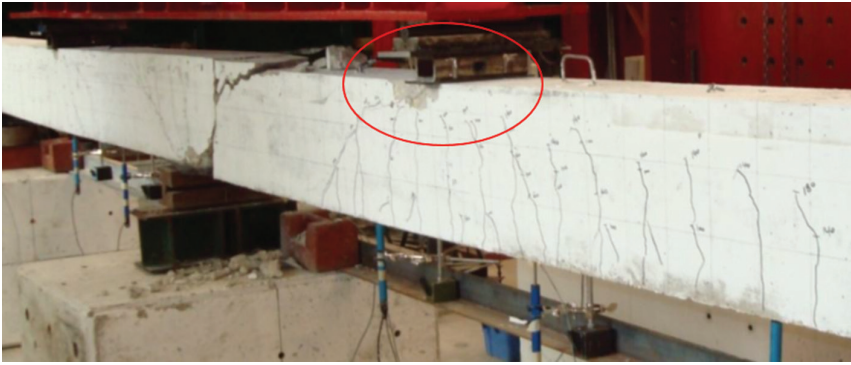
- określeniu wysokości strefy ściskanej przez wprowadzenie różnych współczynników: *fib* Bulletin 40 zaleca:  $\lambda = 0,8$ ; ACI oraz ISIS uzależnia  $\beta_1$  od wytrzymałości betonu; JSCE uzależnia  $\beta$  od granicznych odkształceń betonu;
- różnych współczynnikach redukcyjnych dla betonu: *fib* Bulletin 40: uzależnia  $\eta$  od wytrzymałości betonu; ISIS uzależnia  $\alpha_1$  od średniej wytrzymałości betonu; JSCE uzależnia  $k_1$  od wytrzymałości betonu, a ACI określa 0,85;
- różnych granicznych odkształceń betonu, które wynoszą odpowiednio dla ACI:  $\epsilon_{cu} = 0,003$ ; JSCE:  $\epsilon_{cu}$  zależy od wytrzymałości betonu; dla pozostałych norm:  $\epsilon_{cu} = 0,0035$ .

Procedury obliczeniowe dla omawianych norm zestawiono w tab. 3.

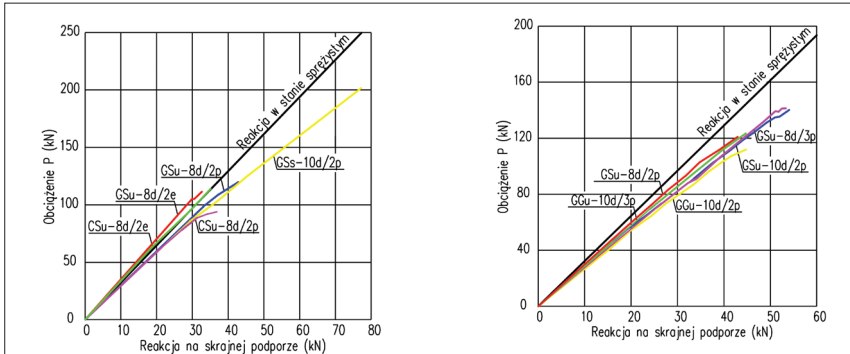
### Analiza wyników badań doświadczalnych

Elementy badawcze opisane w pracy [1] zaprojektowano według normy CSA S806-02 [9] z warunku jednakowej nośności  $P_u = 125$  kN. Celem badań była analiza wpływu następujących parametrów zmiennych na zachowanie elementów pod obciążeniem oraz ich nośność: rodzaj zbrojenia kompozytowego (GFRP / CFRP), stopień zbrojenia podłużnego w przęśle oraz nad podporą, rozstaw i rodzaj strzemion (stal / FRP) oraz ich średnica.

Wielkość redystrybucji momentu w publikacji [1] uzyskano poprzez porównanie momentów otrzymanych z badań i wartości momentów w zakresie sprężystym zachowania belki. We wszystkich belkach z planowaną redystrybucją 20% osiągnięto redystrybucję na wyższych niż planowany poziomach równych: 23%, 36%, 32%, 29%, 30%, 42%, odpowiednio dla belek GSu-8d/2p, GSu-8d/3p, GSu-



Rys. 5. Belka GSu-8d/2p ze wskazanym miejscem zniszczenia poprzez zmiążdżenie betonu. Źródło: [1]



Rys. 6. Redystrybucja momentów w elementach badawczych: a) seria I; b) seria II. Źródło: [1]

-10d/2p, GGu-10d/2p, GGu-10d/3p oraz CSu-8d/2 (tab. 4., rys. 6.). W belce GSu-8d/3p, identycznie zbrojonej na zginanie jak belka GSu-8d/2p, ale o większym stopniu zbrojenia poprzecznego poziom redystrybucji wzrósł do 36% z uwagi na pozytywny efekt większego skrępowania belki. Przykład zniszczenia belki GSu-8d/2p przedstawiono na rys. 5.

Zamiana zbrojenia poprzecznego ze stalowego na szklane (GFRP) w belkach GGu-10d/2p i GGu-10d/3p, przy tym samym rozstawie strzemion co w belkach GSu-8d/2p i GSu-8d/3p, wpłynęła korzystnie na wzrost redystrybucji momentów do poziomu 29% w belce o rozstawie strzemion 120 mm oraz spadek z 36% do 30% w belce o rozstawie 80 mm (tab. 4., rys. 6.).

Bardzo wysoki poziom redystrybucji 42% w belce CSu-8d/2p był spowodowany utratą przyczepności zbrojenia do betonu w przekroju nad podporą środkową, co skutkowało 58% spadkiem nośności belki w porównaniu z wartością oczekiwaną (tab. 5.).

W dwóch belkach: GSu-8d/2e i CSu-8d/2e z planowanym brakiem redystrybucji doszło do odwrotnej redystrybucji z przęsła do podpory w belce GSu-8d/2e, co odpowiadało poziomowi redystrybucji 8% oraz bardzo niskiej redystrybucji w belce CSu-8d/2e na poziomie zaledwie 2%, ale z podpory do przęsła (tab. 4., rys. 6.).

### Wyniki obliczeń według wybranych norm

W analizie obliczeniowej uwzględniono osiem z dziewięciu zbadanych elementów,

ponieważ w opisie belki GGu-10d/2p nie zamieszczono informacji o położeniu drugiej warstwy zbrojenia podłużnego w przekroju (rys. 2.).

Wszystkie zalecenia normowe do projektowania konstrukcji betonowych ze zbrojeniem

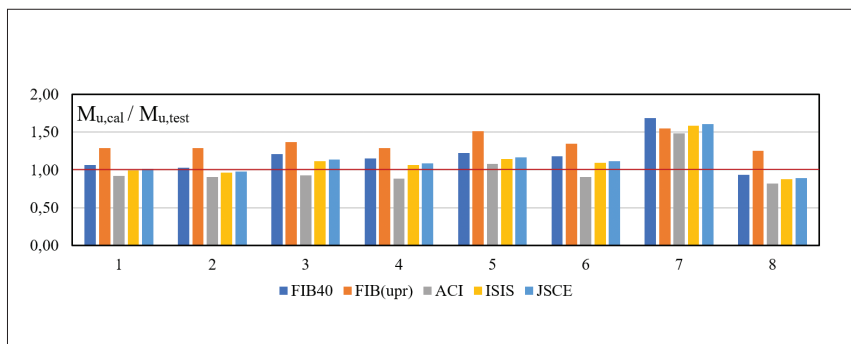
niemetalicznym [8–13] zakładają bardzo dobrą przyczepność zbrojenia FRP do betonu, co szerzej opisano w badaniach przyczepności [15]. Utrata przyczepności następuje poprzez ścięcie nawiniętej wiązki włókien lub posypki piaskowej na powierzchni prętów. Badania przyczepności zbrojenia GFRP zrealizowane w Katedrze Budownictwa Betonowego Politechniki Łódzkiej [15] wykazały, że przyczepność prętów zbrojenia do betonu zazwyczaj maleje wraz ze wzrostem średnicy pręta GFRP, a nadrzędny wpływ na tę przyczepność ma sposób wykończenia powierzchni. Pręty z posypką piaskową (*sand covered*) wykazują znacznie lepszą przyczepność niż pręty ze spiralną nawijką włókien (*parallel ribs winding*).

Zestawienie wyników obliczeniowych nośności na zginanie według wybranych norm wraz z wynikami badań zamieszczono w tab. 5. Moment niszczący określono na podstawie położenia miejsca zniszczenia opisanego w badaniach doświadczalnych. W przypadku jednoczesnego zniszczenia w przęśle i nad podporą przyjęto nośność przekroju dla niższego stopnia zbrojenia. Z uwagi na brak zapisów normowych dotyczących redystrybucji momentów w elementach zbrojonych prętami FRP nie uwzględniono tego zjawiska w analizach obliczeniowych. Zagadnienie redystrybucji momentów w elementach wieloprzęsłowych powinno być uwzględniane w obliczeniach z uwagi na bezpieczeństwo konstrukcji związane z przeszacowaniem nośności na zginanie przy stosowaniu uproszczonych mo-

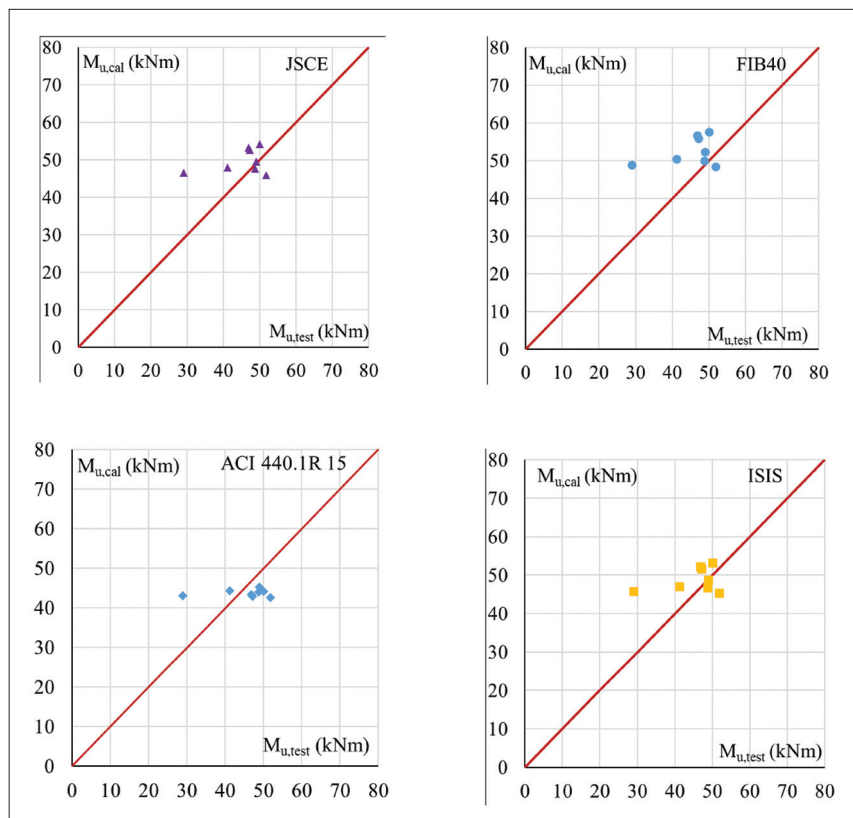
Tabela 4. Zestawienie redystrybucji momentów w przęśle i nad podporą. Źródło: [1]

		Momenty			
		przęsło		podpora środkowa	
		wartość	% redystrybucji	wartość	% redystrybucji
GSu-8d/2p	A	52,8		63,7	23%
	B	60,2	14%	49	
GSu-8d/2e	A	48,7		58,7	-8%
	B	46,3	-5%	63,4	
GSu-8d/3p	A	61,2		73,7	36%
	B	74,9	22%	46,9	
GSu-10d/2p	A	61		73,2	32%
	B	72	18%	50	
GGu-10d/2p	A	48,5		58	29%
	B	57,3	18%	41,2	
GGu-10d/3p	A	56		67,4	30%
	B	66	18%	47,2	
CSu-8d/2p	A	41,4		49,86	42%
	B	51,8	25%	29	
CSu-8d/2e	A	51,1		61,6	2%
	B	51,8	1%	60,2	

Redystrybucja: wartość dodatnia – redystrybucja momentu z podpory środkowej do przęsła; wartość ujemna – redystrybucja z przęsła do podpory.  
A – wartość przed redystrybucją; B – wartość po redystrybucji



Rys. 7. Wyniki analizy obliczeniowej ( $M_{u,cal} / M_{u,test}$ ) według wybranych norm Oś pozioma – numery elementów według tabeli 5. Źródło: opracowanie własne



Rys. 8. Zestawienie nośności obliczeniowej i doświadczalnej według wybranych norm Źródło: opracowanie własne

Tabela 5. Wyniki analizy obliczeniowej  $M_{u,cal} / M_{u,test}$  według wybranych norm Źródło: opracowanie własne

Lp.	Symbol	FIB40	FIB(upr)	ACI	ISIS	JSCE
		[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
1	GSu-8d/2p	1,07	1,29	0,92	0,99	1,01
2	GSu-8d/2e	1,03	1,29	0,90	0,96	0,98
3	GSu-8d/3p	1,21	1,37	0,93	1,12	1,14
4	GSu-10d/2p	1,15	1,29	0,88	1,06	1,08
5	GGu-10d/2p	1,23	1,52	1,08	1,14	1,16
6	GGu-10d/3p	1,18	1,35	0,91	1,09	1,11
7	CSu-8d/2p	1,69	1,55	1,48	1,58	1,61
8	CSu-8d/2e	0,93	1,25	0,82	0,87	0,89
	mediana	1,17	1,32	0,91	1,08	1,10
	średnia	1,19	1,36	0,99	1,10	1,12
	odchylenie	0,23	0,11	0,21	0,21	0,22

deli normowych, a w szczególności w przypadku elementów, w których dochodzi do wyraźnej redystrybucji momentów.

Procedura obliczania nośności na zginanie proponowana w ACI [8] jest jedną z najbardziej zachowawczych w porównaniu z pozostałymi normami. Nośność elementu została przeszacowana tylko w przypadku dwóch elementów. Wyniki obliczeniowej nośności wg ACI wykazały medianę  $M_{u,cal} / M_{u,test}$  dla prawie wszystkich elementów niższą niż 1 (tab. 5.). Wyniki nośności obliczonej na podstawie fib Bulletin 40 [13] wykazały najmniej zachowawcze podejście (najwyższa mediana  $M_{u,cal} / M_{u,test} = 1,17$ , tab. 5.). Dodatkowo, zgodnie z zapisem fib Bulletin 40, przy założeniu stopnia zbrojenia wyższego niż graniczny (model zniszczenia poprzez zmiążdżenie betonu) można skorzystać z uproszczonego wzoru, który zalecany jest raczej do szacowania nośności niż obliczania jej rzeczywistej wartości (wzór 1.4, tab. 3.). Podejście uproszczone zawiąza bowiem nośność znacznie bardziej niż podejście uogólnione (wzory 1.1–1.3, tab. 3.).

Normy: japońska JSCE [11] i kanadyjska ISIS [10] dają bardzo zbliżone wyniki (mediana  $M_{u,cal} / M_{u,test} = 1,10$  oraz 1,08 odpowiednio dla JSCE i ISIS). Wyniki nośności obliczone według obu norm wykazują najwyższy poziom zgodności z wynikami z badań (tab. 5., rys. 7., rys. 8.). Z porównania wartości nośności obliczeniowych i doświadczalnych według wymienionych norm przedstawionych na rys. 7. wynika, że norma ACI zaniża te wartości. Warto zwrócić uwagę, że wyniki obliczeń nośności według norm fib Bulletin 40, ISCE, ISIS są do siebie zbliżone i znacznie bardziej odpowiadają wynikom z badań niż wyniki obliczeń według normy ACI (rys. 7., rys. 8.).

### Podsumowanie i wnioski

Aby wysnuć konstruktywne wnioski z przeprowadzonej w artykule analizy, należy podkreślić, że liczba publikacji w prezentowanym temacie jest bardzo mała, dlatego próbę analizy obliczeniowej wykonano na podstawie jednej publikacji, w której zaprezentowano najbardziej precyzyjne wyniki. Badania wykazały, że redystrybucja momentów w elementach dwuprzęsłowych ze zbrojeniem niemetalicznym jest możliwa i w szczególnych przypadkach może osiągnąć znaczące wartości. Obowiązujące normy do projektowania konstrukcji z betonu ze zbrojeniem FRP nie uwzględniają redystrybucji momentów, a uproszczone procedury nie zapewniają odpowiedniego stopnia bezpieczeństwa konstrukcji. Badania [1] wykazały, że redystrybucja momentów znacząco wpływa na model zniszczenia elementów i może w niektórych przypadkach prowadzić do zmiany sposobu zniszczenia wobec oczekiwanego. Redystrybucja momentów w belkach zbrojonych prętami FRP jest niższa niż w elementach żelbetowych i rozwija się po zarysowaniu lub postę-

puje nagle po utracie przyczepności zbrojenia do betonu, co jednak nie jest akceptowalnym sposobem zniszczenia.

Utrata przyczepności zbrojenia może bowiem znacząco zwiększyć redystrybucję momentów i doprowadzić do niesygnalizowanego zniszczenia.

Uwzględnienie redystrybucji momentów przy projektowaniu zbrojenia prowadzi do zwiększenia nośności, a tym samym bardziej ekonomicznego zbrojenia przekrojów. Na podstawie zaprezentowanej w pracy analizy obliczeniowej potwierdzono, że najbardziej zachowawcze podejście prezentuje norma ACI, podczas gdy podejście uproszczone według *fib* Bulletin 40 zdecydowanie zawyża nośność elementów i może być stosowane raczej do szacowania stopnia zbrojenia niż właściwego projektowania.

Zalecenia *fib* Bulletin 40, ISCE, ISIS dają wartości najbardziej zbliżone do wyników badawczych, przy czym najwyższy poziom zgodności prezentuje norma ISIS. Uwzględniając wszystkie współczynniki bezpieczeństwa po stronie materiałów oraz obciążeń, poziom bezpieczeństwa znacząco różnie i mieści się w wymaganym zakresie. Biorąc jednak pod uwagę względy ekonomiczne, należy uwzględnić redystrybucję momentów w elementach wieloprzęsłowych, przyjmując bezpieczny jej poziom.

Analiza obliczeniowa przeprowadzona na podstawie badań [1] ma ograniczone zastosowanie z uwagi na zbyt dużą liczbę parametrów zmiennych, co znacząco utrudnia wyciągnięcie jednoznacznych wniosków dotyczących wpływu poszczególnych parametrów na nośność elementów. Przedstawione wnioski stanowią dużą motywację do podjęcia własnych badań w tym zakresie. Aby wykluczyć dodatkowy problem związany z poprzecznym skrępowaniem elementów belkowych i jego wpływem na poziom redystrybucji momentów, badania prowadzone w Katedrze Budownictwa Betonowego Politechniki Łódzkiej będą obejmowały dwuprzęsłowe płyty zbrojone prętami FRP i tradycyjnym zbrojeniem stalowym.

## Bibliografia

- [1] M. El-Mogy, Behaviour of Continuous Concrete Beams Reinforced with FRP Bars. PhD. Thesis, Department of Civil Engineering University of Manitoba Winnipeg, Manitoba, Canada, 2011.
- [2] Mostofinejad D., Ductility and Moment Redistribution in Continuous FRP Reinforced Concrete Beams. PhD. Thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, Carleton University, Ottawa, ON, Canada, 1997.
- [3] Habeeb, M.N. and Ashour, A.F., Flexural Behavior of Continuous GFRP Reinforced Concrete Beams. „Journal of Composites for Construction Journal”, Vol. 12, no. 2, pp. 115–124, 2008, doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0268(2008)12:2(115).
- [4] S.M. Hasanur Rahman, K. Mahmoud, E. el-Salakawy, Moment Redistribution of GFRP-RC Continuous T-beams. Resilient Infrastructure, Canadian Society for Civil Engineering Conference, London 2016, pp. 895–1.
- [5] N. Baša, N. Koptivoć-Vuković, M. Ulićević and M. Muhadinović, Effects of Internal Force Redistribution on the Limit States of Continuous Beams with GFRP Reinforcement, Applied Science 10, no. 11: 3973, 2020, doi.org/10.3390/app10113973.
- [6] S.M. Hasanur Rahman, K. Mahmoud, E. el-Salakawy, Moment redistribution in glass fiber reinforced polymer-reinforced concrete continuous beams subjected to unsymmetrical loading, Engineering Structures, Vol. 150, pp. 562–572, 2017, doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.07.066.
- [7] N. Baša, M. Ulićević, R. Zejak, Experimental research of continuous concrete beams with GFRP reinforcement. Advances in Civil Engineering, vol. 2018, Article ID 6532723, doi.org/10.1155/2018/6532723.
- [8] ACI 440.1R-15 Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars, 2015.
- [9] CSA S806-12: Design and construction of building structures with fibre reinforced polymers. Canadian Standards Association (CSA), 2012.
- [10] ISIS-M03-07 Reinforcing concrete structures with fiber reinforced polymers. Canadian network of centers of excellence on intelligent sensing for innovative structures. Univ. of Winnipeg, Winnipeg, 2007.
- [11] Japan Society of Civil Engineers Recommendation for design and construction of concrete structures using continuous fiber reinforcing materials. Concrete Engineering Series JSCE, no. 23, 325, 1997.
- [12] CNR-DT-203/2006 CNR Advisory Committee on Technical Recommendations for Construction. Guide for the design and construction of concrete structures reinforced with fiber-reinforced polymer bars. Rome, 2006.
- [13] FIB Task Group 9.3, FRP reinforcement in RC structures, Bulletin 40, 2007, p. 160.
- [14] PN-EN 1992, 2008, Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu – Część 1: Reguly ogólne i reguly dla budynków.
- [15] D. Szczeczek, R. Kotynia, Beam bond tests of GFRP and steel reinforcement to concrete, December 2018, Archives of Civil Engineering, Vol. 64, pp. 243–256, 2018. doi:10.2478/ace-2018-0072.

DOI: 10.5604/01.3001.0014.8389

## PRAWIDŁOWY SPOSÓB CYTOWANIA

Kotynia Renata, Szczepański Konrad, 2021, Analiza obliczeniowa dwuprzęsłowych belek betonowych zbrojonych prętami FRP według wybranych norm, „Builder” 5 (286). DOI: 10.5604/01.3001.0014.8389

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono obliczeniową analizę nośności dwuprzęsłowych belek ze zbrojeniem kompozytowym z włókien

szklanych i węglowych (Glass Fiber Reinforced Polymer – GFRP; Carbon Fiber Reinforced Polymer – CFRP) opracowaną na podstawie wybranych wytycznych normowych: *Fib* Bulletin 40, japońskiej – JSCE, amerykańskiej – ACI 440 oraz kanadyjskiej – ISIS z wynikami wybranych badań doświadczalnych. Głównym celem pracy jest określenie wpływu redystrybucji momentów przy obliczaniu nośności belek dwuprzęsłowych. Wyniki uproszczonej analizy obliczeniowej (bez wpływu redystrybucji momentów) pozwoliły porównać różne podejścia normowe oraz określić poziom zgodności wyników obliczeniowych z wynikami doświadczalnymi. W ten sposób można oszacować zakres bezpieczeństwa nośności na zginanie określony wpływem redystrybucji momentów względem wyników badań doświadczalnych.

**Słowa kluczowe:** nośność na zginanie, belki dwuprzęsłowe, zbrojenie FRP, redystrybucja momentów

**Abstract. CALCULATED ANALYSIS OF DOUBLE-SPAN CONCRETE BEAMS REINFORCED WITH FRP REINFORCEMENT ACCORDING TO SELECTED STANDARDS.** This paper presents a comparative analysis of the design load carrying capacity of double-span beams reinforced with Glass Fiber Reinforced Polymer (GFRP) and Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) bars developed on the basis of selected guidelines: *fib* Bulletin 40, Japanese - JSCE, American - ACI 440 and Canadian - ISIS. The main purpose of this paper is to determine the effect of bending moments redistribution on the flexural strength of double-span beams [1]. The results of the calculated analysis made it possible to compare different standard approaches and to determine a level of agreement between calculated and experimental results on the simplified method (without the influence of moment redistribution). In this way, a safety range of the bending resistance determined by the influence of the moment redistribution can be estimated.

**Keywords:** flexural capacity, double-span beams, FRP reinforcement, bending moments