Biuletyn WAT
Vol. LXII, Nr 4, 2013

Równania transportu dla amplitud fal elektromagnetycznych w nieliniowych izotropowych dielektrykach

WŁODZIMIERZ DOMAŃSKI[1], MARTA LIPIŃSKA[2]

Wojskowa Akademia Techniczna, [1]Wydział Cybernetyki, Instytut Matematyki i Kryptologii,
[2]Wydział Elektroniki, 00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2,
wdomanski@wat.edu.pl, marta.k.lipinska@gmail.com

Streszczenie. W pracy zanalizowano problem propagacji słabonieliniowych płaskich fal elektromagnetycznych w nieliniowych, izotropowych dielektrykach. Stosując metodę słabonieliniowej asymptotyki, wyprowadzono kwadratowo-nieliniowe równania transportu dla amplitud tych fal. Wykazano, że warunkiem uzyskania kwadratowo-nieliniowych równań transportu dla fal elektromagnetycznych w nieliniowym izotropowym dielektryku jest nieznikanie składowej poprzecznej pola elektrycznego w stanie początkowym. Obliczono explicite współczynnik samooddziaływania fal występujący w tych równaniach transportu. Wynik zilustrowano na przykładzie ośrodka Kerra.
Słowa kluczowe: propagacja fal elektromagnetycznych, nieliniowe izotropowe dielektryki, słabonieliniowa asymptotyka, kwadratowo-nieliniowe równania transportu

1. Wstęp

Fale elektromagnetyczne mają ogromne zastosowanie w nauce oraz technice, zarówno tej cywilnej, jak i wojskowej. Ich wykorzystanie stało się możliwe dzięki teorii stworzonej przez Maxwella [1]. Prace takich uczonych jak Oersted, Ampère, Gauss czy Faraday doprowadziły Jamesa Clerka Maxwella w latach 1854-1864 do opracowania teorii pola elektromagnetycznego i sformułowania słynnych równań*

* Współczesną postać równań Maxwella podał Oliver Heaviside [2], który wyraził je jako pierwszy w języku analizy wektorowej. Oryginalne równania Maxwella w [1] były zapisane za pomocą rachunku kwaternionów.

rządzących makroskopową elektrodynamiką. Po opublikowaniu książki Maxwella [1] nastąpił bujny rozwój zastosowań teorii elektromagnetyzmu. Radio, telegraf, telefon, radar, telewizor czy laser to tylko niektóre przykłady urządzeń, które powstały z wykorzystaniem tej teorii. Fale elektromagnetyczne służą nie tylko do przesyłania informacji, lecz także na przykład do uzyskania wiadomości o wewnętrznej strukturze obiektu poddanego ich działaniu. Wykorzystywane w medycynie rezonans magnetyczny czy tomografia komputerowa są przykładami takiego właśnie ich użycia. Zakres wykorzystania makroskopowej teorii fal elektromagnetycznych rozciąga się od kilkudziesięciu Hertzów do aż 10^{17} Hz w przypadku promieni Roentgena. Odpowiada to długościom fal od 10^7 metra aż do 10^{-9} metra.

Podstawy teorii propagacji fal elektromagnetycznych w nieliniowych ośrodkach pod nazwą „Nieliniowa optyka" przedstawione są np. w podręcznikach [3-5]. W książkach tych zaprezentowane są różne aspekty zagadnienia rozprzestrzeniania się fal w nieliniowych materiałach, w szczególności np. generacja drugiej harmoniki, rezonansowe oddziaływanie fal itd.

W naszej pracy koncentrujemy się na wyprowadzeniu równań transportu dla amplitud fal elektromagnetycznych propagujących się w nieliniowych, izotropowych dielektrykach. Na ogół równania te charakteryzują się sześcienną nieliniowością. Oryginalnym rezultatem pracy jest znalezienie warunków na dane początkowe, przy których otrzymujemy kwadratowo-nieliniowe równania transportu dla amplitud tych fal. Warunki te są sformułowane w twierdzeniu 1.

Układ pracy jest następujący: po wstępie prezentujemy równania Maxwella dla nieliniowych dielektryków zapisane w postaci quasi-liniowego układu równań cząstkowych pierwszego rzędu. W części trzeciej wyprowadzamy równania dla fal płaskich, a następnie, w części czwartej, obliczamy prędkości fazowe tych fal (wartości własne macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{u})$) i ich polaryzacje (wektory własne tej macierzy). Część piąta zawiera szczegółowe przedstawienie metody słabonieliniowej asymptotyki oraz wyprowadzenie kwadratowo-nieliniowych równań transportu. Na zakończenie tej części sformułowany jest główny rezultat pracy w postaci twierdzenia 1. Rozstrzyga ono, dla jakich stanów początkowych istnieją kwadratowo-nieliniowe równania transportu dla quasi-poprzecznych fal elektromagnetycznych w nieliniowych izotropowych dielektrykach.

2. Równania Maxwella dla nieliniowych dielektryków

Rozważmy równania Maxwella (por. [6]):

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}, \qquad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \tag{2}$$

gdzie wektory **D**, **B**, **E** i **H** oznaczają odpowiednio wektory indukcji elektrycznej i magnetycznej oraz wektory natężenia pola elektrycznego i magnetycznego.

Nietrudno jest pokazać, że jeżeli warunki (2) są spełnione w pewnej chwili czasu $t = t_0$, to są one także spełnione w dowolnej chwili czasu $t > t_0$, będziemy więc traktować te warunki jako ograniczenia na dane początkowe. Ponieważ interesuje nas propagacja fal elektromagnetycznych w nieliniowych dielektrykach, zasadniczymi równaniami do ich opisu będą równania (1) uzupełnione poprzez związki konstytutywne dla *nieliniowych dielektryków*:

$$\mathbf{D} = \in \mathcal{E}(\mathbf{E})\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{3}$$

gdzie $\mathcal{E}(\mathbf{E})$ jest funkcją klasy C^2, a $\in$ oraz μ są stałe.
Po wstawieniu relacji (3) do (1), uwzględniając, że

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \in \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial E_j} \frac{\partial E_j}{\partial t} \mathbf{E} + \in \mathcal{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

oraz

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

otrzymujemy równania, przy pomocy których możemy zapisać równania Maxwella (1) w jednolitej postaci quasi-liniowego układu równań cząstkowych pierwszego rzędu

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = 0, \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{u}(t, \boldsymbol{x}) = [\mathbf{E}(t, \boldsymbol{x}), \mathbf{H}(t, \boldsymbol{x})]^T$.

Macierz $\mathbf{A}_0$ ma następującą postać

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \in \mathcal{E}(\mathbf{u}) & 0 \\ 0 & \mu\mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_1} E_1 + \varepsilon & \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_2} E_1 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_3} E_1 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_1} E_2 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_2} E_2 + \varepsilon & \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_3} E_2 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_1} E_3 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_2} E_3 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial E_3} E_3 + \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Natomiast macierze $\mathbf{A}_j$ mają postać:

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{K}_j \\ \mathbf{K}_j^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

gdzie

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Elektromagnetyczne fale płaskie

Interesuje nas propagacja fal płaskich. W idealnym jednorodnym i izotropowym dielektryku nie występują swobodne ładunki, a parametry elektryczne nie zależą od współrzędnych punktu obserwacji. Można wówczas znaleźć rozwiązanie równań Maxwella, które zależy wyłącznie od współrzędnej wzdłuż jednego kierunku i jest niezmienne w każdej płaszczyźnie prostopadłej do tego kierunku. Pole elektromagnetyczne odpowiadające temu rozwiązaniu nazywa się płaską falą elektromagnetyczną. Ograniczenie zagadnienia do fal płaskich pozwala na sprowadzenie analizy problemu w trzech wymiarach przestrzennych do zagadnienia jednowymiarowego określonego przez kierunek fali płaskiej. Zakładamy, że:

$$\mathbf{u}(t, x) = \mathbf{u}(t, \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, x), \tag{8}$$

gdzie $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]^T$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$, $x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3$ — kierunek propagacji fali płaskiej.

Mamy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_j} = n_j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x},$$

więc

$$\sum_{j=1}^{3}\mathbf{A}_j\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{3}\mathbf{A}_j\,n_j\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}=\mathbf{A}(\mathbf{n})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x},$$

gdzie przyjęliśmy, że

$$\mathbf{A}(\mathbf{n})=\sum_{j=1}^{3}A_j n_j. \tag{9}$$

Zatem układ równań (4) w przypadku fal płaskich sprowadza się do układu

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{u})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{A}(\mathbf{n})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}=0, \tag{10}$$

przy czym

$$\mathbf{A}(\mathbf{n})=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{K}(\mathbf{n})\\ \mathbf{K}(\mathbf{n})^T & 0\end{pmatrix}, \tag{11}$$

gdzie

$$\mathbf{K}(\mathbf{n})=\begin{pmatrix}0 & n_3 & -n_2\\ -n_3 & 0 & n_1\\ n_2 & -n_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Zakładając, że macierz $\mathbf{A}_0(\mathbf{u})$ z (5) jest nieosobliwa, możemy przekształcić układ (10) do następującej postaci:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{n})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}=0, \tag{12}$$

gdzie

$$\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{n})=\mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{A}(\mathbf{n}), \tag{13}$$

przy czym $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ jest takie jak w (11), zaś

$$\mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{u})=\begin{pmatrix}\in^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{u}) & 0\\ 0 & \mu^{-1}\mathbf{I}\end{pmatrix}. \tag{14}$$

4. Wartości i wektory własne

Policzymy teraz wartości własne λ_j macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{n})$, czyli pierwiastki równania $\det(\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{n})-\lambda_j\,\mathbf{I})=0$. Są to prędkości fal elektromagnetycznych w nieliniowym dielektryku scharakteryzowanym przez funkcję $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E})$.

Bez zmniejszania ogólności rozważań przy rozpatrywaniu ośrodka izotropowego wystarczy założyć, że wektor **n** ma postać $\mathbf{n} = [1, 0, 0]^T$. Wtedy macierz

$$\mathbf{K}(\mathbf{n}) = \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

zaś

$$\mathbf{A}(\mathbf{u},\mathbf{n}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & \in^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\mathbf{u})\mathbf{K} \\ \mu^{-1}\mathbf{K}^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ są następujące:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \tag{17}$$

oraz

$$\lambda_3 = -\frac{1}{v\sqrt{\varepsilon(\boldsymbol{E})}} = \lambda_4, \quad \lambda_5 = -\frac{\sqrt{\varepsilon + \varepsilon_{,1}E_1}}{v\sqrt{\varepsilon^2 + \sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{,j}E_j}} = \lambda_6, \tag{18}$$

gdzie $\varepsilon_{,j} = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial E_j}$, a $v = \sqrt{\in \mu}$.

Zakładamy, że $\varepsilon > 0$, $\varepsilon + \varepsilon_{,1}E_1 > 0$ oraz $\varepsilon^2 + \sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{,j}E_j > 0$. Gwarantuje to rzeczywistość wartości własnych λ_j, co implikuje hiperboliczność układu (12).

Odpowiadające wartościom własnym λ_j wektory własne $\mathbf{r}_j$ mają następującą postać:

$$\mathbf{r}_1 = [1,0,0,0,0,0]^T,$$
$$\mathbf{r}_2 = [0,0,0,1,0,0]^T,$$
$$\mathbf{r}_3 = \left[0, \mu\lambda_3\varepsilon_{,3}, -\mu\lambda_3\varepsilon_{,3}, 0, \varepsilon_{,2}, \varepsilon_{,3}\right]^T,$$
$$\mathbf{r}_4 = \left[0, \mu\lambda_4\varepsilon_{,3}, -\mu\lambda_4\varepsilon_{,3}, 0, \varepsilon_{,2}, \varepsilon_{,3}\right]^T,$$
$$\mathbf{r}_5 = \left[-v^2E_1E_2\left(\varepsilon_{,2}E_2 + \varepsilon_{,3}E_3\right), v\varepsilon^{-1}\lambda_5^{\,2}E_2, v\varepsilon^{-1}\lambda_5^{\,2}E_3, 0, -E_3\lambda_5, E_2\lambda_5\right]^T,$$
$$\mathbf{r}_6 = \left[-v^2E_1E_2\left(\varepsilon_{,2}E_2 + \varepsilon_{,3}E_3\right), v\varepsilon^{-1}\lambda_6^{\,2}E_2, v\varepsilon^{-1}\lambda_6^{\,2}E_3, 0, -E_3\lambda_6, E_2\lambda_6\right]^T.$$

Mamy więc dwie pary fal, z których jedna (z indeksami 3 i 4) jest spolaryzowana poprzecznie, a druga (z indeksami 5 i 6) quasi-poprzecznie. Zbadamy, czy fale te spełniają warunek istotnej nieliniowości Laxa (por. [7]):

$$\left[\nabla_u \lambda_j\left(u\right)\right]\cdot \mathbf{r}_j\left(u\right)\neq 0. \tag{19}$$

Oznaczając lewą stronę tej nierówności jako $\Gamma_j(u)$, mamy dla $j = 3,4$

$$\Gamma_3(u) = \Gamma_4(u) = 0 \;\; \text{dla każdego } \mathbf{u}, \tag{20}$$

natomiast dla $j = 5,6$

$$\Gamma_5(u) = \Gamma_6(u) = -\frac{\sum_{k=2}^{3} \varepsilon_{,k} E_k \left[\varepsilon\left(\varepsilon + \varepsilon_{,1} E_1\right) + \varepsilon_{,1} E_1 (\varepsilon + \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{,j} E_j) \right]}{2 \in \left(\varepsilon + \varepsilon_{,1} E_1\right)(\varepsilon + \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{,j} E_j)^2 \varepsilon}. \tag{21}$$

Zatem tylko fale oznaczone indeksami 5 i 6 mogą być istotnie nieliniowe, natomiast fale z indeksami 3 i 4 są liniowo zdegenerowane i nie spełniają warunku Laxa (por. [7]).

5. Słabonieliniowa asymptotyka

Chcemy wyprowadzić równania transportu dla amplitud fal elektromagnetycznych propagujących się w nieliniowych, izotropowych dielektrykach. W tym celu zastosujemy metodę słabonieliniowej asymptotyki [8, 9]. Zakładamy, że stały stan początkowy jest zaburzony przez falę o małej amplitudzie, propagującą się w stanie początkowym z prędkością λ. Dokonując odpowiedniego skalowania (przy pomocy małego parametru ε) w rozwinięciu asymptotycznym, uzyskamy kwadratowo-nieliniowe równania opisujące zachowanie się amplitudy tej fali. Wykażemy, że dla nieliniowych, izotropowych dielektryków warunkiem koniecznym obecności kwadratowej nieliniowości w równaniach transportu jest istnienie niezerowej poprzecznej składowej pola elektrycznego w stałym stanie początkowym.

W następnej części omówimy metodę słabonieliniowej asymptotyki.

5.1. Rozwinięcie asymptotyczne

Rozważamy następujące zagadnienie Cauchy'ego:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t} + \mathbf{A}\left(\mathbf{u}^{\varepsilon}\right)\frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^{\varepsilon}{}_{|t=0} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1(0,x), \end{gathered} \tag{22}$$

gdzie ε jest małym parametrem, wektor $\mathbf{u}^{\varepsilon} = [\mathbf{E}^{\varepsilon}\left(t,x\right), \mathbf{H}^{\varepsilon}\left(t,x\right)]^T$, $\mathbf{u}_0 = [\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0]^T =$ $= \text{const}$, a macierz $\mathbf{A}$ jest taka sama jak we wzorze (16). Zakładamy, że λ jest jedną z niezerowych wartości własnych macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)$.

Szukamy rozwiązania problemu (22) w postaci

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(t,x)=\mathbf{u}_0+\varepsilon\mathbf{u}_1(\varepsilon t,x-\lambda t)+\varepsilon^2\mathbf{u}_2(\varepsilon t,x-\lambda t)+O(\varepsilon^2), \tag{23}$$

gdzie symbol $O(\varepsilon^2)$ oznacza wyrazy rzędu co najmniej ε^2.
Zakładamy, że macierz $\mathbf{A}(\mathbf{u}^{\varepsilon})$ rozwija się w szereg Taylora wokół stałego stanu $\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}^{\varepsilon})=\mathbf{A}(\mathbf{u}_0+\varepsilon\tilde{\mathbf{u}})=\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)+\varepsilon\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}+\varepsilon^2\mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}+O(\varepsilon^2), \tag{24}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}&=\mathbf{B}(\mathbf{u}_0)\tilde{\mathbf{u}}=\nabla_u(\mathbf{A}(\mathbf{u})\tilde{\mathbf{u}})_{|u=u_0},\\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}&=\mathbf{C}(\mathbf{u}_0)\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}=\nabla_u\left[\nabla_u(\mathbf{A}(\mathbf{u})\tilde{\mathbf{u}})\tilde{\mathbf{u}}\right]_{|u=u_0}\end{aligned} \tag{25}$$

oraz

$$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{u}_1+\varepsilon\mathbf{u}_2+O(\varepsilon^2).$$

Wprowadzając nowe zmienne $\tau=\varepsilon t$ oraz $\theta=x-\lambda t$ i traktując je jako zmienne niezależne, zastosujemy metodę wieloskalowej asymptotyki. W tym celu policzymy najpierw pochodne, wyrażając je w nowych zmiennych:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t}&=\varepsilon\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}+O(\varepsilon^3)=\\ &=\varepsilon(-\lambda)\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\theta}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\tau}-\lambda\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial\theta}\right)+O(\varepsilon^3),\end{aligned} \tag{26}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+O(\varepsilon^3)=\varepsilon\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\theta}+\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial\theta}+O(\varepsilon^3). \tag{27}$$

Biorąc pod uwagę (24) oraz (27), mamy

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}^{\varepsilon})\frac{\partial\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial x}=\varepsilon\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\theta}+\varepsilon^2\left[\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial\theta}+\mathbf{B}\mathbf{u}_1\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\theta}\right]+O(\varepsilon^3),$$

zatem

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t}+\mathbf{A}(\mathbf{u}^{\varepsilon})\frac{\partial\mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial x}&=\varepsilon\left[\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)-\lambda\mathbf{I}\right]\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\theta}+\\ &+\varepsilon^2\left\{\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\tau}+\mathbf{B}\mathbf{u}_1\frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial\theta}+\left[\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)-\lambda\mathbf{I}\right]\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial\theta}\right\}+O(\varepsilon^3).\end{aligned} \tag{28}$$

5.2. Równanie transportu dla amplitud fal

Następnym krokiem jest przyrównanie do zera kolejnych wyrazów występujących przy tych samych potęgach ε we wzorze (28):

1)
$$O(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \left[\mathbf{A}(\mathbf{u}_0) - \lambda\mathbf{I}\right]\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial\theta} = 0,$$
stąd
$$\mathbf{u}_1(\tau,\theta) = \sigma(\tau,\theta)\mathbf{r}(\mathbf{u}_0), \tag{29}$$

gdzie $\mathbf{r}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{r}$ jest prawym wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)$, odpowiadającym wartości własnej λ, zaś $\sigma(\tau, \theta)$ jest szukaną amplitudą fali.

2)
$$O(\varepsilon^2) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{u}_0 - \lambda\mathbf{I})\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial\theta} = \mathcal{F}, \tag{30}$$

gdzie przez $\mathcal{F}$ oznaczyliśmy następujące wyrażenie:

$$\mathcal{F} = -\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial\tau} + \mathbf{B}\mathbf{u}_1\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial\theta}\right).$$

Z alternatywy Fredholma (por. np. [10]) wynika, że niejedorodne równanie (30) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\mathcal{F}$ jest ortogonalny do lewych wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)$, to znaczy gdy:

$$\mathbf{l}\cdot\mathcal{F} = 0, \tag{31}$$

gdzie $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{u}_0)$ jest lewym wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{u}_0)$ odpowiadającym wartości własnej λ. Zakładamy, że $\mathbf{l}\cdot\mathbf{r} = 1$.

Uwzględniając wzór (29) oraz wzór (25), mamy ze wzoru (31):

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \mathbf{l}\cdot\nabla_u\left[\mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{r}\right]\mathbf{r}_{|u=u_0}\,\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = 0,$$

skąd otrzymujemy szukane *równanie transportu* (nielepkie równanie Burgersa):

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \Gamma\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = 0, \tag{32}$$

gdzie

$$\Gamma = \Gamma(\mathbf{u}_0) = \mathbf{l}\cdot\left(\nabla_u\left[\mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{r}\right]\mathbf{r}_{|u=u_0}\right), \tag{33}$$

nazywamy współczynnikiem samooddziaływania fali.

Zbadamy teraz, czy możliwe jest, aby dla nieliniowych izotropowych dielektryków ten współczynnik był różny od zera. Wykażemy, że zależy to od postaci stałego stanu początkowego $\mathbf{u}_0 = [\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0]^T$, a dokładniej od wektora $\mathbf{E}_0$. Z uwagi na fakt, że fale z indeksami 3 i 4 są liniowo zdegenerowane (20), interesować nas będą tylko fale z indeksami 5 i 6. Rozważymy cztery stany początkowe, które pokrywają wszystkie możliwości:

a) $\mathbf{E}_0 = [0,0,0]^T = [0,\mathbf{0}]^T$,

b) $\mathbf{E}_0 = [E_{0\|},0,0]^T = [E_{0\|},\mathbf{0}]^T$,

c) $\mathbf{E}_0 = [0,E_{02},E_{03}]^T = [0,\mathbf{E}_{0\perp}]^T$,

d) $\mathbf{E}_0 = [E_{01},E_{02},E_{03}]^T = [E_{0\|},\mathbf{E}_{0\perp}]^T$,

gdzie $E_{0\|} \neq 0$ oraz $\mathbf{E}_{0\perp} \neq 0$.

W przypadku a), gdy w stanie początkowym występują wyłącznie zerowe składowe pola elektrycznego, mamy:

$$\Gamma(\mathbf{u}_0) = -\frac{\varepsilon_{,2}}{\in \varepsilon^2}\Big|_{u=u_0}.$$

W przypadku b), gdy w stanie początkowym występuje niezerowa tylko składowa podłużna pola elektrycznego, zaś składowe poprzeczne są zerowe, współczynnik samooddziaływania fal przyjmuje postać:

$$\Gamma(\mathbf{u}_0) = -\frac{\varepsilon_{,2}}{\in \varepsilon\{\varepsilon + \mathrm{E}_1\varepsilon_{,1}\}}\Big|_{u=u_0}.$$

Wiadomo, że dla ośrodka izotropowego $\varepsilon = \varepsilon\left(|\mathbf{E}|^2\right)$, skąd wynika, że $\varepsilon_{,2|u=u_0} = 0$, więc w obu przypadkach, gdy stan początkowy jest postaci a) lub b), to $\Gamma(\mathbf{u}_0) = 0$.

Obliczymy teraz explicite współczynnik $\Gamma(\mathbf{u}_0)$ w przypadkach c) i d). Dla danych początkowych postaci c), to jest gdy $\mathbf{E}_0 = [0,\mathrm{E}_{02},\mathrm{E}_{03}]^T \neq 0$, mamy dla pary fal quasi-poprzecznych

$$\Gamma(\mathbf{u}_0) = -\frac{\varepsilon_{,2}E_{02} + \varepsilon_{,3}E_{03}}{2\in\left(\varepsilon + \varepsilon_{,2}E_{02} + \varepsilon_{,3}E_{03}\right)^2}.$$

Natomiast dla danych początkowych postaci d), to jest gdy $\mathbf{E}_0 = [\mathrm{E}_{01},\mathrm{E}_{02},\mathrm{E}_{03}]^\mathrm{T} \neq 0$, analogiczny współczynnik:

$$\Gamma\left(\mathbf{u}_0\right)=-\frac{\sum_{k=2}^{3}\varepsilon_{,k}E_{0k}\left[\varepsilon\left(\varepsilon+\varepsilon_{,1}E_{01}\right)+\varepsilon_{,1}E_{01}(\varepsilon+\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{,j}E_{0j})\right]}{2\in\left(\varepsilon+\varepsilon_{,1}E_{01}\right)(\varepsilon+\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{,j}E_{0j})^2\varepsilon}.$$

Wnioskujemy stąd, że istnienie w stanie początkowym niezerowej składowej poprzecznej pola elektrycznego implikuje fakt nieznikania współczynnika $\Gamma(\mathbf{u}_0)$ występującego w równaniach transportu (32). Wniosek ten sformułujemy następująco:

Twierdzenie 1

Nielepkie równanie Burgersa (32) z kwadratową nieliniowością jest nieliniowym równaniem transportu dla amplitudy quasi-poprzecznej fali elektromagnetycznej w nieliniowym izotropowym dielektryku pod warunkiem, że w stanie początkowym przynajmniej jedna ze składowych poprzecznych pola elektrycznego jest niezerowa.

Przykład 1
Ośrodek Kerra

Rezultat przedstawiony w twierdzeniu zilustrujemy na przykładzie izotropowego ośrodka Kerra, dla którego:

$$\varepsilon\left(\left|\mathbf{E}\right|^2\right)=\mathrm{c}_0+\mathrm{c}_2\mathbf{E}\cdot\mathbf{E},$$

gdzie c_0 oraz c_2 są stałymi materiałowymi.

Zakładając stan początkowy taki jak w przypadku c), mamy:

$$\Gamma\left(\mathbf{u}_0\right)=-\frac{3\mathrm{c}_2\left|\mathbf{E}_{0\perp}\right|^2}{\in(\mathrm{c}_0+3\mathrm{c}_2\left|\mathbf{E}_{0\perp}\right|^2)^2}.$$

Natomiast gdy stan początkowy jest taki jak w przypadku d), to:

$$\Gamma\left(\mathbf{u}_0\right)=-\frac{3c_2\left|\mathbf{E}_{0\perp}\right|^2\left\{\left[c_0+c_2\left(3\mathrm{E}_{0\|}{}^2+\left|\mathbf{E}_{0\perp}\right|^2\right)\right]^2-4\mathrm{E}_{0\|}{}^2\left|\mathbf{E}_{0\perp}\right|^2\right\}}{\in\left(c_0+c_2\left|\mathbf{E}_0\right|^2\right)\left(c_0+3c_2\left|\mathbf{E}_0\right|^2\right)\left(c_0+c_2\left(3\mathrm{E}_{0\|}{}^2+\left|\mathbf{E}_{0\perp}\right|^2\right)\right)}.$$

6. Uwagi końcowe

W pracy wyprowadzono równania transportu dla amplitud quasi-poprzecznych fal elektromagnetycznych propagujących się w izotropowym nieliniowym dielektryku. W przeciwieństwie do typowej sytuacji, gdzie równania ewolucyjne dla fal quasi-poprzecznych w izotropowym ośrodku i zerowym stanie początkowym zawierają sześcienną nieliniowość, znaleźliśmy przypadki, gdzie ta nieliniowość może być kwadratowa. Wpływ na to ma stan początkowy. Wykazaliśmy, że istnienie niezerowych składowych pola elektrycznego w stanie początkowym sprawia, że współczynniki samoodziaływania fal, które występują przy członach kwadratowo-nieliniowych w równaniach transportu, stają się różne od zera.
Podobna sytuacja może mieć też miejsce, gdy zamiast ośrodka izotropowego rozważymy ośrodki anizotropowe. Taka analiza, ale w przypadku fal sprężystych dla ośrodków anizotropowych, została przeprowadzona między innymi w pracach [11], [12], gdzie wykazano, że kwadratowa nieliniowość pojawia się dla nieliniowych płaskich fal quasi-poprzecznych, gdy wybierzemy specjalny kierunek ich propagacji. Kwadratowa nieliniowość jest ściśle związana z występowaniem nieciągłości, a w szczególności powstawaniem fal uderzeniowych. Analiza tego typu zjawisk będzie tematem kolejnych prac autorów. Warto podkreślić, że w cyklu prac (Gawinecki et al. [13-15]) przedstawiono matematyczną analizę związaną z implikacjami, jakie wnosi kwadratowa nieliniowość na zachowanie fal sprężystych, w szczególności na powstawanie nieciągłości i tzw. „blow-up". Podobne zjawiska można również zaobserwować dla fal elekromagnetycznych opisanych przez równania ewolucyjne z kwadratową nieliniowością.

LITERATURA

[1] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873.

[2] O. Heaviside, *Electrical Papers*, Macmilan, London, 1892.

[3] N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, World Scientific, Singapure, 1996.

[4] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Elsevier, Boston, 2008.

[5] Y.R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*, John Wiley & Sons, New York, 2003.

[6] W. Domański, T. Jabłoński, *Resonant Interaction Coefficients for Nonlinear Electromagnetic Waves in Dielectrics and Magnetics*, in Electromagnetic Phenomena Applied to Technology, (M. Enokizono and T. Todaka eds.), Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics, Tokyo, 1996.

[7] P.D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws.* II, Comm. Pure Appl. Math. 10, 1957, 537-566.

[8] A. Majda, Nonlinear *geometric optics for hyperbolic systems of conservation laws*, [in:] Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness, IMA, 2, Springer, New York, 1986, 115-165.

[9] R.J. Diperna, A. Majda, *The validity of nonlinear geometric optics for weak solutions of conversation laws*, Comm. Math. Phys., 98, 313-347, 1985.

[10] G. Strang, Linear Algebra and Its Applications, Academic Press, Orlando, 1980.

[11] W. Domański, *Propagation and interaction of weakly nonlinear elastic plane waves in a cubic crystal*, Wave Motion, 45, 2008, 337-349.

[12] W. Domański, A.N. Norris, *Degenerate weakly non-linear elastic plane waves,* International Journal of Non-Linear Mechanics, 44, 2009, 486-493.

[13] J. Gawinecki, A. Piskorek, *On the initial-value problem in geometrically nonlinear elasticity*, Comm. Math. Phys., 98, 1985, 313-347.

[14] J. Gawinecki, A. Piskorek, D.D. Hung, *The initial-value problem innonlinear hyperelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci. Tech. Sci., 39, 1, 1991, 17- 26.

[15] J. Gawinecki, P. Kacprzyk, *Blow-up of the solution to the initial-value problem in nonlinear three-dimensional hyperelasticity*, Applicationes Mathematicae, 35, 2, 2008, 193-208.

W. DOMAŃSKI, M. LIPIŃSKA

Transport equations for the amplitudes of electromagnetic waves in nonlinear isotropic dielectrics

Abstract. Propagation of weakly nonlinear plane electromagnetic waves in nonlinear isotropic dielectrics was analyzed. Transport evolution equations for waves' amplitudes with quadratic nonlinearity were derived using the method of weakly nonlinear asymptotics. It was shown that in order to obtain quadratically nonlinear transport equations for waves' amplitudes it is necessary to have a nonzero transverse component of the electric field in the initial state. The (so called self-interaction) coefficients which appear in these equations were calculated explicitly. The result was illustrated by the example of Kerr medium.

Keywords: propagation of electromagnetic waves, nonlinear isotropic dielectrics, weakly nonlinear asymptotics, transport equations with quadratic nonlinearity