

Robert JABŁECKI¹, Volodymyr G. ZINKOVSKYY¹, Olga V. ZHUK¹ i Maksym ZHUK²

WYZNACZENIE POCZĄTKOWEJ LICZEBNOŚCI „LUDZKOŚCI WSPÓŁCZESNEJ” I MODELOWANIE DYNAMIKI JEJ PRZEJŚCIA DEMOGRAFICZNEGO

DETERMINATION OF INITIAL SIZE OF “MODERN HUMANITY” AND MODELING OF DYNAMICS OF ITS DEMOGRAPHIC TRANSITION

Abstrakt: Przedstawiono analizę szeregu wcześniej stosowanych modeli logistycznych, potęgowych itd., opisujących dynamikę liczebności populacji ludzkiej. Zaproponowane w pracy metody analizy matematycznej pozwoliły na modelowanie dynamiki przejścia demograficznego populacji ludzkiej w zakresie liczebności od 0,3 do 7 mld i określenie początkowej liczebności ludzkości oraz portretu fazowego procesu.

Słowa kluczowe: dynamika liczebności ludzkiej, portret fazowy, liczebność początkowa ludzkości, przejście demograficzne

Wzrost liczebności ludzkości w ciągu ostatnich dwóch stuleci budzi zainteresowanie naukowców, polityków i ludzi żądnych wiedzy. Badania dynamiki liczebności populacji ludzkiej obecnie są skoncentrowane na znalezieniu odpowiedzi na następujące pytania:

1. Czy wzrost liczebności ludzkości odbywa się w sposób ograniczony czy nieograniczony [1]?
2. Jeżeli wzrost ludzkiej populacji przebiega wolniej, to do jakiej (maksymalnej) wartości dąży [2, 3]?
3. Jaką liczebność osiągnie ludzkość w ciągu kolejnych lat (tj. prognoza bieżąca) [4, 5]?

Paradygmat w demografii współczesnej - teoria przejścia demograficznego [4] - nie jest matematycznie sformalizowany i dotyczy jedynie ludności pojedynczych państw, a nie całej ludzkości. W niniejszym opracowaniu przedstawiona została matematyczna analiza dynamiki liczebności ludzkości w celu oznaczenia najprostszej zależności opisującej proces przejścia demograficznego i obliczenia wyjściowej („początkowej”) liczebności populacji, która miała miejsce w momencie powstania populacji, rozwijającej się jako całość.

Dane statystyczne i wielkości od nich pochodne

Obliczenie szybkości zmiany populacji ludzkiej możliwe jest tylko na odcinkach czasu (np. t_i i t_j , $t_i > t_j$) i w wyniku tego obliczenie liczebności populacji (N_i i N_j) możliwe jest jako $(N_i - N_j)(t_i - t_j)^{-1}$. Te wielkości odniesiono do średniej geometrycznej ($N_{ij} = (N_i N_j)^{0,5}$). Odpowiednio, na odcinkach czasu $(t_i - t_j)$ szybkość zmian liczebności populacji w przeliczeniu na jednego człowieka (*per capita*) wyliczono jako $((N_i - N_j)(t_i - t_j)^{-1})N_{ij}^{-1}$.

W pracy wykorzystano statystyczne dane i wielkości pochodne przedstawione w tabeli 1. Wyjściowe dane pochodzą z [6].

¹ Samodzielna Katedra Biotechnologii i Biologii Molekularnej, Uniwersytet Opolski, ul. kard. B. Kominka 6, 45-032 Opole, tel./fax 77 401 60 48, email: olga_zhuk@uni.opole.pl

² Państwowa Medyczna Wyższa Szkoła Zawodowa w Opolu, ul. Katowicka 68, 45-060 Opole, tel. 77 441 08 82

* Praca była prezentowana podczas konferencji ECOpole'13, Jarnołtówek, 23-26.10.2013

Tabela 1

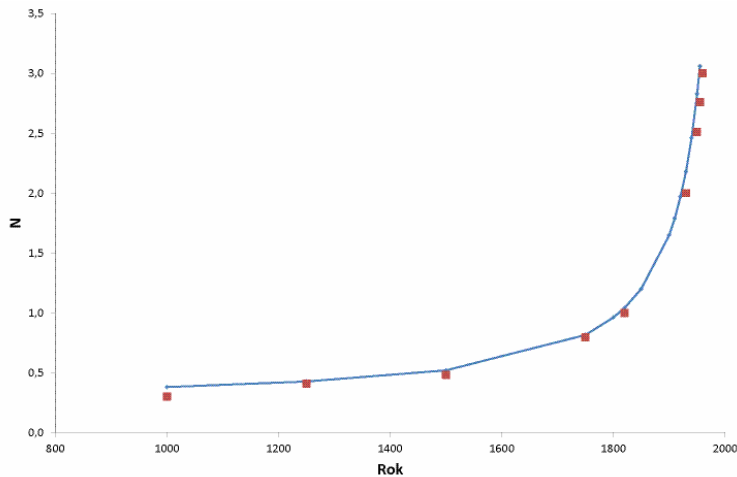
Wzrost liczebności populacji ludzkiej

Table 1

Human population growth

Rok	N [mld]	$(N_i - N_j)/(t_i - t_j)$	$(N_i \cdot N_j)^{0,5}$	$[(N_i - N_j)/(t_i - t_j)] \cdot (1/(N_i \cdot N_j)^{0,5})$
2011	7			
1999	6	0,0833	6,48	0,0129
1988	5	0,0909	5,48	0,0166
1974	4	0,0714	4,47	0,0160
1960	3	0,0714	3,46	0,0206
1950	2,51	0,0490	2,74	0,0179
1930	2	0,0255	2,24	0,0114
1820	1	0,0091	1,41	0,0064
1750	0,79	0,0029	0,89	0,0033
1500	0,48	0,0013	0,62	0,0020
1250	0,41	0,0003	0,44	0,0007
1000	0,3	0,0004	0,35	0,0012

Jak widać z rysunku 1, liczebność ludzkości monotonnie wzrasta w czasie. Próby matematycznego opisania tego procesu wydają się słuszne i zasadne.



Rys. 1. Zmiana liczebności populacji ludzkiej w czasie. Dane statystyczne zaznaczone jako punkty, linia odpowiada rozrachunkowej liczebności ludzkości obliczonej według modelu (równanie (4))

Fig. 1. Change of human population in time. Statistic data marked points and line is based on estimated overall human population using mathematical model (equation (4))

Analiza dyskryminacyjna i rozbudowanie niektórych modeli dynamiki wzrostu populacji ludzkiej

W pracach [1, 7] stwierdzono, że szybkość wzrostu liczebności populacji ludzkiej $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ rośnie wprost proporcjonalnie do kwadratu jej liczebności (N):

$$\frac{dN}{dt} = kN^2 \quad (1)$$

gdzie k - stała > 0 .

Całkując równanie (1) od czasu t_0 do t , otrzymuje się wielkości N względem $t (N_t)$:

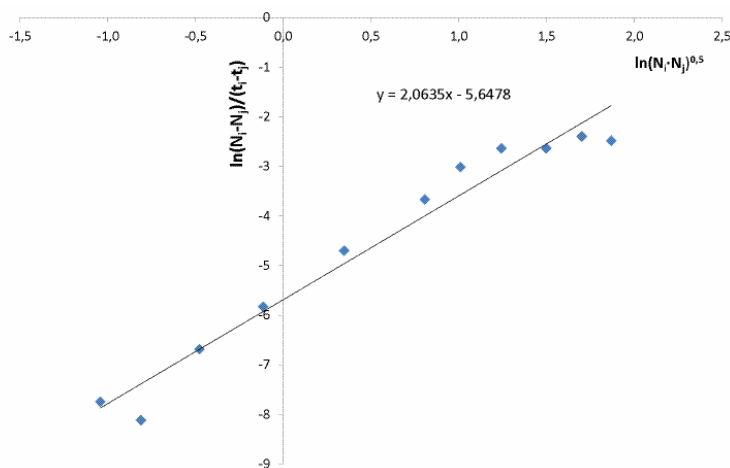
$$N_t = \frac{N_0}{1 - kN_0(t - t_0)} \quad (2)$$

gdzie: N_t i N_0 - liczebność ludzkości w momentach t i t_0 .

Z równań (1) i (2) wynika, że przy $t - t_0 = k/N_0$ funkcja (2) nie jest ciągła. Według obliczenia autorów [7] przy $t \rightarrow 2035$ r.n.e., $N_t \rightarrow \infty$, tj. ludzkość czeka „katastrofa demograficzna”.

Rzeczywiście (rys. 2) zależność logarytmów szybkości zmiany liczebności populacji od logarytmów jej liczebności może być scharakteryzowana jako liniowa, wzrastająca ze współczynnikiem kierunkowym równym $\cong 2$:

$$\ln\left(\frac{dN}{dt}\right) = 2 \ln N \quad (3)$$



Rys. 2. Zależność logarytmu szybkości zmian liczby ludności od logarytmów liczebności ludzkiej populacji

Fig. 2. Dependence of the logarithm of the rate of change of population to the logarithm of the size of the human population

Jeżeli analizowany model, zaproponowany w [7], odpowiada statystycznym danym, to:

1. Szybkość wzrostu liczebności populacji $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ jest wprost proporcjonalna do kwadratu jej liczebności (N^2) (rys. 3).
2. Szybkość (*per capita*) $\left(\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N}\right)$ ma być liniowo zależna od (N) (rys. 4).

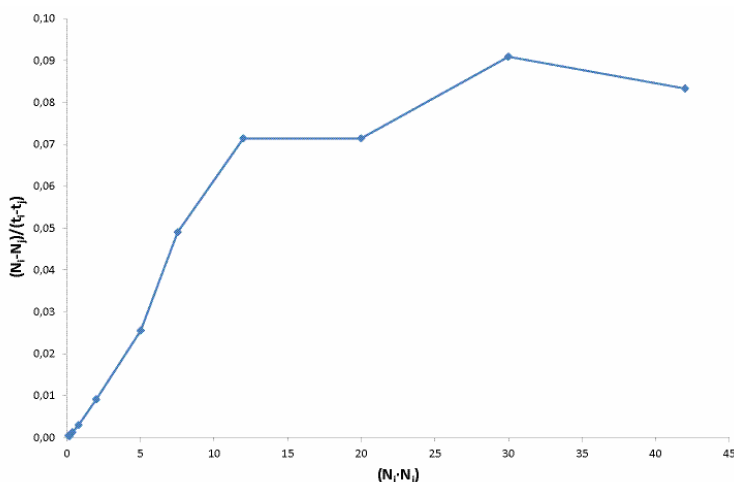
Jak widać z rysunków 3 i 4, analizowany model tylko częściowo odpowiada danym statystycznym w zakresie 1000-1960 r.n.e. Ułożenie danych statystycznych przedstawionych na rysunku 4 nie daje możliwości bezpośredniego zastosowania modeli logistycznych i równań Gombertziego do opisanania danych dynamiki populacji ludzkiej.

Model 1 wymaga szerszego sprecyzowania oraz rozbudowy. Jeżeli do opisanania dynamiki rozwoju ludzkości w zakresach od 1000 do 1960 r.n.e. przyjąć model kwadratowy, to z rysunku 4 można wnioskować, że nie odpowiada on równaniu (1).

Właściwa szybkość wzrostu ludzkiej populacji odpowiada równaniu (4) (patrz także linie regresji na rysunku 4):

$$\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} = kN - k_0 \quad (4)$$

gdzie: k_0 - stała równa $2 \cdot 10^{-3} \text{ rok}^{-1}$, k - stała równa $6,66 \cdot 10^{-3} \text{ mld}^{-1} \text{ rok}^{-1}$.



Rys. 3. Zależność tempa wzrostu liczby ludności $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ od kwadratu jej wielkości (N^2)

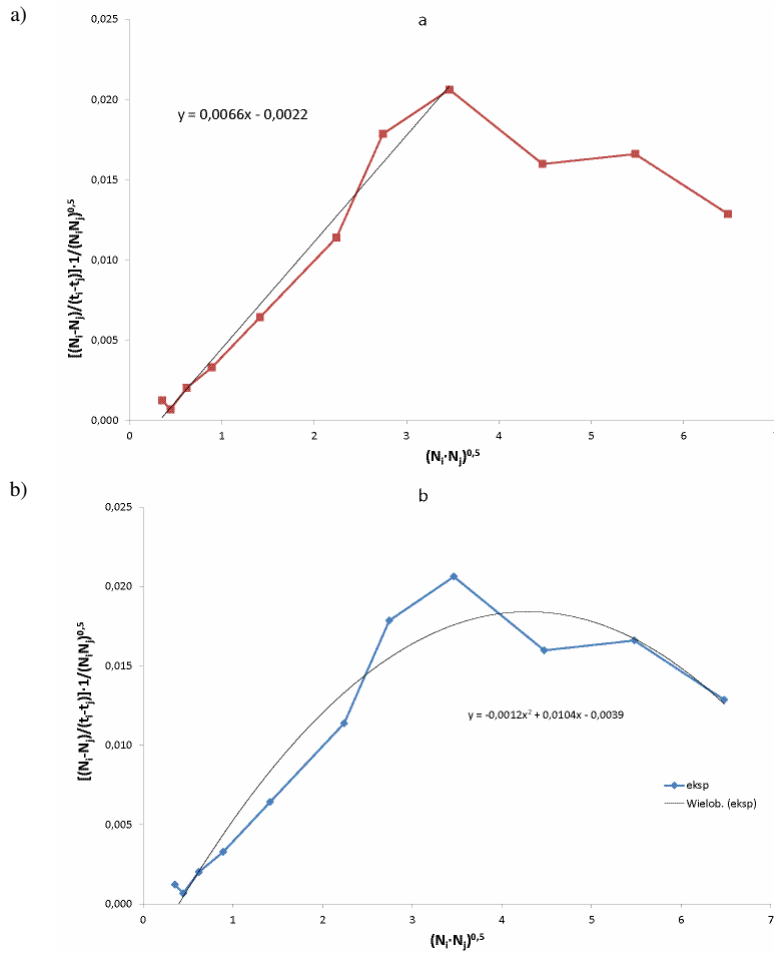
Fig. 3. Dependence of the rate of population growth $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ to the square of its size (N^2)

Wtedy przy $N_t = N_0 = k_0/k = 0,333 \text{ mld}$, $\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} = 0$.

Zgodność równania (4) ze statystycznymi danymi (tab. 1) przedstawiono na rysunku 4a. Na pokazanych fazach wzrostu populacji zgodnie z równaniem (4) znajduje się jeden niestabilny punkt [8]: przy $N_t < k_0/k$, $\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} < 0$ i N_t dąży do 0; przy $N_t > k_0/k$ wzrasta z przyspieszeniem w zakresie wartości od 0,333 do 3,5 mld. Całkowanie równania (4) po N

w zakresie jego wielkości od N_{t1} do N_{t2} (zarejestrowanych w momentach czasu t_1 i t_2) prowadzi do równania:

$$\frac{1}{k_0} \cdot \ln \left(\frac{kN_1 - k_0}{kN_1 - k_0} \cdot \frac{N_2}{N_1} \right) = t_1 - t_2 \quad (5)$$



Rys. 4. Właściwa szybkość (*per capita*) wzrostu populacji ludzkości $\left(\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} \right)$ względem jej liczebności:

a) liniowa regresja statystycznych danych w zakresie 1000-1960 r.n.e., b) nieliniowa regresja danych statystycznych w zakresie 1000-2011 r.n.e.

Fig. 4. Proper rate (*per capita*) of human population growth $\left(\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} \right)$ relative to its population size: a) linear regression statistical data for 1000-1960 A.D., b) nonlinear regression statistics for 1000-2011 A.D.

Biorąc pod uwagę $k_0/k = N_0$, możemy zapisać równanie (5) jako:

$$\frac{1}{k_0} \cdot \ln \left(\frac{N_1 - N_0}{N_1} \cdot \frac{N_2 - N_0}{N_2} \right) = t_1 - t_2 \quad (6)$$

Z równania (6) uzyskujemy równanie, które pozwala oszacować adekwatność modelu do danych statystycznych (wartość N przy różnych wartościach t):

$$N_1 = N_0 \left\{ 1 - \left[(N_2 - N_0) / N_2 \right] e^{k_0(t_1 - t_2)} \right\}^{-1} \quad (7)$$

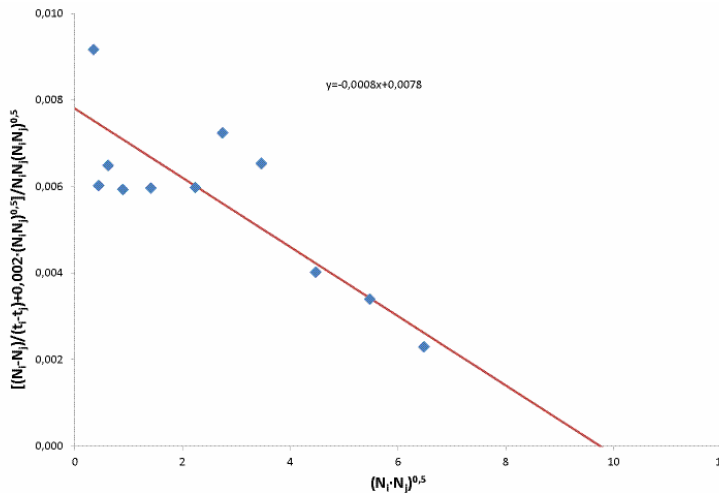
Jak widać z rysunku 1, we wskazanym zakresie czasowym model odpowiada danym statystycznym, jednak przy $t > 1960$ r.n.e. jego dokładność gwałtownie spada. „Katastrofa demograficzna” według równania (7) miałaby nastąpić w 2013 r.

Modelowanie dynamiki wzrostu populacji ludzkiej w zakresie jej liczebności od 0,3 do 7 mld

Z rysunku 4 można założyć, że zależność pomiędzy $\left(\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} \right)$ i N ma formę:

$$\left(\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} \right) = -k_0 + k_1 N - k_2 N^m \quad (8)$$

gdzie: k_2 - stała > 0 , m - stała, większa od 1 (przypuszczalnie $m = 2$).



Rys. 5. Analiza regresyjna zmiany właściwej szybkości wzrostu populacji ludności zgodnie z równaniem (9)

Fig. 5. Regression analysis of changes in specific growth rate of the population according to equation (9)

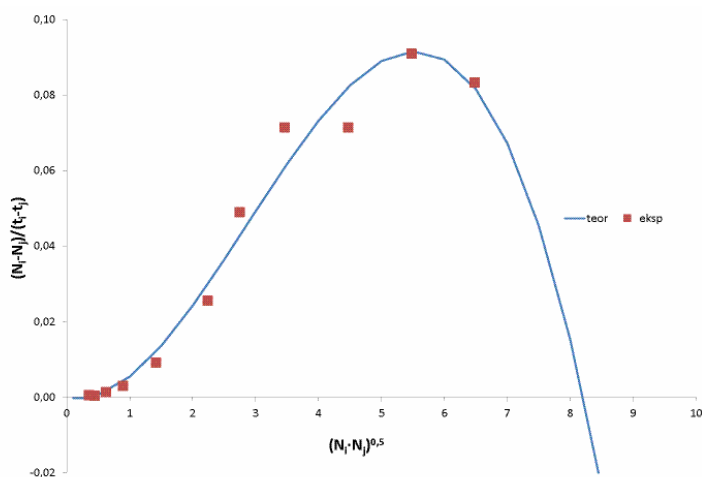
W celu uzasadnienia tego założenia przedstawiono równanie (8) w formie liniowej pod warunkiem, że $m = 2$:

$$\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} + k_0 = k_1 - k_2 N \quad (9)$$

Jak widać z rysunku 5, forma zależności odpowiada równaniu (9). Wtedy:

$$\frac{dN}{dt} = k_1 N^2 - k_0 N - k_2 N^3 \quad (10)$$

Zgodność statystycznych danych linii regresji odpowiadającej równaniu (10) przedstawiono na rysunku 6.



Rys. 6. Zależność szybkości wzrostu liczby ludności $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ od N (punkty) oraz rezultaty obliczeń szybkości według równania (10) (linia)

Fig. 6. The dependence of population growth rate $\left(\frac{dN}{dt}\right)$ of N (points) and the results of calculations according to equation (10) (line)

Parametry modeli (8)-(10)

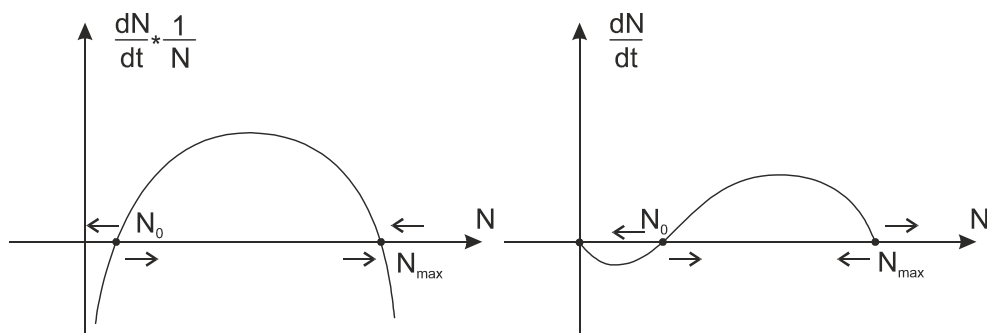
W punktach $N = N_0$ i $N = N_{max}$ (N_{max} - poszukiwana wielkość liczebności populacji, do której dąży ludzkość przy $t \rightarrow \infty$) wartości $\left(\frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N}\right)$ i $\frac{dN}{dt}$ równe są zero, to znaczy, że są to pierwiastki równań (8) i (10). Trzeci pierwiastek równania sześciennego (10) wynosi: $N = 0$. Wyznaczamy parametry równania (8) z danych statystycznych metodą najmniejszych kwadratów (rys. 4b): $k_0 = 0,0037$, $k_1 = 0,0103$, $k_2 = 0,0012$.

Obliczamy z nich: $N_0 = 0,375$ mld ludzi, $N_{max} = 8,2$ mld ludzi.

Fazowy obraz modeli (8)-(10)

Jak wynika z rysunku 7, który odtwarza formę krzywych podanych na wykresach 4 i 6, odpowiadających zależnościom (8) i (10), fazowa dynamika liczebności populacji ludzkiej ma jeden stabilny punkt (N_{max}) i jeden niestabilny (N_0).

W formie klasycznej zależność logistyczna ma niestabilny punkt $\frac{dN}{dt} = 0$ przy $N = 0$.



Rys. 7. Fazowy portret dynamiki liczebności ludzkiej populacji

Fig. 7. Phase portrait of human population dynamics

Badania ekologiczne dowodzą, że w przypadku populacji, a nawet gatunków zwierząt istotne zmniejszenie liczebności (poniżej pewnej progowej ilości) doprowadza do ich wyginięcia [9, 10]. Wskutek tego w ich fazowym ujęciu musi istnieć punkt niestabilny przy $N_0 > 0$ (jak na rys. 7). W pracy [10] punkt ten określany jest jako „nadmierny połów”. Jednak wydaje się, że liczba 0,3-0,4 mld ludzi nie może być traktowana jako „wyjściowa (początkowa) ilość”, która posłużyła za punkt startowy rozwoju (przejścia demograficznego) całej populacji ludzkiej.

Możemy przypuścić, że równanie (10), które opiera się na statystycznych danych w zakresach: $N = 0,3-7$ mld ludzi, nie uwzględnia formy krzywej dynamiki populacji ludzkiej przy małych N .

Wiarygodne okazuje się przypuszczenie o istnieniu (przy $N < N_0$) jeszcze jednego stabilnego punktu, np. na skutek włączenia do równania (10) jeszcze jednego członu. Wtedy starożytna ludzkość mogłaby możliwie długo istnieć w liczebności nieprzewyższającej 0,3 mld ludzi. Na skutek „zdarzenia nieznanego natury” N_t okazało się większe niż N_0 (albo N_0 zmniejszyło się do wielkości mniejszej od N_t) i to dało początek rozwojowi „ludzkości współczesnej”, powiększającej swoją liczebność aż do następnego stabilnego punktu $N_{max} = 8,2$ mld ludzi. W fazie przejścia demograficznego (fazie eksplozji, patrz [5]) przyrost naturalny liczebności ludzkości odbywa się nie wykładniczo ($\frac{dN_t}{dt} = N_t k$), a paraboliczne ($\frac{dN_t}{dt} = N_t(N_t k - k_0)$), co powoduje błędne tłumaczenie skutków modelowania [1, 7] i deklaracji o nadciągającej „katastrofie demograficznej”.

Literatura

- [1] Varfolomejev SD, Gurevich KG. Biokinetics, Practical Course. Moscow: Faer-Press; 1999.
- [2] Holzer JZ. Demografia. Warszawa: PZWL; 2003.
- [3] Kałuża-Kopias D, Lange M, Rossa A, Szweđa-Lewandowska Z. Przegląd metod modelowania i prognozowania umieralności. W: Analiza i modelowanie umieralności w ujęciu dynamicznym. Rossa A, redaktor. Łódź: Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego; 2011; 41-77.
- [4] Cieślak M. Demografia. Metody analizy i prognozowania. Warszawa: Wyd Nauk PWN; 1992.
- [5] Okólski M. Demografia, Podstawowe pojęcia, procesy i teorie w encyklopedycznym zarysie. Warszawa: WN Scholar; 2005.
- [6] Haub C. How many people have ever lived on Earth? Popul Today. 1995;2:4-5.
- [7] Varfolomejev SD, Gurevich KG. The hyperexponential growth of the human population on a macrohistorical scale. J Theor Biol. 2001;212(3):367-372. DOI: 10.1006/jtbi.2001.2384.
- [8] Foryś U. Matematyka w biologii. Warszawa: WNT; 2005.
- [9] Krebs CJ. Ekologia. Eksperymentalna analiza rozmieszczenia i liczebności. Warszawa: Wyd Nauk PWN; 2011.
- [10] Murray JD. Wprowadzenie do biomatematyki. Warszawa: WNT; 2006.

DETERMINATION OF INITIAL SIZE OF “MODERN HUMANITY” AND MODELING OF DYNAMICS OF ITS DEMOGRAPHIC TRANSITION

¹Independent Chair of Biotechnology and Molecular Biology, University of Opole

²Medical State High Professional School in Opole

Abstract: A number of previously used logistic, n-power and other models describing the dynamics of the human population were analyzed. The proposed methods of mathematical modeling allowed to describe demographic transition dynamics of the human population in terms of its size from 0.3 to 7 billion, and determine the initial numbers of humanity and the phase portrait of that process.

Keywords: dynamics of human population, phase portrait, initial size of humanity, demographic transition

