

ZMODYFIKOWANA METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH W ANALIZACH ENERGETYCZNYCH BUDYNKÓW

Piotr NAROWSKI

*Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Środowiska
ul. Nowowiejska 20, 00653 Warszawa, email: piotr.narowski@is.pw.edu.pl*

Streszczenie: W artykule przedstawiono metodę wyznaczania ilości ciepła do ogrzewania i chłodzenia budynku, wykorzystującą model budynku w postaci sieci przepływu ciepła z elementami gałęzi o skupionych parametrach pojemności i przewodności cieplnej. Analogia matematyczna sieci przepływu ciepła i sieci elektrycznych pozwala na zastosowanie podobnych metod rozwiązywania tych układów. W artykule opisano metodę potencjałów węzłowych oraz wskazano jej wady, które często uniemożliwiają zastosowanie tej metody do opisu sieci przepływu ciepła w budynku. W dalszej części przedstawiono modyfikację metody potencjałów węzłowych, która usuwa wykazane wady metody klasycznej, pozwalając na opis sieci przepływu ciepła w budynku z wykorzystaniem sieci z węzłami w których zadane są wartości temperatury. Przedstawiona metoda pozwala na automatyczne, komputerowe, formułowanie układu równań opisujących sieć przepływu energii w budynku umożliwiając szybkie modyfikowanie schematów modeli budynku używanych do analiz energetycznych. W przeciwieństwie do równań podanych w normie PN EN ISO 13790, opisana metoda nie wymaga wyprowadzania nowych równań opisujących uproszczony godzinowy model dynamiki cieplnej budynku. Układ równań zmodyfikowanego modelu godzinowego budynku może być automatycznie generowany na podstawie topologii schematu modelu przyjętego do obliczeń. Na końcu artykułu w dodatku przedstawiono przykładowe macierze składowe gałęzi oraz macierz główną i wektor wyrazów wolnych dla modelu 5RIC wyznaczony zmodyfikowaną metodą potencjałów węzłowych.

Słowa kluczowe: Symulacje energetyczne, teoria grafów, model parametrów skupionych, zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych.

1. WPROWADZENIE

Głównym celem analizy procesów wymiany ciepła w stanach nieustalonych jest wyznaczenie zależności pozwalających na określenie rozkładu temperatury

wewnątrz rozpatrywanego ciała, w jego bezpośrednim otoczeniu, w dowolnej chwili czasu. Charakter tych zależności wynika wyłącznie z natury zjawiska i założeń, jakie będą przyjęte do jego opisu. Jeżeli przyjmiemy, że nie interesuje nas rozkład przestrzenny temperatury wewnątrz przegrody, przez którą przenika ciepło, wówczas opis zjawiska znakomicie się upraszcza i prowadzi do metody skupionej pojemności cieplnej. Pozwala on na wyznaczenie zmiennej w czasie średniej temperatury wewnątrz przegrody, w warunkach nieustalonej wymiany ciepła z otoczeniem. Należy pamiętać o przyjętym założeniu i stosować tę metodę tylko wtedy, gdy współczynnik przewodności cieplnej wewnątrz ciała jest duży w porównaniu ze współczynnikiem przejmowania ciepła na jego powierzchni.

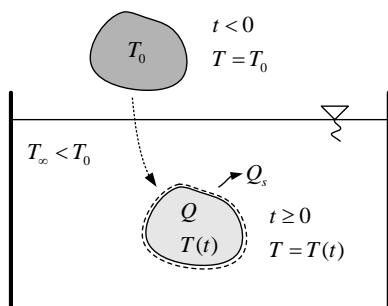
Przedstawione założenia można przyjąć w stosunku do większości budynków, przy czym, warstwy izolacji cieplnej nie zalicza się do części konstrukcyjnej o dużej pojemności cieplnej. Przyjmuje się, że współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni przegród jest mały w porównaniu ze współczynnikiem przewodności cieplnej materiałów konstrukcyjnych, co prowadzi do modelu 5RIC skupionej pojemności cieplnej całego budynku [3]. Rozbudowany model 6RIC [6] ma analog elektryczny w postaci układu połączonych ze sobą sześciu rezystorów i jednego kondensatora, w którym napięcia elektryczne odpowiadają różnicy temperatury, a prądy elektryczne strumieniom ciepła.

Rozwiązanie zagadnienia nieustalonego przepływu prądu w sieci zawierającej elementy o skupionych parametrach umożliwia wyznaczenie układu równań uproszczonej metody godzinowej, która służy do obliczania godzinowych wartości energii niezbędnej do ogrzewania albo chłodzenia budynku. Zastosowanie zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych umożliwia tworzenie zarówno prostych jak

również bardziej złożonych modeli godzinowych z uwzględnieniem dynamiki cieplnej.

2. METODA SKUPIONYCH PARAMETRÓW CIEPLNYCH

W celu przypomnienia metody skupionej pojemności cieplnej rozważa się prosty przypadek, w którym ciało doznaje nagłej zmiany parametrów cieplnych otoczenia. Przykładem, może być jak na rysunku 1, ogrzane ciało wrzucone do wody lub przegroda budynku poddana zmianie temperatury powietrza zewnętrznego. Zakładając dużą wartość współczynnika przewodzenia ciepła wewnątrz ciała oraz małą wartość współczynnika przejmowania ciepła na jego powierzchni, przyjmuje się brak zmienności przestrzennej temperatury wewnątrz ciała w danej chwili czasu. Wartość początkowa temperatury ciała T_0 jest jednakowa w całej objętości ciała i jest większa niż temperatura otoczenia, w którym to ciało się znalazło $T_\infty < T_0$ w początkowej chwili czasu $t = 0$. Ciało będzie stygło w czasie $t > 0$ do momentu, aż osiągnie temperaturę swojego otoczenia T_∞ . Zmiana temperatury wewnątrz ciała jest spowodowana wymianą ciepła między powierzchnią zewnętrzną ciała a jego otoczeniem.



Rys. 1. Przykład nagłej zmiany parametrów otoczenia ciała
Fig. 1. Example of sudden change of environment parameters

Z prawa *Fouriera* wynika, że przy braku różnicy temperatury przewodność cieplna materiału dąży do nieskończoności, co w rzeczywistości nigdy nie ma miejsca. Jednak właśnie to założenie przy małych wartościach współczynnika przejmowania ciepła na powierzchni ciała jest istotą metody skupionej pojemności cieplnej. Określenie „skupiona” jest tu uzasadnione, gdyż oznacza, że cała masa ciała skupiona jest w jednym punkcie. Znika zmienna przestrzenna, a więc znika gradient temperatury wewnątrz ciała.

$$Q = -Q_s \quad (1)$$

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki ilość energii Q dostarczonej do ciała o masie m i cieple właściwym przy

stałej objętości c_v , które nie wykonuje pracy zewnętrznej, równa jest zmianie w czasie t jego energii wewnętrznej U :

$$Q = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} [mc_v(T - T_\infty)] = mc_v \frac{dT}{dt} \quad (2)$$

Ilość ciepła przejmowana na powierzchni ciała równa jest iloczynowi współczynnika przejmowania ciepła α , pola powierzchni ciała A_s oraz różnicy temperatury T pomiędzy wnętrzem ciała i jego otoczeniem T_∞ :

$$Q_s = \alpha A_s (T - T_\infty) \quad (3)$$

Wstawiając równania (2) i (3) do równania bilansu energii (1) otrzymuje się zależność:

$$mc_v dT = -\alpha A_s (T - T_\infty) dt \quad (4)$$

Po wprowadzeniu pojęcia potencjału temperatury jako różnicy pomiędzy temperaturą ciała a temperaturą odniesienia (może to być na przykład punkt zero dowolnej skali termometrycznej lub temperatura otoczenia ciała):

$$\Theta = T - T_\infty \quad (5)$$

i zauważeniu, że $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{dT}{dt}$ można zapisać:

$$\rho V c_v d\Theta = -\alpha A_s \Theta dt, \quad (6)$$

gdzie V jest objętością ciała, a ρ jego gęstością.

Iloczyn gęstości, objętości i ciepła właściwego jest pojemnością cieplną ciała C , natomiast iloczyn współczynnika przejmowania ciepła α i pola powierzchni zewnętrznej jest przewodnością cieplną nazywaną także współczynnikiem przenoszenia ciepła H . Odwrotność przewodności cieplnej to opór cieplny R . W związku z tym równanie (6) można zapisać w postaci:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{1}{RC} \Theta. \quad (7)$$

Metoda skupionych parametrów cieplnych jest bardzo użyteczna w analizie nieustalanej wymiany ciepła. Jednak jej zastosowanie jest ograniczone poprzez kryterium stosowności [5]. Należy zatem, gdy ma być ona zastosowana do rozwiązania analizowanego problemu, sprawdzić czy zjawisko przejmowania ciepła na powierzchni ciała jest porównywalne z przewodnością cieplną w jego wnętrzu. Powszechnie stosowanym kryterium stosowności metody skupionych parametrów cieplnych jest wyznaczenie długości charakterystycznej:

$$L_c = \frac{V}{A_s}, \quad (8)$$

a następnie wyznaczenie liczby Biota:

$$Bi = \frac{\alpha L_c}{\lambda}. \quad (9)$$

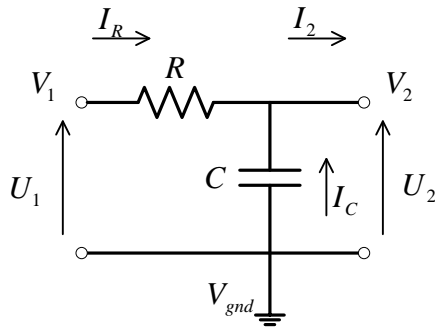
Metoda skupionych parametrów cieplnych może być stosowana w przypadku gdy:

$$Bi \leq 0,1. \quad (10)$$

W przypadku wymiany ciepła w przegrodach budynków często warunek ten jest spełniony co pozwala zastosować metodę skupionych parametrów cieplnych w analizie zapotrzebowania na energię budynków.

Metoda skupionych parametrów stosowana jest również w teorii obwodów elektrycznych. Istnieje analogia równania (6) w teorii obwodów liniowych. Odpowiednikiem procesu wymiany ciepła między ciałem a jego otoczeniem, w metodzie skupionych parametrów cieplnych, jest przepływ prądu elektrycznego w układzie złożonym z rezystora i kondensatora przedstawiony na rysunku 2. Układ taki to czwórnik RC, który jest filtrem dolnoprzepustowym tłumiącym wymuszenia okresowe o częstotliwościach większych niż częstotliwość graniczna

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$



Rys. 2. Czwórnik RC – analog elektryczny procesu wymiany ciepła pomiędzy ciałem i otoczeniem

Fig. 2. Two-port RC network – electric analog of lumped parameters heat exchange between body and its environment

Zgodnie z prawem *Ohma* spadek napięcia elektrycznego $U_R = U_2 - U_1$ na oporze równy jest iloczynowi oporu elektrycznego R i natężenia prądu elektrycznego I , który płynie przez ten opór. W przypadku napięcia zmiennego prawo *Ohma* można zapisać:

$$U_R(t) = I_R(t)R \quad (11)$$

Z definicji pojemności elektrycznej wynika, że ładunek elektryczny Q zgromadzony w kondensatorze jest równy iloczynowi jego pojemności elektrycznej C i napięcia U_C na jego zaciskach. W wypadku zmiany napięcia na zaciskach kondensatora można zmienny ładunek elektryczny zmagazynowany w kondensatorze zapisać w postaci równania:

$$Q(t) = C(V_2(t) - V_{gnd}). \quad (12)$$

Korzystając z definicji prądu elektrycznego zmiennego w czasie $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ prąd elektryczny ładowania

i rozładowania kondensatora będzie wynosił:

$$I_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{dV_2(t)}{dt}. \quad (13)$$

Po zapisaniu pierwszego prawa *Kirchhoffa* dla czwórnik RC i wstawieniu do niego wyrażen opisujących prądy płynące przez rezystor i kondensator otrzymuje się równanie różniczkowe:

$$\frac{V_2(t) - V_1(t)}{R} + C \frac{dV_2(t)}{dt} + I_2(t) = 0. \quad (14)$$

Przyjmując, że prąd $I_2(t)$ w dowolnej chwili czasu jest równy zero, co oznacza brak połączenia zacisku z jakimkolwiek innym elementem, oraz przyjmując, że potencjał $V_1(t) = V_{gnd}$, (zwarcie do zera) otrzymuje się równanie:

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}V_2(t). \quad (15)$$

Równanie (12) jest analogiczne do równania (7) i opisuje proces rozładowywania kondensatora o pojemności elektrycznej C naładowanego do napięcia początkowego $V(0) = V_0$ przez rezystor o oporze R . Identyczny związek ilościowy opisuje proces stygnięcia rozgrzanego ciała o temperaturze początkowej T_0 o skupionej pojemności cieplnej C i oporze przejmowania ciepła z jego powierzchni R w otoczeniu o temperaturze niższej niż temperatura ciała.

3. MODEL BUDYNKU O SKUPIONYCH PARAMETRACH CIEPLNYCH

W jednowęzłowym modelu cieplnym budynku zakłada się, że cały budynek stanowi jedno ciało o skupionej pojemności cieplnej. Przyjęcie tego założenia powoduje, że wymiana ciepła budynku z otoczeniem jest analogiczna do stygnącego ciała przedstawionego w poprzedniej części i opisywana jest tymi samymi równaniami. W najprostszym wypadku wszystkie części budynku stanowią jedną zwartą całość, którą przedstawia się w postaci skupionej pojemności cieplnej C . Pojemność cieplna konstrukcji jest analogiem pojemności elektrycznej kondensatora w czwórniku RC. Opory przenikania ciepła R_1 i R_2 przez powłokę zewnętrzną budynku odpowiednio do przestrzeni zewnętrznej o temperaturze θ_e i przestrzeni wewnętrznej budynku o temperaturze θ_i są odpowiednikami rezystancji w obwodzie elektrycznym. Strumienie ciepła Φ_{R1} , Φ_{R2} , Φ_C i Φ , które odpowiadają energii dopływającej do konstrukcji budynku od strony przestrzeni zewnętrznej, wewnętrznej, energii akumulowanej w masie konstrukcji oraz energii dostarczanej bezpośrednio do konstrukcji budynku, zostają zbilansowane zgodnie z pierwszym prawem *Kirchhoffa* odpowiadającym zasadzie zachowania energii w węzle o temperaturze θ , będącej średnią wartością temperatury budynku w czasie t . Wyznaczając przewodności cieplne H_1 i H_2 będące odwrotnościami oporów cieplnych, równanie bilansu energii dla jednowęzłowego modelu cieplnego

budynku o skupionych parametrach, przedstawionego w [6], można zapisać w postaci:

$$C \frac{d\Theta}{dt} = -H_1(\Theta - \Theta_e) - H_2(\Theta - \Theta_i) + \Phi. \quad (16)$$

Powyższe równanie różniczkowe zwyczajne opisuje średnią zmienną w czasie temperaturę konstrukcji budynku o znanej pojemności cieplnej i znanych przewodnościach cieplnych po stronie zewnętrznej i wewnętrznej dla zmiennych w czasie wartości temperatury przestrzeni zewnętrznej, wewnętrznej i strumienia ciepła dostarczanego do konstrukcji budynku.

Przedstawiony model budynku o skupionych parametrach cieplnych może być rozwijany do coraz bardziej szczegółowych postaci. Wprowadzenie dodatkowych węzłów, dla których wyznacza się wartości temperatury zwiększa złożoność obliczeniową modelu. Przykładowo wprowadzenie węzłów reprezentujących średnią temperaturę powierzchni wewnętrznych budynku oraz średnią temperaturę powietrza wewnętrznego prowadzi do znanego modelu 5R1C budynku. Dalsze rozwijanie modeli skupionych parametrów cieplnych umożliwi uwzględnienie różnych zjawisk cieplnych zachodzących w analizowanych energetycznie budynkach. Zwiększa to oczywiście złożoność sieci przepływu energii w tych modelach ale pozwala precyzyjniej wyznaczać wartości temperatury oraz strumienie ciepła w poszczególnych modelowanych elementach budynków.

4. ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE MODELU BUDYNKU O SKUPIONYCH PARAMETRACH CIEPLNYCH

Przedstawione w poprzednim rozdziale równanie różniczkowe zwyczajne (13) nie nastęca trudności w rozwiązaniu w przypadku prostych warunków brzegowych i początkowych. Przykładowo rozwiązanie analityczne równania (7) dla znanej temperatury początkowej T_0 i stałej temperatury otoczenia T_∞ opisuje wykładniczą zmianę w czasie temperatury $T(t)$ ciała:

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-bt}, \quad (17)$$

gdzie:

$$b = \frac{1}{RC} = \frac{\alpha A_s}{\rho V c_v}. \quad (18)$$

W przypadku złożonych warunków brzegowych i początkowych równanie różniczkowe (16) w wielu przypadkach nie może być rozwiązane analitycznie. Zachodzi to na przykład w przypadku gdy funkcje temperatury przestrzeni zewnętrznej θ_e i przestrzeni wewnętrznej budynku θ_i nie mają postaci analitycznej i znane są w postaci dyskretnej w określonych chwilach

czasowych. W celu rozwiązania równania (16) z tak określonymi warunkami brzegowymi należy zastosować metodę numeryczną. Istnieje wiele metod stosowanych do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Najprostszą metodą numeryczną pozwalającą na rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego typu:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t), \quad (19)$$

gdzie $y(t)$ jest poszukiwaną funkcją czasu t , jest metoda *Eulera*, która jest zaliczana do grupy metod jawnych. W metodzie tej zastępuje się pochodną funkcji jej przybliżeniem w postaci ilorazu różnicowego dla przyjętego kroku czasu Δt . W metodzie tej obserwuje się narastający błąd obliczeniowy związany z tym, że wartość funkcji z prawej strony równania przyjmuje wartości z początku lub końca przyjętego przedziału czasu. Prosta modyfikacja metody prowadzi do zwiększenia dokładności obliczeń i poprawienia stabilności algorytmu. Polega ona na przyjęciu założenia, że aproksymuje się wartość pochodnej funkcji y w połowie długości przedziału Δt zmiennej niezależnej. Wynika z tego, że wartość pochodnej funkcji y jest średnią arytmetyczną wartości funkcji f obliczonych dla dwóch kolejnych wartości zmiennej niezależnej t odległych od siebie o $\Delta t = t_n - t_{n-1}$:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \approx \frac{1}{2} [f(y_n, t_n) + f(y_{n-1}, t_{n-1})] \quad (20)$$

Dalszą poprawę jakości i stabilności rozwiązania uzyskuje się stosując metodę *Cranka-Nicholsona* [4] przyjmując do dalszych obliczeń wartość funkcji $y(t)$ w chwili n , jako średnią arytmetyczną z wyznaczonej wartości funkcji w chwili n oraz $n-1$ z poprzedniego kroku obliczeniowego $y_{n-1} := (y_n + y_{n-1}) / 2$. Stosując tę metodę do równania (16) otrzymuje się zależność:

$$C \frac{\Theta_n - \Theta_{n-1}}{\Delta t} = -\frac{1}{2} [(H_1 + H_2)\Theta_n + (H_1 + H_2)\Theta_{n-1}] + \Phi. \quad (21)$$

W równaniu (21) symbol θ_n oznacza niewiadomą wartość temperatury konstrukcji budynku w chwili bieżącej, natomiast θ_{n-1} jest znaną wartością tej temperatury w chwili poprzedniej. Wyznaczenie wartości θ_n możliwe jest po przekształceniu równania, co prowadzi do zależności:

$$\Theta_n = \frac{\Theta_{n-1}^* (C / \Delta t - 0,5(H_1 + H_2)) + \Phi}{C / \Delta t + 0,5(H_1 + H_2)} \quad (22)$$

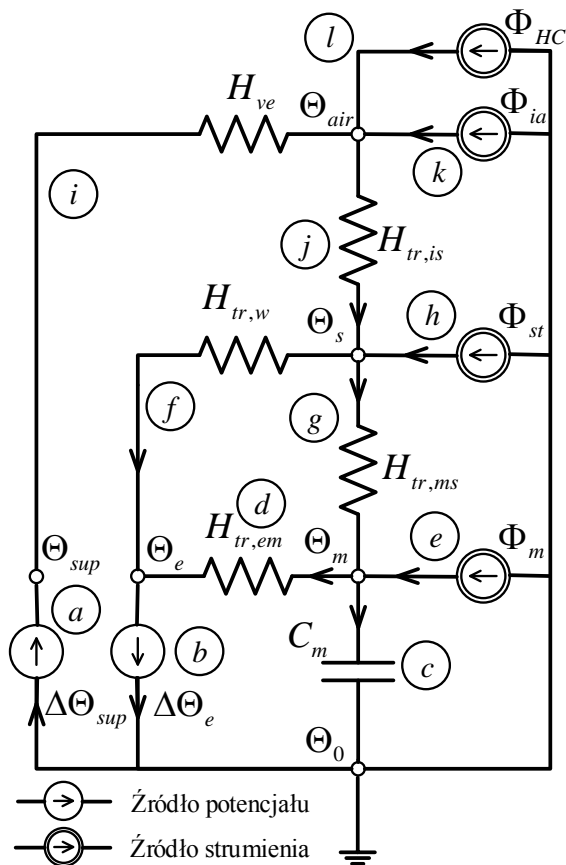
oraz

$$\Theta_{n-1}^* = \frac{(\Theta_n + \Theta_{n-1})}{2} \quad (23)$$

gdzie θ_{n-1}^* jest wartością przyjmowaną w kolejnym kroku obliczeniowym w równaniu (22).

Wykorzystując metodę skupionych parametrów cieplnych i jej analogię elektryczną oraz przedstawione powyżej rozwiązanie numeryczne można budować modele wymiany ciepła budynku w stanach nieustalonych w oparciu o schematy elektryczne. Przykładem może być model 5RIC z normy PN EN ISO 13790 przedstawiony na rysunku 3.

W przypadku modeli budynków opartych o jednowęzłowy model pojemności cieplnej rozwiązanie polega na redukcji układu do postaci która może być opisana równaniem (16). Rozwiązanie dla modelu 5RIC przedstawionego na rysunku 3 polega na wyznaczeniu w każdej chwili czasu trzech wartości potencjałów węzłowych odpowiadających średniej temperaturze konstrukcji budynku θ_m , średniej temperaturze powierzchni wewnętrznej konstrukcji budynku θ_s oraz średniej temperaturze powietrza wewnętrznego θ_i . Zależności te zostały przedstawione w pracy [6].



Rys. 3. Model 5RIC budynku o skupionych parametrach wg PN EN ISO 13790

Fig. 3. Whole building lumped parameters 5RIC model - PN EN ISO 13790 standard

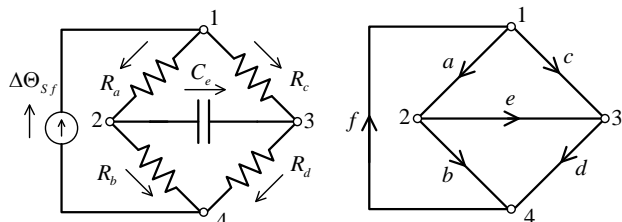
Wyznaczone dla przyjętego schematu obliczeniowego równania pozwalają na wyznaczanie wartości potencjałów węzłowych w dowolnej chwili czasu. Jednak tego typu analiza energetyczna budynku nie pozwala na modyfikacje modelu. W przypadku jakiegokolwiek zmiany w modelu budynku wymagane jest ponowne wyznaczenie równań opisujących model i ich rozwiązanie. Metoda ta nie pozwala na szybkie zmiany w modelach obliczeniowych i porównywanie ich pomiędzy sobą. Rozwiązaniem zagadnienia tworzenia różnorodnych modeli budynków o skupionych parametrach cieplnych jest zastosowanie teorii grafów do ich opisu wraz z metodami analizy układów liniowych i nieliniowych opisanych za jej pomocą.

5. TOPOLOGIA SIECI PRZEPLYWU CIEPŁA MODELU BUDYNKU

Sieci przepływowe o skupionych parametrach spełniają następujące zależności: I i II prawo Kirchhoffa oraz równania charakterystyk gałęzi opisujące poszczególne elementy sieci. Pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa opisują odpowiednio zasadę zachowania strumienia oraz zasadę zachowania potencjału. Równania charakterystyk gałęziowych opisują zależność pomiędzy strumieniem energii i potencjału w poszczególnych gałęziach sieci. Oba prawa Kirchhoffa są liniowymi, algebraicznymi więzami nałożonymi na strumień energii w gałęziach i potencjały w węzłach sieci przepływowej, wynikającymi jedynie z połączeń gałęzi i są niezależne od ich charakterystyk.

Sieć modelująca przepływ ciepła w całym budynku obejmuje gałęzie, które połączone są w węzłach. Strumień ciepła płynący poszczególnymi gałęziami sieci wywołane są różnicami temperatury, które przypisane są poszczególnym węzłom sieci. Opis topologiczny sieci o parametrach skupionych wymaga jedynie danych identyfikujących połączenia gałęzi. Do opisu topologii sieci stosuje się teorię grafów [1]. Teoria grafów pomocna jest w komputerowym formułowaniu równań opisujących analizowaną sieć. Umożliwia ona proste modyfikowanie modelu całego budynku z wykorzystaniem skupionych parametrów cieplnych jego elementów. Pełny opis sieci o parametrach skupionych musi zawierać następujące informacje: sposób połączenia gałęzi, przyjęte kierunki przepływu energii i różnic potencjałów oraz charakterystyki wszystkich gałęzi sieci. W przypadku opisu sieci przepływu ciepła w budynku i jego interakcji ze środowiskiem zewnętrznym, strumień ciepła przypisane zostają gałęziom, natomiast wartości temperatury węzłom sieci. Charakterystyka gałęzi składa się z zależności pomiędzy strumieniem ciepła płynącym daną gałęzią oraz różnicą temperatury węzłów początkowego i końcowego danej gałęzi. Zależność ta może być liniowa – jak w przypadku przewodzenia ciepła lub nieliniowa w przypadku konwekcji lub promieniowania. Naturalnym sposobem opisu sieci

o parametrach skupionych jest narysowanie grafu zorientowanego z dowolnie przyjętym kierunkiem strumieni w poszczególnych gałęziach. Gałęzie sieci mogą zawierać elementy charakteryzujące się określonymi właściwościami takimi jak zastępcza przewodność – np. odwrotność oporu cieplnego elementu budynku, lub przewodność zastępcza wyznaczona dla określonej pojemności cieplnej elementu budynku. Gałęzie mogą również zawierać źródła strumienia energii lub potencjału. Strumień energii promieniowania słonecznego jest przykładem źródła strumienia energii, natomiast temperatura powietrza zewnętrznego to przykład źródła potencjału. Istnieje wiele metod matematycznego opisu grafu skierowanego.



Rys. 4. Przykład sieci o parametrach skupionych ze źródłem strumienia energii i jej graf skierowany
Fig. 4. Example of lumped parameters network with energy source and it's oriented graph

Najczęściej wykorzystywane to listy przylegania, macierze przylegania oraz macierze wzajemności (incydencji). Informacja zawarta w grafie skierowanym reprezentującym sieć o parametrach skupionych może być jednoznacznie zapisana w macierzy incydencji.

Wykorzystywana w analizie sieci macierz incydencji to macierz wierzchołkowo-krawędziowa $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ posiada liczbę wierszy m odpowiadającą liczbie wierzchołków grafu oraz liczbę kolumn n odpowiadającą liczbie gałęzi (krawędzi lub łuków) grafu. W przypadku sieci przedstawionej na rysunku 4 macierz incydencji będzie wymiaru 4 x 6, co odpowiada czterem wierzchołkom i sześciu krawędziom grafu skierowanego reprezentującego tą sieć. Elementy macierzy incydencji przyjmują następujące wartości:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i\text{-ty wierzchołek jest początkiem } j\text{-tej krawędzi} \\ 0 & \text{jeżeli } i\text{-ty wierzchołek nie przylega do } j\text{-tej krawędzi} \\ -1 & \text{jeżeli } i\text{-ty wierzchołek jest końcem } j\text{-tej krawędzi} \end{cases} \quad (24)$$

Zgodnie z przyjętymi powyżej definicjami macierz incydencji \mathbf{A} dla grafu skierowanego z rysunku 4 można zapisać jako:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (25)$$

Wiersze i kolumny macierzy incydencji można w dowolny sposób przestawiać, co nie powoduje utraty zapisanej w niej informacji o grafie zorientowanym. Macierz incydencji grafu \mathbf{A} pomnożona przez wektor strumieni energii (ciepła) Φ przepływającej w poszczególnych gałęziach opisuje uogólnione na wszystkie węzły I prawo Kirchhoffa $\mathbf{A} \times \Phi = \mathbf{0}$, co można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \\ \Phi_d \\ \Phi_e \\ \Phi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

Wektor różnicy potencjałów dla gałęzi można wyznaczyć za pomocą iloczynu transponowanej macierzy incydencji i wektora potencjałów węzłowych (temperatury) $\mathbf{A}^T \times \Theta = \Delta\Theta$. Dla sieci z rysunku 4 można zatem zapisać:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\Theta_a \\ \Delta\Theta_b \\ \Delta\Theta_c \\ \Delta\Theta_d \\ \Delta\Theta_e \\ \Delta\Theta_f \end{bmatrix} \quad (27)$$

Definiując macierz \mathbf{H} o wymiarach $n \times n$ przewodności (współczynników przenoszenia energii) elementów gałęzi grafu, będących odwrotnościami oporu, jako macierzy w której główna przekątna zawiera wartości przewodności elementów można wyznaczyć zależność pomiędzy spadkiem potencjału gałęzi i jej strumieniem energii jako $\Phi = \mathbf{H} \times \Delta\Theta$. Jako przykład zostanie zapisane mnożenie tych wartości dla sieci przedstawionej na rysunku 4.

$$\begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \\ \Phi_d \\ \Phi_e \\ \Phi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta\Theta_a \\ \Delta\Theta_b \\ \Delta\Theta_c \\ \Delta\Theta_d \\ \Delta\Theta_e \\ \Delta\Theta_f \end{bmatrix}, \quad (28)$$

gdzie: $H_a=1/R_a$, $H_b=1/R_b$, $H_c=1/R_c$, $H_d=1/R_d$, $H_e=0$ i $H_f=0$.
Teoria grafów dostarcza wiele metod pozwalających w sposób szczegółowy analizować zależności w grafie zorientowanym opisującym sieć przepływu energii. Sieci takie są najczęściej pierścieniowe. W grafach tych sieci można wyznaczyć minimalne drzewo rozpinające oraz gałęzie domykające, które tworzą cykle elementarne planarnego grafu zorientowanego. Liczba cykli w grafie zależy od liczby gałęzi b oraz liczby węzłów n i wynosi $c = b - (n - 1)$. Macierze incydencji, drzewa rozpinające oraz dopełnień służą do wyznaczania układów równań liniowych lub nieliniowych opisujących wszystkie zależności pomiędzy strumieniami energii i potencjałów w sieciach przepływowych. W zależności od zastosowanych metod wyznaczania tych równań otrzymuje się metodę strumieni gałęziowych, metodę potencjałów węzłowych lub metodę strumieni cykli zwaną również metodą oczkową. W przypadku metod węzłowych dla każdego węzła sieci bilansowane są strumienie energii dopływającej do węzła, natomiast w przypadku metod oczkowych bilansowane są spadki potencjałów gałęziowych cykli grafu. Obie metody mają swoje zalety, lecz posiadają również wady, które uniemożliwiają stosowanie ich do ogólnego opisu sieci przepływowych ze względu na brak możliwości opisu dowolnego elementu w sieci. Metody te podlegają różnym modyfikacjom pozwalającym na rozwiązywanie danej klasy problemów w sieciach przepływowych. W dalszej części przedstawiona zostanie metoda węzłowa wraz z przedstawieniem jej wad oraz zmodyfikowana metoda węzłowa pozwalająca na opis dowolnej sieci przepływowej.

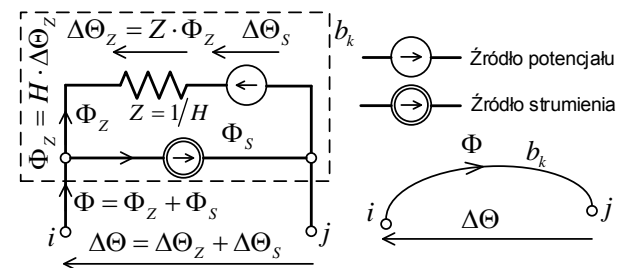
6. METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

Metoda potencjałów węzłowych umożliwia rozwiązanie sieci o parametrach skupionych, czyli znalezienie wszystkich strumieni energii w poszczególnych gałęziach oraz potencjałów w węzłach sieci przy zadanych przewodnościach gałęzi oraz znanych źródłach strumieni i potencjałów w poszczególnych gałęziach sieci. Metoda potencjałów węzłowych prowadzi do wyznaczenia układu równań, w których niewiadome to wartości potencjałów w węzłach sieci względem potencjału dowolnie wybranego w sieci węzła odniesienia. Umownie

węzłowi odniesienia przyporządkowuje się potencjał równy zero, ale może to być dowolna wartość względem której wyznaczone będą potencjały pozostałych węzłów. Strumienie energii przepływającej w sieci zależą tylko od różnicy potencjałów węzłów danej gałęzi oraz od charakterystyki danej gałęzi i nie zależą od wartości potencjału odniesienia.

Z tego względu z macierzy incydencji usuwa się wiersz odnoszący się do węzła odniesienia. Powstała w ten sposób macierz \mathbf{A}_r o wymiarach $(m-1) \times n$ nazwana jest zredukowaną macierzą incydencji. Przyjmując jako węzeł odniesienia węzeł o numerze 4 dla sieci przedstawionej na rysunku 4 zredukowana macierz incydencji dla jej grafu powstaje poprzez skreślenie czwartego wiersza pełnej macierzy incydencji. W metodzie węzłowej [2] uogólnia się gałąź sieci.

Uogólniona gałąź b_k zawiera element o określonej przewodności zastępczej $H=1/R$, szeregowo połączone z nim źródło potencjału $\Delta\Theta_s$ oraz połączone równoległe do obu tych elementów źródło strumienia energii Φ_s . Schemat uogólnionej gałęzi dla metody węzłowej przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Uogólniona gałąź sieci dla metody węzłowej
Fig. 5. General branch for nodal network analysis

Uogólniona gałąź zawiera dwójnik b_k podłączony do węzłów i oraz j . Reprezentuje on dowolną gałąź grafu skierowanego. Dwójnik b_k w poszczególnych gałęziach sieci może zawierać niezależne źródło potencjalne, niezależne źródło strumienia energii lub element o oporze zastępczym Z . Dwójnik ten może być również sterowanym źródłem strumienia energii zależnym od dowolnej różnicy potencjałów w sieci, co może być przydatne przy modelowaniu elementów, dla których strumień energii zależy od różnicy potencjałów np. materiały fazowo zmienne PCM zastosowane w elementach konstrukcji budynku. Dowolna gałąź w grafie zorientowanym reprezentującym sieć może zawierać jeden lub wszystkie opisane elementy dwójnika b_k . Wektory różnicy potencjałów gałęziowych (29), spadków potencjałów na oporach gałęzi oraz różnicy potencjałów źródeł potencjalnych dla całego grafu można zapisać jako:

$$\Delta\Theta = \begin{bmatrix} \Delta\Theta_1 \\ \Delta\Theta_2 \\ \vdots \\ \Delta\Theta_n \end{bmatrix}, \Delta\Theta_Z = \begin{bmatrix} \Delta\Theta_{Z_1} \\ \Delta\Theta_{Z_2} \\ \vdots \\ \Delta\Theta_{Z_n} \end{bmatrix}, \Delta\Theta_S = \begin{bmatrix} \Delta\Theta_{S_1} \\ \Delta\Theta_{S_2} \\ \vdots \\ \Delta\Theta_{S_n} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

gdzie n oznacza liczbę gałęzi grafu. Wektory reprezentujące strumienie energii w sieci (30) opisują odpowiednio strumień energii gałęzi uogólnionej, strumień energii przepływającej przez opór gałęzi oraz strumień energii niezależnego źródła.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix}, \Phi_Z = \begin{bmatrix} \Phi_{Z_1} \\ \Phi_{Z_2} \\ \vdots \\ \Phi_{Z_n} \end{bmatrix}, \Phi_S = \begin{bmatrix} \Phi_{S_1} \\ \Phi_{S_2} \\ \vdots \\ \Phi_{S_n} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Zgodnie z definicją gałęzi uogólnionej przedstawionej na rysunku 5 wartości gałęziowych różnic potencjałów oraz gałęziowych strumieni energii można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \Delta\Theta &= \Delta\Theta_Z + \Delta\Theta_S \\ \Phi &= \Phi_Z + \Phi_S \end{aligned} \quad (31)$$

Bilans energii w węzłach o nieznanymi potencjałach może być zapisany w postaci iloczynu zredukowanej macierzy incydencji grafu i wektora strumieni energii w gałęziach grafu:

$$\mathbf{A}_r \times \Phi = \mathbf{0}. \quad (32)$$

Powyższe równanie jest zapisem I prawa *Kirchhoffa* dla węzłów sieci o nieznanymi wartościami potencjałów. Wykorzystując zależność pomiędzy wektorami strumieni energii w gałęziach powyższe równanie można zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}_r \times \Phi_Z + \mathbf{A}_r \times \Phi_S = \mathbf{0} \quad (33)$$

Przyjmując zgodnie z równaniem (28) zależność pomiędzy strumieniami energii w gałęziach i różnicą potencjałów na ich końcach równanie (33) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}_r \times \mathbf{H} \times \Delta\Theta_Z = -\mathbf{A}_r \times \Phi_S \quad (34)$$

Uwzględniając w powyższym równaniu wektor różnicy potencjałów na oporach gałęzi obliczony z równania (31) otrzymuje się wzór:

$$\mathbf{A}_r \times \mathbf{H} \times (\Delta\Theta - \Delta\Theta_S) = -\mathbf{A}_r \times \Phi_S \quad (35)$$

Wektor różnicy potencjałów gałęzi grafu można wyznaczyć mnożąc transponowaną zredukowaną macierz incydencji przez wektor potencjałów węzłowych zredukowany o węzeł odniesienia: $\Delta\Theta = \mathbf{A}_r^T \times \Theta_r$. Wstawiając tę zależność do równania (35) i przekształcając je algebraicznie uzyskuje się równanie macierzowe metody węzłowej:

$$\mathbf{A}_r \times \mathbf{H} \times \mathbf{A}_r^T \times \Theta_r = \mathbf{A}_r \times (\mathbf{H} \times \Delta\Theta_S - \Phi_S). \quad (36)$$

Równanie to zapisuje się w postaci:

$$\mathbf{M} \times \Theta_r = \mathbf{N}, \quad (37)$$

gdzie: $\mathbf{M} = \mathbf{A}_r \times \mathbf{H} \times \mathbf{A}_r^T$ jest macierzą główną układu równań, zwaną macierzą przewodności węzłowych, Θ_r to wektor poszukiwanych potencjałów węzłowych, natomiast $\mathbf{N} = \mathbf{A}_r \times (\mathbf{H} \times \Delta\Theta_S - \Phi_S)$ jest wektorem wyrazów wolnych układu równań, nazywany wektorem węzłowych wydajności strumieni energii. Rozwiązanie układu $m-1$ równań (37) dowolną metodą algebraiczną lub numeryczną prowadzi do wyznaczenia poszukiwanych potencjałów węzłowych względem wybranego na początku obliczeń węzła odniesienia. Wyznaczenie potencjałów w węzłach sieci umożliwia znalezienie wszystkich strumieni energii w jej gałęziach. Metoda ta może być stosowana do analiz sieci z elementami liniowymi lub nieliniowymi w poszczególnych gałęziach. W przypadku sieci z elementami nieliniowymi metoda węzłowa prowadzi do układu równań nieliniowych, które należy rozwiązać metodą numeryczną np. *Newtona-Raphsona* lub metodą *Broydena* [4]. Jeżeli w analizowanej sieci występują źródła o zmiennej w czasie różnicy potencjałów lub źródła dostarczające zmienne w czasie strumienie energii, metodę potencjałów węzłowych stosuje do obliczeń dla każdego kroku czasowego wykorzystując dla pierwszego kroku czasu warunek początkowy. Obliczone dla chwili bieżącej wartości potencjałów traktowane są następnie jako wartości z chwili poprzedniej dla obliczeń kolejnego kroku czasowego. Jeżeli w sieci znajdują się elementy pojemnościowe wówczas zależność pomiędzy strumieniem energii takiego elementu $\Phi(t)$, a zmianą w czasie różnicy potencjałów na jego brzegach $\Delta\Theta$ należy przybliżyć ilorazem różnicowym. Strumień energii dopływający lub odpływający od elementu o pojemności C w chwili czasu t opisany jest równaniem:

$$\Phi(t) = C \frac{d(\Delta\Theta)}{dt} \quad (38)$$

Równanie to można przybliżyć równaniem różnicowym, w którym pochodną różnicy potencjałów względem czasu zastępuje się ilorazem różnicowym:

$$\begin{aligned} \Phi(t_n) &= \frac{C}{\Delta t} (\Delta\Theta_t - \Delta\Theta_{t-1}) = \\ &= \frac{C}{\Delta t} \Delta\Theta_t - \frac{C}{\Delta t} \Delta\Theta_{t-1} \end{aligned}, \quad (39)$$

gdzie: Δt jest przyjętym krokiem czasowym dla obliczeń sieci o zmiennych w czasie parametrach zasilania. Dla tak przyjętych założeń wyrażenie $H=C/\Delta t$ jest zastępczą przewodnością gałęzi z elementem pojemnościowym. Element taki może być zastąpiony uogólnioną gałęzią,

w której znajduje się tylko opór zastępczy oraz źródło strumienia energii zgodnie z rysunkiem 5. Dla danej chwili czasu wartość strumienia energii przepływającej przez źródło strumienia wyznacza się jako:

$$\Phi_s = -\frac{C}{\Delta t} \Delta\Theta_{t-1}, \quad (40)$$

przy czym $\Delta\Theta_{t-1}$ jest wartością różnicy potencjałów gałęzi zawierającej element pojemnościowy wyznaczony dla chwili poprzedniej.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} & -\frac{1}{R_a} & -\frac{1}{R_c} \\ -\frac{1}{R_a} & \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{C_e}{\Delta t} & -\frac{C_e}{\Delta t} \\ -\frac{1}{R_c} & -\frac{C_e}{\Delta t} & \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_d} + \frac{C_e}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\Theta_r = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\Phi_f \\ \frac{C_e}{\Delta t} \Delta\Theta_{e_{t-1}} \\ -\frac{C_e}{\Delta t} \Delta\Theta_{e_{t-1}} \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań wyznacza wartości potencjałów w bieżącej chwili czasu na podstawie bieżącej wartości strumienia energii źródła w gałęzi f oraz różnicy potencjałów w chwili poprzedniej w gałęzi e .

Najpoważniejszą wadą metody potencjałów węzłowych jest brak możliwości reprezentowania w gałęziach sieci elementów czysto potencjalnych. W elementach tego typu nie występuje opór zastępczy. Przykładem może być gałąź ze źródłem potencjalnym. W tym przypadku uogólniona gałąź rezystancyjna zawiera jedynie źródło potencjalne co prowadzi do sytuacji, w której przewodność takiej gałęzi wynosi nieskończoność ponieważ jej opór zastępczy wynosi zero. W przypadku sieci przepływu ciepła w budynkach przypadek ten występuje bardzo często i jest równoznaczny z przyporządkowaniem określonej wartości temperatury w węzłach sieci np. temperatury powietrza zewnętrznego, powietrza wentylacyjnego nawiewanego do budynku lub temperatury powietrza w strefie cieplnej obiektu. Innymi przypadkami elementów, których nie można reprezentować za pomocą klasycznej metody węzłowej jest gałąź reprezentująca zwarcie w sieci (przerwa w gałęzi reprezentowana jest poprzez nieskończony opór, dla którego przewodność $H=0$), źródło potencjalne sterowane strumieniem lub dowolną różnicą potencjałów itp. Wady tej nie posiada *zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych* przedstawiona w następnym punkcie artykułu.

7. ZMODYFIKOWANA METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH

W klasycznej metodzie potencjałów węzłowych istnieje ograniczenie w postaci braku możliwości reprezentacji gałęzi sieci zawierających elementy o właściwościach czysto potencjalnych. Związane jest to z tym, że elementy takie nie wykazują oporności zatem ich przewodność jest nieskończona. Zatem nie można jej wpisać do macierzy przewodności węzłowych układu równań. Istnieją metody pozwalające uwzględnić gałęzie potencjalne w układzie równań metody potencjałów węzłowych lecz nie nadają się one do automatyzacji formułowania równań sieci. Brak tej możliwości nie umożliwia uproszczonego komputerowego generowania układu równań dla sieci na podstawie jej topologii. Rozwiązaniem tego problemu jest modyfikacja metody potencjałów węzłowych. Modyfikacja ta polega na podzieleniu gałęzi sieci na dwie grupy. Pierwsza grupa zawiera tylko te gałęzie sieci, które mogą być opisane za pomocą klasycznej metody potencjałów węzłowych. Do grupy tej zalicza się gałęzie, które zawierają źródła strumienia energii i połączone z nimi równoległe element. Druga grupa gałęzi to te, które nie mogą być opisane w klasycznej metodzie potencjałów węzłowych lub takie które mogą być opisane klasyczną metodą węzłową, ale ze względów obliczeniowych lub decyzją użytkownika przypisane zostają do tej grupy. Upraszczając opis podziału gałęzi w zmodyfikowanej metodzie potencjałów węzłowych do grupy pierwszej zalicza się uogólnione gałęzie strumieniowe. Ich równania gałęziowe wyrażają zależności strumienia energii od zastępczych przewodności elementów. Nazywane są one również gałęziami admitancyjnymi. Najczęściej są to gałęzie, których uogólniony opis zawiera równoległe połączone źródła strumienia i elementy opisane przewodnościami zastępczymi H . Do drugiej grupy zalicza się przede wszystkim wszystkie gałęzie potencjalne, których równania opisują zależność różnicy potencjałów połączonych szeregowo źródeł potencjału i elementów o oporach zastępczych Z . Gałęzie te nazywane są również gałęziami impedancyjnymi. Uogólniona gałąź impedancyjna zawiera źródła potencjału i szeregowo połączone z nimi elementy o znanych oporach zastępczych. Do grupy drugiej można również zaliczyć wybrane gałęzie admitancyjne. Jeżeli gałąź taka zaliczana zostaje do grupy drugiej wówczas nie jest reprezentowana w grupie pierwszej. Wszystkie gałęzie grupy drugiej wnoszą do układu równań niewiadome, które są strumieniami energii płynącymi w tych gałęziach. W klasycznej metodzie potencjałów węzłowych wszystkie niewiadome to wartości potencjałów we wszystkich węzłach oprócz węzła odniesienia. W zmodyfikowanej metodzie potencjałów węzłowych powstaje układ równań, w którym liczba niewiadomych odpowiada sumie liczby węzłów sieci pomniejszych o węzeł odniesienia plus liczbie gałęzi zaliczonych do drugiej

grupy. Zredukowana macierz incydencji grafu sieci zostaje podzielona na dwie podmacierze zawierające gałęzie pierwszej grupy \mathbf{A}_{r1} oraz drugiej grupy \mathbf{A}_{r2} . Wektor strumieni energii w gałęziach sieci zostaje podzielony na dwa podwektory Φ_1 i Φ_2 odpowiadający grupie gałęzi admitancyjnych i grupie gałęzi impedancyjnych. Iloczyn macierzy incydencji i wektora strumieni energii:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r1} & \dots & \mathbf{A}_{r2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \dots \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (42)$$

reprezentuje I prawo Kirchhoffa dla węzłów o nieznanymi potencjałach. Pozostałe równania układu równań to równania gałęziowe gałęzi admitancyjnych i impedancyjnych zaliczonych do grupy drugiej:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \Phi_{z_2} + \Phi_{s_2} \\ \Delta\Theta_2 &= \Delta\Theta_{z_2} + \Delta\Theta_{s_2} \end{aligned} \quad (43)$$

Na podstawie uogólnionej gałęzi sieci i mając na uwadze, że w gałęzi admitancyjnej nie ma źródła potencjału, natomiast w gałęzi impedancyjnej nie ma źródła strumienia, powyższe równania można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} -\mathbf{H}_2 \times \Delta\Theta_2 + \mathbf{K}_2 \times \Phi_2 &= \Phi_{s_2} \\ \mathbf{L}_2 \times \Delta\Theta_2 - \mathbf{Z}_2 \times \Phi_2 &= \Delta\Theta_{s_2} \end{aligned} \quad (44)$$

gdzie \mathbf{H}_2 i \mathbf{Z}_2 to odpowiednio przewodności i opory zastępcze gałęzi zaliczonych do grupy drugiej, natomiast \mathbf{K}_2 i \mathbf{L}_2 to wektory bezwymiarowych współczynników. W związku z tym, że oba równania macierzowe zawierają te same niewiadome wektory różnicy potencjałów $\Delta\Theta_2$ i strumieni energii Φ_2 można je przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \times \Delta\Theta_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \times \Phi_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{s_2} \\ \Delta\Theta_{s_2} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Przyjmując, następujące oznaczenia wektorów:

$$\hat{\mathbf{H}}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_2 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{W}}_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{s_2} \\ \Delta\Theta_{s_2} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

Równanie (45) można wyrazić w postaci:

$$\hat{\mathbf{H}}_2 \times \Delta\Theta_2 + \hat{\mathbf{Z}}_2 \times \Phi_2 = \hat{\mathbf{W}}_2 \quad (47)$$

Zakładając, że w gałęziach pierwszej grupy nie znajdują się źródła potencjałów, zgodnie z definicją uogólnionej gałęzi sieci przedstawionej na rysunku 5 można zapisać:

$$\mathbf{A}_{r1} \times \Phi_1 = \mathbf{A}_{r1} \times \Phi_{z1} + \mathbf{A}_{r1} \times \Phi_{s1}. \quad (48)$$

Wstawiając do równania (42) powyższą zależność i przekształcając otrzymuje się:

$$\mathbf{A}_{r1} \times \Phi_{z1} + \mathbf{A}_{r2} \times \Phi_2 = -\mathbf{A}_{r1} \times \Phi_{s1}. \quad (49)$$

Uwzględniając zależności dla gałęzi admitancyjnych opisanych wzorem (36) układ równań (49) można zapisać jako:

$$\mathbf{A}_{r1} \times \mathbf{H}_1 \times \mathbf{A}_{r1}^T \times \Theta_r + \mathbf{A}_{r2} \times \Phi_2 = -\mathbf{A}_{r1} \times \Phi_{s1}. \quad (50)$$

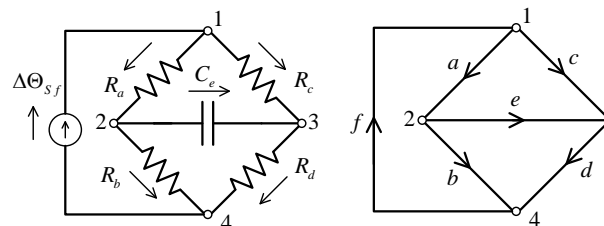
W równaniu tym niewiadome to wektor wartości potencjałów węzłowych Θ_r oraz wektor strumieni energii gałęzi impedancyjnych Φ_2 . W układzie równań (50) liczba równań równa jest liczbie nieznanymi wartości potencjałów. Brakujące równania w liczbie równej liczbie nieznanymi strumieni energii gałęzi zaliczonych do grupy drugiej wyznacza się z zależności (47) uwzględniając, wektor różnicy potencjałów gałęzi opisanych iloczynem transponowanej macierzy incydencji gałęzi grupy drugiej i wektora potencjałów węzłowych:

$$\hat{\mathbf{H}}_2 \times \mathbf{A}_{r2}^T \times \Theta_r + \hat{\mathbf{Z}}_2 \times \Phi_2 = \hat{\mathbf{W}}_2 \quad (51)$$

Równania (50) i (51) to układ równań zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych opisujących analizowaną sieć. W obu równaniach występują identyczne wektory nieznanymi potencjałów węzłowych i strumieni energii gałęzi drugiej grupy, zatem układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r1} \times \mathbf{H}_1 \times \mathbf{A}_{r1}^T & \mathbf{A}_{r2} \\ \hat{\mathbf{H}}_2 \times \mathbf{A}_{r2}^T & \hat{\mathbf{Z}}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Theta_r \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{r1} \times \Phi_{s1} \\ \hat{\mathbf{W}}_2 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Jako przykład wykorzystania zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych zostanie wyznaczony układ równań opisujących sieć przedstawioną na rysunku 6. Sieci z rysunków 5 i 6 różnią się między sobą jedynie rodzajem źródła w gałęzi f , w której źródło strumienia energii zastąpiono źródłem różnicy potencjałów o wartości $\Delta\Theta_{sf}$. W związku z tym, że opór zastępczy tej gałęzi wynosi $Z_f=0$, a zatem jej przewodność zastępcza $H=1/Z$ jest nieskończenie wielka i nie można jej opisać jako gałęzi admitancyjną, klasyfikuje się ją jako gałąź impedancyjną. Analogicznie gałąź e zawierającą pojemność można zaklasyfikować jako impedancyjną, w której strumień energii zależy od zmiany różnicy potencjałów węzłów 2 i 3. W sieci przedstawionej na rysunku 6, przyjmuje się jako węzeł odniesienia węzeł nr 4. Niewiadome to potencjały w węzłach 1, 2 i 3 oraz strumienie energii w gałęzi e i f .



Rys. 6. Sieć o parametrach skupionych ze źródłem potencjału i jej graf skierowany

Fig. 6. Example of lumped parameters network with potential difference source and it's oriented graph

Zredukowana macierz incydencji gałęzi grupy pierwszej \mathbf{A}_{r1} to kolumny a, b, c, d i wiersze 1,2,3 macierzy \mathbf{A} (25)

natomiast zredukowana macierz incydencji gałęzi grupy drugiej \mathbf{A}_{r2} to kolumny e i f oraz wiersze 1,2,3 macierzy \mathbf{A} . Macierze przewodności węzłowych, oporów zastępczych i przewodności zastępczych gałęzi grupy drugiej zapisuje się w postaci:

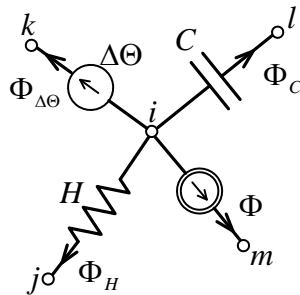
$$\mathbf{A}_{r1} \times \mathbf{H}_1 \times \mathbf{A}_{r1}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} & -\frac{1}{R_a} & -\frac{1}{R_c} \\ -\frac{1}{R_a} & \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} & 0 \\ -\frac{1}{R_c} & 0 & \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_d} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_2 \times \mathbf{A}_{r2}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C}{\Delta t} & -\frac{C}{\Delta t} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{Z}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektor wyrazów wolnych układu równań (54) dla sieci przedstawionej na rysunku 6 przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{r1} \times \Phi_{S1} \\ \hat{\mathbf{W}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{C}{\Delta t} \Delta \Theta_{t-1} \\ \Delta \Theta_{sf} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Układ równań zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych można tworzyć za pomocą macierzy składowych gałęzi sieci uogólnionego węzła przedstawionego na rysunku 7. W najprostszych przypadkach przepływu ciepła w budynkach rozpatruje się gałęzie zawierające opór cieplny, pojemność cieplną, źródło potencjalne (temperatury) oraz źródło energii (strumienia ciepła). Elementy takie występują w schemacie modelu 5RIC z normy PN EN ISO 13790 przedstawionym na rysunku 3.



Rys. 7. Uogólniony węzeł zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych
Fig. 7. General node of modified nodal method

Macierze składowe dla gałęzi zawierających przewodność zastępczą, pojemność lub źródło strumienia energii mogą być utworzone zarówno dla gałęzi grupy pierwszej jak

i grupy drugiej. W przypadku gałęzi zawierających jedynie źródło potencjalne można utworzyć tylko szablon gałęzi grupy drugiej.

Tabela 1. Macierze składowe gałęzi grupy pierwszej
Table 1. Element branch matrices assigned to first group

Element	Macierz składowa – grupa I				
	M	Θ_i	Θ_j	Φ_H	N
H	<i>i</i>	<i>H</i>	<i>-H</i>	\emptyset	0
	<i>j</i>	<i>-H</i>	<i>H</i>	\emptyset	0
	Φ_H	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
C	M	Θ_i	Θ_l	Φ_C	N
	<i>i</i>	$\frac{C}{\Delta t}$	$-\frac{C}{\Delta t}$	\emptyset	$\frac{C}{\Delta t} \Delta \Theta_{t-1}$
	<i>l</i>	$-\frac{C}{\Delta t}$	$\frac{C}{\Delta t}$	\emptyset	$-\frac{C}{\Delta t} \Delta \Theta_{t-1}$
	Φ_C	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
Φ	M	Θ_i	Θ_m	Φ	N
	<i>i</i>	0	0	\emptyset	$-\Phi$
	<i>m</i>	0	0	\emptyset	Φ
Φ	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	
$\Delta \Theta$	Nie istnieje				

Układ równań zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych uzyskuje się poprzez dodanie do siebie macierzy składowych gałęzi sieci. Sumując składowe macierze \mathbf{M} gałęzi, otrzymuje się macierz główną układu równań, natomiast dodając do siebie składowe wektory \mathbf{N} gałęzi, uzyskuje się wektor wyrazów wolnych układu równań. Zastosowanie macierzy składowych gałęzi sieci umożliwia pełną automatyzację formułowania układu równań opisujących analizowaną sieć. Automatyzacja ta umożliwia komputerowe tworzenie i rozwiązywanie zagadnienia przepływu ciepła w budynku za pomocą dowolnego modelu o parametrach skupionych bez potrzeby ręcznego wyprowadzania równań za pomocą których wyznacza się wartości temperatury w poszczególnych węzłach modelu.

Tabela 2. Macierze składowe gałęzi grupy drugiej
Table 2. Element branch matrices assigned to second group

Element	Macierz składowa- grupa II				
H	M	Θ_i	Θ_j	Φ_H	N
	i	0	0	1	0
	j	0	0	-1	0
	Φ_H	$-H$	H	1	0
C	M	Θ_i	Θ_l	Φ_C	N
	i	0	0	1	0
	l	0	0	-1	0
	Φ_C	$-\frac{c}{\Delta t}$	$\frac{c}{\Delta t}$	1	$\frac{c}{\Delta t} \Delta\Theta_{c,t-1}$
Φ	M	Θ_i	Θ_m	Φ	N
	i	0	0	1	0
	m	0	0	-1	0
	Φ	0	0	1	Φ
$\Delta\Theta$	M	Θ_i	Θ_m	$\Phi_{\Delta\Theta}$	N
	i	0	0	1	0
	m	0	0	-1	0
	$\Phi_{\Delta\Theta}$	1	-1	1	$\Delta\Theta$

8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W analizie energetycznej i symulacjach energetycznych całych budynków często stosuje się modele o parametrach skupionych. W modelach tych przyjmuje się, skupione pojemności i opory cieplne elementów budynku. Założenie takie pozwala na tworzenie schematów przepływu ciepła odpowiadających przyjętemu modelowi budynku. Istnieje analogia pomiędzy przepływem ciepła w modelowanej sieci i przepływem prądu elektrycznego w układach liniowych i nieliniowych. Jednym ze sposobów wyznaczenia wartości potencjałów w węzłach i strumieni energii w gałęziach sieci modelującej przepływ ciepła w budynku jest zastosowanie metody potencjałów węzłowych. Metoda ta jest skuteczna w przypadkach sieci, które nie zawierają gałęzi z elementami czysto potencjalnymi. W przypadku modelowania przepływu ciepła przez budynek gałęzie takie występują bardzo często i charakteryzują węzły o zadanej wartości temperatury, na przykład węzeł reprezentujący temperaturę powietrza zewnętrznego lub węzeł reprezentujący temperaturę

wewnętrzną w pomieszczeniu o zadanej wartości. W przypadkach, w których sieć modelująca przepływ ciepła zawiera tego typu elementy, nie można utworzyć odpowiadającego jej układu równań, ze względu na nieskończoną wartość przewodności zastępczych tych gałęzi. W celu rozwiązania sieci przepływu ciepła w budynkach modyfikuje się metodę potencjałów węzłowych traktując wybrane gałęzie sieci w odmienny sposób umożliwiając wprowadzenie do układu równań dodatkowych niewiadomych wartości strumieni energii tych gałęzi i równań gałęziowych określających zależności pomiędzy różnicą temperatury gałęzi i strumieniem ciepła. Na podstawie analizy metody zmodyfikowanych potencjałów węzłowych wyznacza się składowe macierze i wektory wyrazów wolnych elementów gałęziowych co pozwala na komputerowe formułowanie układu równań opisujących sieć przepływu ciepła w budynku. Podejście takie znakomicie ułatwia modyfikację modelu stosowanego od obliczania zapotrzebowania na energię dla budynku. W przypadku metod 5RIC lub 6RIC przyjęte rozwiązanie sieci przepływu ciepła w budynku w formie wyznaczonych równań modelu nie pozwala na jego bezpośrednie modyfikowanie. Modyfikacja taka jest możliwa, ale zmusza użytkownika do ręcznego wyznaczania nowych równań modelu. Przedstawiona w artykule zmodyfikowana metoda potencjałów węzłowych może być wykorzystana w analizach stanu ustalonego lub nieustalonego zarówno dla sieci liniowych jak również sieci nieliniowych modelujących przepływ ciepła w budynkach.

MODIFIED NODAL ANALYSIS FOR BUILDING ENERGY SIMULATIONS

Summary: This paper presents principles of modified nodal analysis used to solve lumped parameters networks which model whole building heat exchange. The lumped capacitance and resistance 5RIC or 6RIC method used for whole building modelling with simple hourly method utilize predefined equations presented in PN EN ISO 13790 standard. Modification of building energy network model causes that the model equations have to be determined again. The problem can be solved with graph theory and classic nodal analysis used for determining node potentials, which are in the case of building energy analysis, nodes temperature. This method whatever is very useful, cannot be used for networks containing branches with ideal potential sources. Modified nodal analysis combines dual graph topology with network admittance branches classified for the first group, and impedance branches classified for second group. Branch elements can be presented as stamp matrices which are used for define main matrix and right hand side vector of network equation system. Modified nodal analysis can be used for automatic formulation of equation set which then can be solved with any efficient numerical method. This approach allows to quickly modify building model and provide energy analysis without deriving new equations for that model as presented in PN EN ISO 13790 standard.

Literatura

- [1] Deo N., *Teoria grafów I jej zastosowanie w technice I informatyce*, PWN, Warszawa 1980
- [2] Chua L. O., Lin P. M., *Computer Aided Analysis of Electronic Circuits*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975
- [3] PN EN ISO 13790-2008, *Ciepłne właściwości użytkowe budynków - Obliczanie zapotrzebowania na energię do ogrzewania*, PKN, 2008
- [4] Gerald C., Wheatley P., *Applied Numerical Analysis*, 7th Edition, Pearson Addison Wesley, 2004
- [5] Cengel Y A., Ghajar A. J., *Heat and Mass Transfer Fundamentals & Applications*, 5th Edition, McGraw Hill Education, 2015
- [6] Narowski P., *Uproszczona metoda godzinowa obliczania ilości ciepła do ogrzewania i chłodzenia budynków*, Ciepłownictwo, Ogrzewnictwo, Wentylacja, Nr 1 (466) 2009, str. 27

DODATEK

Dodatek zawiera przykład zastosowania zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych dla modelu 5R1C budynku z zastosowaniem macierzy składowych gałęzi. Na schemacie tym wyróżniono 6 węzłów. Węzeł Θ_0 przyjęto jako węzeł odniesienia, zatem wartości temperatury w pozostałych pięciu węzłach stają się niewiadomymi w układzie równań. Model ten posiada dwie gałęzie zawierające źródła potencjału – temperatury – których strumienie ciepła Φ_a i Φ_b , stają się dodatkowymi niewiadomymi. Układ równań składa się zatem z siedmiu równań z siedmioma niewiadomymi. Poniżej przedstawiono wybrane macierze składowe gałęzi modelu 5R1C przedstawionego na rysunku 3. Macierz główna oraz wektor wyrazów wolnych powstają poprzez dodanie do siebie wszystkich elementów macierzy składowych.

Macierz składowa gałęzi z przewodnością $H_{tr,em}$ przypisanej do grupy pierwszej:

Θ_m	Θ_s	Θ_{air}	Θ_e	Θ_{sup}	Φ_a	Φ_b	N
$H_{tr,em}$	0	0	$-H_{tr,em}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
$-H_{tr,em}$	0	0	$H_{tr,em}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Macierz składowa gałęzi z pojemnością C_m przypisanej do grupy pierwszej:

Θ_m	Θ_s	Θ_{air}	Θ_e	Θ_{sup}	Φ_a	Φ_b	N
$\frac{C_m}{\Delta t}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{C_m}{\Delta t} \Theta_{m,t-1}$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Macierz składowa gałęzi ze źródłem strumienia energii Φ_{ia} przypisanej do grupy pierwszej:

Θ_m	Θ_s	Θ_{air}	Θ_e	Θ_{sup}	Φ_a	Φ_b	N
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	Φ_{ia}
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Macierz składowa gałęzi ze źródłem potencjału $\Delta\Theta_{sup}$ przypisanej do grupy drugiej:

Θ_m	Θ_s	Θ_{air}	Θ_e	Θ_{sup}	Φ_a	Φ_b	N
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	-1	0	0	$\Delta\Theta_{sup}$
0	0	0	0	0	0	0	0

Macierz główna i wektor wyrazów wolnych układu równań modelu 5R1C budynku, wyznaczone za pomocą składowych macierzy gałęzi grafu zmodyfikowanej metody potencjałów węzłowych.

Θ_m	Θ_s	Θ_{air}	Θ_e	Θ_{sup}	Φ_a	Φ_b	N
$\frac{C_m}{\Delta t} + H_{tr,em} + H_{tr,ms}$	$-H_{tr,ms}$	0	$-H_{tr,em}$	0	0	0	$\frac{C_m}{\Delta t} \Theta_{m,t-1} + \Phi_m$
$-H_{tr,ms}$	$H_{tr,ms} + H_{tr,w} + H_{tr,is}$	$-H_{tr,is}$	$-H_{tr,w}$	0	0	0	Φ_{st}
0	$-H_{tr,is}$	$H_{tr,is} + H_{ve}$	0	$-H_{ve}$	0	0	$\Phi_{ia} + \Phi_{HC}$
$-H_{tr,em}$	$-H_{tr,w}$	0	$H_{tr,em} + H_{tr,w}$	0	0	-1	0
0	0	$-H_{ve}$	0	H_{ve}	-1	0	0
0	0	0	0	-1	0	0	$\Delta\Theta_{sup}$
0	0	0	-1	0	0	0	$\Delta\Theta_e$