ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XLIII (2007)

JULIAN MUSIELAK (Poznań)

Jak powstawała analiza funkcjonalna*

Przestrzeń... Co wiąże się nam z tym pojęciem? Może chwila, kiedy siedzieliśmy nad brzegiem morza i patrzeliśmy w dal. Gdzieś, na horyzoncie, znikały powoli maszty jachtu. Za chwilę była już tylko przestrzeń, wypełniona od dołu ciemnym lustrem wody, a od góry błękitem nieba. Pustka. A może przypomina nam się moment, gdy odpoczywając podczas wycieczki, spoglądaliśmy na odległy łańcuch górski, w przestrzeń zapełnioną wielością rekwizytów? Zawsze jednak myślimy o naszej, swojskiej przestrzeni trójwymiarowej. Przywykliśmy co prawda już do tego, że do jej trzech współrzędnych dodaje się czwartą, czas, otrzymując przestrzeń czterowymiarową. Mechanicy zgadzają się od dawna, by układ n punktów, poruszający się w czasie, uznać za punkt przestrzeni $(3n + 1)$-wymiarowej. Ale dalej to już chyba iść nie można.

Punkt przestrzeni n-wymiarowej można, w ustalonym układzie współrzędnych, identyfikować z uporządkowanym układem n liczb, jego współrzędnych. Dlaczego jednak ograniczać się do układu skończonego? Ciąg nieskończony można też uważać za „punkt" tyle, że przestrzeni nieskończenie wymiarowej. Można rozpatrywać np. przestrzeń wszystkich ciągów. Ma ona tę własność, że suma dwóch jej „punktów" jest znowu jej „punktem", tak samo jest z iloczynem „punktu" przez liczbę. Mówimy, że to jest przestrzeń liniowa, albo przestrzeń wektorowa, w tym drugim przypadku zamiast „punkt" mówiąc „wektor". Jest widoczne, że zawiera ona mniejsze przestrzenie liniowe, jak przestrzeń ciągów ograniczonych, przestrzeń ciągów zbieżnych, czy też przestrzeń ciągów, dla których szereg kwadratów ich wyrazów jest zbieżny. Tę ostatnią przestrzeń oznacza się symbolem l^2. Można pójść jeszcze dalej, zamiast przestrzeni ciągów rozpatrywać przestrzenie funkcji, również nieskończenie wymiarowe. Ale po co?

Było to około 100 lat temu, gdy matematyk niemiecki Dawid Hilbert zajął się równaniami całkowymi i w krótkim czasie, w latach 1904–1910

* Wykład wygłoszony 4 czerwca 2007 r. na uroczystości nadania doktoratu honoris causa Uniwersytetu Zielonogórskiego.

Prof. Julian Musielak podczas uroczystości

ogłosił na ten temat 6 prac w czasopiśmie Nachrichten der Wissenschaften, Universität Göttingen [11]. W tym samym czasie 2 prace na ten sam temat napisał inny matematyk niemiecki, Erhard Schmidt. W ten sposób powstała teoria Hilberta-Schmidta równań całkowych. Opierała się ona na wynikach, dotyczących przestrzeni l^2 ciągów oraz odpowiadającej jej przestrzeni L^2 funkcji całkowalnych z kwadratem. Fundamentalne okazało się traktowanie tych klas jako przestrzeni o pewnych własnościach geometrycznych, jak długość wektora czy kąt między wektorami. Wspomniane przestrzenie zostały nazwane przestrzeniami Hilberta i rychło znalazły ważne zastosowania. Wspomnę o dwóch z nich. Jedno dotyczy teorii prawdopodobieństwa, interpretowanego jako miara unormowana do jedynki w klasie zdarzeń losowych. Okazało się, że wariancja zmiennej losowej wyraża się za pomocą pewnej całki, więc zmienna ta jest punktem przestrzeni Hilberta. Drugie z zastosowań dotyczy klasycznej mechaniki kwantowej, w której funkcja stanu jest punktem przestrzeni unitarnej, czyli przestrzeni Hilberta pozbawionej aksjomatu zupełności. W centrum zainteresowania znajdują się operatory w przestrzeni funkcji stanu. Okazuje się, że słynna zasada nieoznaczoności Heisenberga w odniesieniu do operatorów położenia i pędu sprowadza się do pewnej nierówności, wynikającej z zespolonej postaci nierówności Schwarza.

Od lewej: prof. Julian Musielak, dziekan Wydziału Matematyki, Informatyki i Ekonometrii UZ prof. Andrzej Cegielski, Rektor UZ prof. Czesław Osękowski

Do badań w tym kierunku dołączył w latach 1907–1913 ([17]–[20]) młody matematyk węgierski, Fryderyk Riesz, który w badaniach Hilberta zastąpił kwadrat potęgą $p \geq 1$, rezygnując tym samym z pojęcia kąta. Teorię równań całkowych Hilberta–Schmidta zastąpił teorią operatora liniowego, nazwaną teorią Riesza. Niezależnie od tego, w czterech pracach ([8],[9]) z lat 1904–1907 badania abstrakcyjnych przestrzeni liniowych podjął francuski matematyk Maurice Fréchet. Wreszcie w roku 1914 niemiecki matematyk Felix Hausdorff opublikował dzieło „Grundzüge der Mengenlehre" [10], wprowadzając i rozwijając teorię przestrzeni metrycznych. Tym można zamknąć okres powstawania nowego kierunku badań w matematyce, który zresztą nie nosił wówczas nazwy analiza funkcjonalna. Z inicjatywy Frécheta, kierunek ten nazywano teorią operacji liniowych. W okresie pierwszej wojny światowej nie ukazała się żadna istotna dla nowej dziedziny publikacja.

Po wojnie badania zostały podjęte na nowo. Podstawowym problemem było stworzenie optymalnej definicji przestrzeni. Powinna ona mieć dwie cechy. Po pierwsze, winna opierać się na możliwie prostym systemie aksjomatów, dających się łatwo zinterpretować geometrycznie. Po drugie, winna prowadzić do wielu niebanalnych zastosowań w różnych dziedzinach matematyki, także poza tak zw. matematyką czystą. Udało się to zrobić we Lwowie, mieście o dużych tradycjach w Polsce, która właśnie odzyskała niepodległość. Łączą się z tym dwa wielkie nazwiska: Hugona Steinhausa i Stefana Banacha. Można by powiedzieć, że Steinhaus wynalazł Banacha, a Banach wynalazł właściwe podejście do teorii operacji liniowych. Stało się to już w jego pracy doktorskiej, opublikowanej we roku 1922 w Fundamenta Mathematica [1]. Tytuł tej pracy Banacha, „Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intérgales" mówi, że badania teoretyczne łączył on z zastosowaniami do równań całkowych, nawiązując wyraźnie do swych wielkich poprzedników. Rozwinął to w swojej fundamentalnej monografii „Teoria operacyj, Tom I" z roku 1931 [2] i jej rozszerzonej wersji „Théorie des opérations linéaires" z roku 1932 [3].

Podstawowa definicja przestrzeni Banacha jako zupełnej przestrzeni liniowej z aksjomatycznie określonym pojęciem długości wektora (normy) okazała się niezwykle efektywna. Umożliwiła budowę teorii, zawierającej głębokie twierdzenia, a równocześnie mającej rozległe zastosowania i inspirującej nowe pytania w matematyce. Z wyników Banacha wymienię podstawowe trzy zasady: jednostajnej ograniczoności, odwzorowania otwartego oraz twierdzenie o rozszerzaniu funkcjonału liniowego. Charakterystyczne jest m.in. stosowanie tak zw. metody generycznej, polegającej na wyodrębnieniu zbiorów „małych" i „dużych" w sensie ich kategorii. Szczególnie ważną rolę pełniły funkcjonały liniowe ciągłe nad przestrzenią Banacha X, tj. funkcje addytywne, jednorodne i ciągłe nad taką przestrzenią, o wartościach liczbowych. Ich zbiór X' stanowi też przestrzeń Banacha, zwaną przestrzenią sprzężoną do X, a parę (X, X') nazywa się parą dualną. Jeżeli X jest przestrzenią Hilberta, to przestrzeń sprzężona X' jest jakby fotograficzną kopią X, nie różnią się one od siebie żadnymi istotnymi własnościami. W ogólnym przypadku przestrzeni Banacha wcale tak być nie musi. Teorię operacji można przyrównać do sztuki dramatycznej. Sceną jest zadana przestrzeń X, a własności jej to rekwizyty sceny. Aktorami w sztuce są operatory liniowe ciągłe z jednej przestrzeni X do drugiej, Y. Akcja, tocząca się między operatorami podlega konwencji, której ramami są rekwizyty, czyli własności obu przestrzeni X i Y. Gdy aktorów jest wielu, np. cały ciąg operatorów, to rośnie dynamika akcji. Ważna jest nie tylko sama akcja, ale także elegancja dowodów, czyli wartość estetyczna sztuki. Stosując otrzymane w pełnej ogólności wyniki do przypadków konkretnych przestrzeni i operatorów, uzyskuje się szeroki wachlarz istotnych zastosowań w takich dziedzinach, jak równania całkowe i różniczkowe, teoria aproksymacji, teoria interpolacji, teoria sumowalności i inne.

We Lwowie powstała ceniona w świecie polska szkoła analizy funkcjonalnej, a szczegóły jej działalności są dobrze znane. Można uznać, że ten drugi etap rozwoju teorii operacji liniowych zakończył się wybuchem drugiej wojny światowej. Teoria ta w swych dwóch pierwszych okresach była genialnym dziełem nauki europejskiej. Na zachodzie do jej powstania przyczynili się głównie Francuzi i Niemcy, na wschodzie Polacy i Węgrzy. Zresztą także inne działy matematyki nowoczesnej powstały w Europie. Teorię miary i całki tworzyli wtedy Francuzi, Włosi i Rosjanie, topologią zajmowali się, prócz Francuzów i Niemców także Polacy, Czesi i Rosjanie. W Anglii ogromną rolę odegrał G.H. Hardy i jego szkoła, pod której wpływem byli uczeni hinduscy. Wreszcie w Anglii, Niemczech, Austrii i Polsce rozwinięto istotnie logikę matematyczną. Tę listę można by przedłużyć wskazując dalsze dziedziny i kraje.

W dniu 1 września 1939 roku o godzinie 4.45 rano z niemieckiego pancernika „Schleswig Holstein" spadły pierwsze pociski na polską bazę wojskową Westerplatte na terenie Wolnego Miasta Gdańska. Rozpoczęła się druga wojna światowa. Skończyły się normalne warunki pracy matematyków z objętych nią krajów, a zwłaszcza matematyków szkoły polskiej. Najcięższy los spotkał tych z nich, którzy byli pochodzenia żydowskiego, a było ich wówczas wielu. Wspomnę tylko o jednej historii, o której opowiedziała mi pani Zofia Orlicz, wdowa po profesorze Władysławie Orliczu. Było to we Lwowie, za czasów okupacji niemieckiej tego miasta. Do mieszkania Orliczów przyszedł Juliusz Schauder, jeden z wybitnych twórców w dziedzinie teorii operacji i jej zastosowań. Czas płynął szybko na rozmowie, a gdy miało się ku wieczorowi, Schauder zaczął się żegnać. Orliczowie zaproponowali mu, by został na noc, bo gdzieś w pobliżu jest łapanka. Schauder mieszkał jednak nie daleko, to też pożegnał się i wyszedł. To był ostatni raz, jak go widziano. Został schwytany i zabity przez okupantów. To tylko jeden przypadek, nie ma potrzeby wymieniać tu litanii dalszych nazwisk.

Tuż przed drugą wojną światową powstała w Paryżu grupa matematyków, która podjęła zasadniczy program reformy matematyki. Byli to H. Cartan, J. Dieudonné i A. Weil. Publikowali wspólnie pod pseudonimem N. Bourbaki, to też nazywano ich bourbakistami. Jedną z pierwszych publikacji jaką wydali była praca „Sur les espaces de Banach", wydrukowana w Sprawozdaniach Paryskiej Akademii Nauk w roku 1939 [4]. Po wojnie wydali szereg monografii z różnych dziedzin matematyki, m.in. z teorii mnogości, algebry, teorii całki, teorii operacji ([5],[6]). W ich mniemaniu matematykę należało rozumieć jako teorią różnych struktur, rozpatrywanych w sensie abstrakcyjnym. Uważali, że już dzieci szkolne powinno się nauczać matematyki na szczeblu możliwie abstrakcyjnym. W teorii operacji miejsce przestrzeni Banacha zajęło ogólniejsze pojęcie lokalnie wypukłej przestrzeni liniowo topologicznej, pochodzące od J. von Neumanna z roku 1935 [16]. Działania bourbakistów miały charakter zbliżający je do systemów ideologicznych, choć nie miały związku z ideologiami politycznymi, którymi przesiąknięte były owe czasy. Generalnie mówiąc, projekt wprowadzenia tzw. „nowej matematyki" nie udał się, rozsadziły go wpierw teoria prawdopodobieństwa, a na końcu przede wszystkim metody numeryczne. Jednak w tej grupie urodziło się po wojnie dzieło o zasadniczym znaczeniu. W latach 1950 i 1951 matematyk francuski Laurent Schwartz, nawiązujący do grupy bourbakistowskiej, opublikował w Paryżu dwa tomy książki „Théorie des distributions" [21]. Chodziło przede wszystkim o problem funkcji nie różniczkowalnych. Już S. L. Sobolew w roku 1936 wprowadził pojęcie pochodnych uogólnionych, przy okazji badań w dziedzinie równań różniczkowych cząstkowych. Schwartz postawił problem w sposób ogólniejszy: być może nieróżniczkowalność niektórych funkcji ciągłych spowodowana jest tym, że w ogóle zasób funkcji jest zbyt wąski, pochodne te istnieją, ale nie są funkcjami. Paradoksalnie, zaczął od zawężania przestrzeni i wzmacniania topologii. Jako punkt wyjścia przyjął przestrzeń D, której elementami (punktami) są nieskończenie różniczkowalne funkcje o zwartych nośnikach i wartościach liczbowych. W parze dualnej (X, X'), im mniejsze jest X, tym większe jest X'. W tym przypadku przestrzeń D' okazała się bardzo duża, zawierała wszystkie funkcje lokalnie całkowalne, a nadto funkcje uogólnione typu Diraca i wiele innych. Schwartz nazwał elementy D' dystrybucjami. Okazało się, że każda z nich ma pochodne wszystkich rzędów, należące znowu do D', różniczkowanie jest operacją ciągłą, przestrzenie D i D' są lokalnie wypukłe, ale nie są metryzowalne. Dystrybucje to była rewelacja nie tylko w teorii, ale także w zastosowaniach do równań różniczkowych.

Krótko przed wojną została wprowadzona dla teorii operacji nazwa analiza funkcjonalna. O ile mi wiadomo, pierwszy użył tej nazwy S.L. Sobolew w pracy w Matem. Sborniku [22] w roku 1938. Nazwy tej użyli też autorzy monografii w języku rosyjskim L.W. Kantorowicz, B.Z. Wulich i A.G. Pinsker w roku 1950 [13] oraz L.A. Lusternik i W.I. Sobolew w roku 1951 [14]. Tej samej nazwy użył już w swej monografii z roku 1948 Amerykanin Einar Hille [12]. Natomiast Amerykanie N. Dunford i J.T. Schwarz pozostali w swej trójtomowej monografii z lat 1958, 1963 i 1971 [7] przy nazwie „Linear operators". Nazwa analiza funkcjonalna jest nieco myląca, bo sugeruje, że jest to analiza funkcjonałów. To nie jest zgodne z faktycznym jej zakresem, który jest znacznie obszerniejszy i obejmuje też operacje względnie operatory. Jednak nazwa analiza funkcjonalna przyjęła się ogólnie i korzystają z niej także czasopisma takie, jak Mathematical Reviews czy Zentralblatt für Mathematik.

Dodam jeszcze, co stało się po drugiej wojnie światowej z polską szkołą analizy funkcjonalnej. Banach zmarł wkrótce, w roku 1945, we Lwowie i jest pochowany tamże na Cmentarzu Łyczakowskim. Steinhaus przeniósł się do Wrocławia, gdzie utworzył szkołę matematyczną, ukierunkowaną na teorię miary i całki, probabilistykę i zastosowania matematyki. Dwaj wybitni uczniowie Banacha, Stanisław Mazur i Władysław Orlicz, przenieśli się odpowiednio do Warszawy i do Poznania, zresztą Orlicz był już profesorem w Poznaniu od roku 1937. Obydwaj utworzyli w swych nowych miejscach pobytu szkoły naukowe z analizy funkcjonalnej, działające po dziś dzień. Do badań w tej dziedzinie dołączyły młodsze środowiska naukowe. W szczególności należy do nich środowisko zielonogórskie, znane przede wszystkim z zastosowań analizy funkcjonalnej do równań różniczkowych i ich uogólnień oraz do problematyki różnych topologii w przestrzeniach funkcyjnych. Na zakończenie spróbuję ustosunkować się do pytania, czy analizę funkcjonalną należy zaliczyć do matematyki czystej, czy też stosowanej. Podróżując po Niemczech Zachodnich w latach osiemdziesiątych z wykładami, zauważyłem, że w Bonn analizę funkcjonalną zaliczano do matematyki czystej, a w Saarbrücken do stosowanej. Spytałem gospodarzy, jaki jest ku temu powód. Dostałem odpowiedź: bo matematyka stosowana jest lepiej dotowana.

Bibliografia

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Math. **3** (1922), 133–181.

[2] S. Banach, *Teoria operacyj, Tom I, Operacje liniowe*, Kasa im. Mianowskiego, Warszawa 1931.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne I, Warszawa 1932.

[4] N. Bourbaki, *Sur les espaces de Banach*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 206 (1939).

[5] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Livre V, Espaces vectoriels topologiques*, Paris 1953, 1955.

[6] N. Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris 1960.

[7] N. Dunford, J.T. Schwarz, *Linear operators I–III*, Interscience, New York 1958, 1963, 1971.

[8] M. Fréchet, *Sur les opérations linéaires, I–III*, Transactions Amer. Math. Soc. **5** (1904), 493–499, **6** (1905), 134–140, **8** (1907), 433–446.

[9] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti Circ. Mat. Palermo **22** (1906), 1–74.

[10] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[11] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Teorie der linearnen Integralgleichungen, I–VI*, Nachrichten Acad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1904), 49–91, (1905), 213–259, (1905), 307–338, (1906), 157–227, (1906), 439–480, (1910), 355–417.

[12] E. Hille, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 31, New York 1948.

[13] L. W. Kantorowicz, B. Z. Wulih, A. G. Pinsker, *Analiza funkcjonalna w przestrzeniach częściowo uporządkowanych*, Moskwa-Leningrad 1950 (po rosyjsku).

[14] L. A. Lusternik, W. I. Sobolew, *Elementy analizy funkcjonalnej*, Moskwa-Leningrad 1951 (po rosyjsku).

[15] J. Musielak, *On the history of functional analysis*, Opuscula Math. **13** (1993), 27–36.

[16] J. v. Neumann, *On complete topological spaces*, Transactions Amer. Math. Soc. **37** (1935), 1–20.

[17] F. Riesz, *Sur les systémes orthogonaux de fonctions*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **144** (1907), 615–619.

[18] F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **149** (1909), 974–977.

[19] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Annalen **69** (1910), 449–497.

[20] F. Riesz, *Les systémes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Gauthier-Villars*, Paris 1913.
[21] L. Schwartz, *Théorie des distributions, I-II*, Paris 1950, 1951.
[22] S. L. Sobolew, *O pewnym twierdzeniu w analizie funkcjonalnej*, Matem. Sbornik **4** (1938), 471–497 (po rosyjsku).

Julian Musielak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza
ul. Umultowska 87
61–614 Poznań