



## Modelowanie sił tłumiących występujących w prostych układach MEMS

KAMIL URBANOWICZ

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie,  
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Mechatroniki,  
Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, 70-310 Szczecin, Al. Piastów 19,  
kamil.urbanowicz@zut.edu.pl

**Streszczenie.** W mikroukładach mechanicznych określanych skrótem MEMS występują pewne siły tłumiące. Na etapie projektowania układów tego typu wartości tych sił muszą zostać dokładnie oszacowane. Jak ukazane zostanie w niniejszej pracy, w układach pracujących z niskimi częstotliwościami najważniejszą siłą będzie siła lepka związana z wypływaniem filmu powietrznego spod pracujących płytek układów. Siłę tę można z dużą dokładnością szacować metodami analitycznymi znanymi z literatury. W poniższej pracy ukazane zostaną znane rozwiązania analityczne stosowane często w praktyce dla prostych płytek. Wykonane zostaną również proste symulacje zarówno z wykorzystaniem opisanych rozwiązań analitycznych, jak i z użyciem specjalistycznego programu o nazwie Comsol Multiphysics. Przeprowadzone badania analityczno-numeryczne wykażą skuteczność oprogramowania numerycznego.

**Słowa kluczowe:** MEMS, siły tłumiące, równanie Reynoldsa, modelowanie, symulowanie  
**DOI:** 10.5604/12345865.1186348

### 1. Wprowadzenie

Siły powierzchniowe pomijane w standardowych maszynach odgrywają główną rolę w mikroukładach. Natomiast siły masowe, które są kluczowe w powszechnych urządzeniach w skali makro w układach MEMS (mikroelektromechanicznych), cechujące się bardzo małymi wymiarami, pełnią rolę prowizoryczną.

Powietrze otaczające ruchome elementy układów MEMS oddziałuje na nie w postaci siły tłumiącej. Tłumienie to wywiera istotny wpływ na osiągi, konstrukcję

i sterowanie układów MEMS. Dla przykładu w mikroprzyspieszomierzach wysokie tłumienie (prawie krytyczne) jest pożądane w celu zapobiegania pojawianiu się odpowiedzi w postaci wysokich rezonansów, które mogłyby być przyczyną poważnych mechanicznych uszkodzeń tych czujników. W innych układach MEMS, w których tłumienie nie jest pożądane, wykonuje się w płytkach różnego rodzaju perforacje, których zadaniem jest redukcja siły tłumiącej.

Zrozumienie mechanizmu tłumienia w urządzeniach MEMS jest sprawą zasadniczą na etapie optymalizacji ich konstrukcji. Istnieje kilka mechanizmów odpowiedzialnych za dyssypację energii w tych urządzeniach [1-6]. Wśród nich tłumienie lepkie i sprężyste związane z oddziaływaniem filmu powietrznego na ruchomą płytkę układu MEMS jest mechanizmem dominującym i dlatego niniejsza praca dotyczyć będzie właśnie nich. W literaturze dotyczącej tego zagadnienia [3-5] jednoznacznie wykazano, że tłumiąca siła lepka dominuje przy niskich częstotliwościach drgań płytki, natomiast sprężysta przy wysokich.

Modelowanie oddziaływania filmu powietrznego dokonuje się poprzez wykorzystanie równania Reynoldsa. Równanie to może zostać wyprowadzone z równań Naviera-Stokesa i ciągłości [2] lub w prostszy bezpośredni sposób z zasad przepływu lepkiego w połączeniu z zasadą zachowania masy [2, 4]. Główne założenie przy wyprowadzaniu równania Reynoldsa polega na tym, że gaz znajdujący się w przestrzeni pomiędzy płytkami traktuje się jako ośrodek ciągły.

W niniejszej pracy porównane zostaną wyniki znanych prostych analitycznych rozwiązań równania Reynoldsa z wynikami uzyskanymi z wykorzystaniem predyktowanego modułu MEMS będącego komponentem programu Comsol Multiphysics. Porównania pozwolą odpowiedzieć na pytanie, z jaką dokładnością można modelować siły tłumiące występujące w urządzeniach MEMS z wykorzystaniem wspomnianego programu.

## 2. Podstawowe równania

Na zachowanie się filmu powietrznego wpływa przede wszystkim lepkość oraz bezwładność. Jednak w związku z tym, że urządzenia MEMS reprezentowane są bardzo małymi wymiarami, często wpływ bezwładności jest pomijany. Można wówczas zachowanie się płynu opisać dobrze znanym równaniem Reynoldsa. Wspomniane równanie zostało wyprowadzone na potrzeby teorii smarowania ponad wiek temu [7].

Najbardziej powszechna obecnie postać opracowanych wtedy zależności dla ściśliwego gazu w postaci różniczkowego nieliniowego równania została opracowana w roku 1954 przez Tipeia [8]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 6 \left[ 2 \frac{\partial(h\rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho h(u_1 + u_2)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho h(v_1 + v_2)] \right], \quad (1)$$

gdzie:  $P$  — ciśnienie gazu;  
 $\rho$  — gęstość gazu;  
 $\mu$  — lepkość dynamiczna gazu;  
 $h$  — grubość warstwy płynu;  
 $u_1$  i  $u_2$  — prędkości w kierunku osi  $x$  odpowiednio górnej i dolnej płytki;  
 $v_1$  i  $v_2$  — prędkości w kierunku osi  $y$  tych dwóch płytek.

Równanie to opisuje ustalony przepływ płynu. Widać, że pomijany jest w nim wpływ zmian temperatury na grubości filmu.

W roku 1962 Langlois [9] wyprowadził ogólną postać równania Reynoldsa, bazując na równaniach Naviera-Stokesa i na ogólnych równaniach hydrodynamiki płynu lepkiego [10]. Wyprowadzone równania otrzymał po założeniu, że zmodyfikowane liczby Reynoldsa  $R_S$  i  $R_L$

$$R_S = \frac{\omega \rho h^2}{\mu} \ll 1, \quad R_L = \frac{V_L \rho h^2}{w \mu} \ll 1, \quad (2)$$

gdzie:  $\omega$  — jest promieniową częstotliwością oscylującej płytki;  $V_L$  — jest względną prędkością w kierunku poprzecznym;  $w$  — szerokością płytki,

są znacznie mniejsze od jedności. Warunek małej wartości liczby  $R_S$  jest równoznaczny z warunkiem „pominięcia wpływu bezwładności płynu”. W rzeczywistych układach warunek małej liczby  $R_S$  adekwatny jest dla większości MEMS-ów, ponadto ruchu w kierunku poprzecznym się nie uwzględnia. Stąd równanie Reynoldsa redukuje się do następującej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial(h\rho)}{\partial t}. \quad (3)$$

W urządzeniach MEMS zmiany temperatury są przeważnie pomijalnie małe, co związane jest z bardzo małymi wymiarami tych urządzeń. W warunkach izotermicznych zakłada się, że gęstość gazu  $\rho$  jest proporcjonalna do jego ciśnienia  $P$ . Stąd:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Ph^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Ph^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial(hP)}{\partial t}. \quad (4)$$

Powyższe nieliniowe równanie Reynoldsa jest zwykle wykorzystywane przy modelowaniu tłumienia związanego z istnieniem filmu powietrznego pomiędzy płytkami MEMS. W tym miejscu trzeba zauważyć, że ciśnienie  $P$  składa się z dwóch składników:  $P = P_a + p$ ;  $P_a$  — jest ciśnieniem otoczenia, a  $p$  — odchyłką ciśnienia spowodowaną wpływem filmu powietrznego.

W ruchu normalnym dwóch równoległych płytek  $h$  oraz  $\mu$  nie są funkcjami położenia. Wówczas przytoczone równanie (4) można skrócić do jednej z poniższych postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( P \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( P \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial(hP)}{\partial t} \quad (5a)$$

lub

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} P^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P^2 = \frac{24\mu}{h^3} \frac{\partial(hP)}{\partial t}. \quad (5b)$$

Jeśli ciśnienie zostanie znormalizowane przez ciśnienie otoczenia  $P_a$  ( $\tilde{P} = P / P_a$ ), oraz pozostałe zmienne również zostaną znormalizowane  $\tilde{x} = x / l$ ,  $\tilde{y} = y / l$ ;  $\tilde{h} = h / h_0$  i  $\tau = \omega t$  nieliniowe równanie Reynoldsa dla płytki oscylującej z małą częstotliwością wokół położenia równowagi można zapisać również w postaci bezwymiarowej:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{P}^2 + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{P}^2 = 2\sigma \frac{\partial(\tilde{h}\tilde{P})}{\partial \tau}. \quad (6)$$

Parametr  $\sigma$  w powyższym równaniu jest tzw. **liczbą ścisku**:

$$\sigma = \frac{12\mu\omega l^2}{P_a h_0^2}, \quad (7)$$

gdzie:  $l$  — jest typową długością (w przypadku płytki prostokątnej jej szerokością „ $w$ ”, w przypadku płytki okrągłej jej promieniem „ $r$ ” itd.).

## 2.1. Zlinearyzowane równanie Reynoldsa dla gazu ściśliwego

W przypadku bardzo małych przemieszczeń drgającej płytki wokół położenia równowagi ( $\Delta h \ll h_0$  i  $p \ll P_a$ ), równanie (5a) może zostać zlinearyzowane [11]:

$$P_a \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - \frac{12\mu}{h_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{12\mu p_a}{h_0^3} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (8)$$

Wykorzystując natomiast zmienne znormalizowane, zlinearyzowane równanie Reynoldsa dla gazu ściśliwego może być przekształcone do następującej bezwymiarowej postaci:

$$\left( \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \sigma \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} = \sigma \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau}. \quad (9)$$

W związku z założeniem procesu relaksacji podczas sprężania gazu w równaniach (8) i (9) można uważać, że założono ściśliwość gazu. Stopień sprężenia gazu jest powiązany z liczbą ścisku (*squeeze number*)  $\sigma$ . Dla bardzo dużej wartości liczby ścisku  $\sigma$ , z równania (8), otrzyma się  $P_a \Delta h + h_0 \Delta p = 0$ . Ten związek jest równoważny z prawem Boyla,  $PV = \text{const.}$ , co oznacza tyle, że gaz stanowiący film gazowy jest w pełni sprężony, bowiem nie zdążył wypłynąć (wyciec) spod płytek podczas sprężania z wysoką częstotliwością lub w wyniku szybkiego oddziaływania ściskającego.

## 2.2. Zlinearyzowane równanie Reynoldsa dla gazu nieściśliwego

Dla bardzo małych wartości liczby ścisku  $\sigma$  gaz w filmie gazowym ma wystarczająco dużo czasu, by „wyciec” spod płytek, tym samym nie zostaje odpowiednio sprężony. W związku z brakiem ściskania gazu można go traktować jako nieściśliwy, wówczas  $\Delta p/P_a \ll \Delta h/h_0$ . W tych warunkach równanie (8) zredukuje się do następującej prostszej postaci:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (10)$$

lub zapisując w postaci bezwymiarowej do:

$$\left( \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{y}^2} \right) = \sigma \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau}. \quad (11)$$

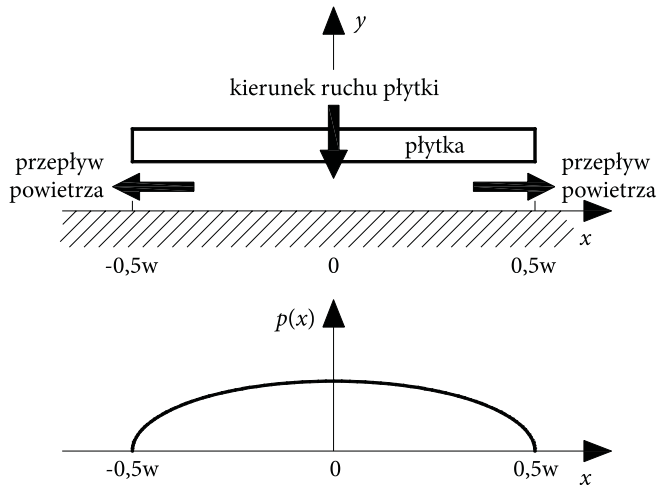
Powyższe równania (10) i (11) można wykorzystać w urządzeniach MEMS charakteryzujących się niskimi częstotliwościami pracy.

## 3. Tłumienie związane z istnieniem filmu powietrznego

### 3.1. Lepka i sprężysta siła tłumiąca

Dla pary równoległych płytek pokazanych na rysunku 1 siła oporu działająca normalnie przeciwnie do nieruchomej płytki związana jest z występowaniem

zmiennego tłumiącego ciśnienia pomiędzy dwiema płytkami. Tłumiące ciśnienie składa się z dwóch głównych składników: składnika powodującego lepki przepływ powietrza w momencie, gdy powietrze jest wyciskane na zewnątrz (lub zasysane do środka) z obszaru spod płytek, oraz składnika wywołującego kompresję (sprężanie) filmu powietrznego. Składnik siły związany z przepływem lepkiem można nazywać **lepką siłą tłumiącą** (*viscous damping force*), a składnik związany ze sprężaniem powietrza można nazwać **sprężystą siłą tłumiącą** (*elastic damping force*).



Rys. 1. Tłumienie filmem powietrznym

Jeśli płytka oscyluje z niską częstotliwością lub przemieszcza się z małą prędkością, film powietrzny nie zostaje dostatecznie sprężony. W tym przypadku lepka siła tłumiąca jest siłą dominującą. Będzie to później szczegółowo wykazane, że siła lepka jest wprost proporcjonalna do prędkości ruchu płytki.

Natomiast jeśli płytka oscyluje z bardzo dużą częstotliwością lub porusza się z bardzo dużą prędkością, gaz znajdujący się pomiędzy płytkami (tzw. film gazowy) zostaje skompresowany i tym samym nie udaje mu się „wyciec” spod płytek. W tym przypadku film gazowy pracuje jak harmonijka, a siła sprężysta odgrywa główną rolę. Siła sprężysta jest wprost proporcjonalna do przemieszczenia płytki.

### 3.2. Siła tłumiąca płytek taśmowych

Za płytki taśmowe uważa się płytki, których długość  $L$  jest znacznie większa od szerokości  $w$ .

Korzystając z równania (4), przy założeniu, że odległość pomiędzy dwiema płytkami zmienia się w myśl poniższego równania:

$$h = h_0 (1 + \delta \cdot \cos \omega t). \quad (12)$$

Langlois [9] w 1962 roku rozwiązał równanie Reynoldsa dla  $\delta \ll 1$  wykorzystując teorię perturbacji. Unormowana siła tłumiąca  $\tilde{F}$  dla płytek taśmowych może być wyliczana z poniższego wzoru:

$$\tilde{F} = \delta (f_d(\sigma) \sin \omega t - f_e(\sigma) \cos \omega t). \quad (13a)$$

Pierwszy i drugi składnik powyższego wyrażenia matematycznego to odpowiednio bezwymiarowa **lepka i sprężysta siła tłumiąca**. Powyższe równanie (13a) można zapisać również w poniższej prostszej postaci:

$$\tilde{F} = \delta A(\sigma) \cos[\omega t + \varphi(\sigma)], \quad (13b)$$

gdzie:  $A(\sigma) = \sqrt{f_d(\sigma)^2 + f_e(\sigma)^2}$  jest amplitudą siły tłumiącej,  
a kąt  $\varphi(\sigma) = \arctan[f_d(\sigma) / f_e(\sigma)]$  jest opóźnieniem fazowym.

Finalne wzory na lepki  $f_d$  i sprężysty  $f_e$  składnik siły tłumiącej, które otrzymał Langloise, są następujące:

$$f_d(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \cdot \frac{\sinh \sqrt{\frac{\sigma}{2}} - \sin \sqrt{\frac{\sigma}{2}}}{\cosh \sqrt{\frac{\sigma}{2}} + \cos \sqrt{\frac{\sigma}{2}}}, \quad (14a)$$

$$f_e(\sigma) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \cdot \frac{\sinh \sqrt{\frac{\sigma}{2}} + \sin \sqrt{\frac{\sigma}{2}}}{\cosh \sqrt{\frac{\sigma}{2}} + \cos \sqrt{\frac{\sigma}{2}}}. \quad (14b)$$

W swojej pracy Langloise odkrył ponadto, że dla małych wartości liczby ścisiku  $\sigma < 2,5$  składniki opisujące siłę lepka i sprężystą można aproksymować w następujący sposób (rys. 2b):

$$f_d(\sigma) \approx \frac{\sigma}{12}, \quad (15a)$$

$$f_e(\sigma) \approx \frac{\sigma^2}{120}. \quad (15b)$$

Natomiast dla dużych wartości  $\sigma > 30$  poniższe uproszczone wzory są poprawne (rys. 2c):

$$f_d(\sigma) \approx \sqrt{2/\sigma}, \quad (16a)$$

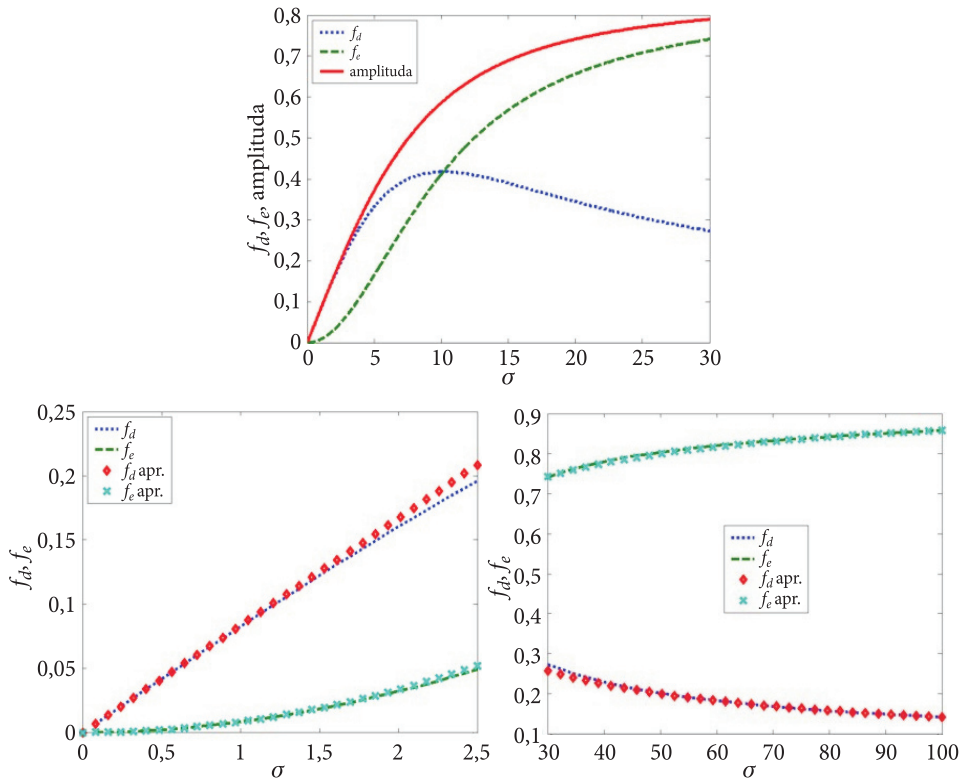
$$f_e(\sigma) \approx 1 - \sqrt{2/\sigma}. \quad (16b)$$

Na rysunku 2a przedstawiono przebieg składników siły (oraz amplitudy) będących funkcją liczby ścisisku  $\sigma$  w przypadku założenia ściśliwego filmu gazowego.

Wracając do rzeczywistych fizycznych wielkości (nieznormalizowanych), siła tłumiąca wyznaczana jest ze wzoru:

$$F = \tilde{F}P_a A = P_a A \delta (f_d(\sigma) \sin \omega t - f_e(\sigma) \cos \omega t), \quad (17)$$

gdzie:  $A$  — jest powierzchnią płytki (tzn.  $A = Lw$ ).



Rys. 2. Przebiegi lepkiego i sprężystego składnika siły tłumiącej w funkcji liczby ścisisku



Jeśli przemieszczenie płytki w odniesieniu do położenia równowagi oznaczy się jako  $y$ , otrzyma się  $y = h - h_0 = h_0 \delta \cos \omega t$  i  $\dot{y} = -h_0 \delta \omega \sin \omega t$ . Wówczas siła tłumiąca przyjmuje następującą postać:

$$F = \tilde{F} P_a A = -\frac{P_a A}{h_0} f_e(\sigma) y - \frac{P_a A}{h_0 \omega} f_d(\sigma) \dot{y} = -k_e y - c_d \dot{y}, \quad (18)$$

gdzie:  $k_e = P_a A f_e(\sigma) / h_0$  — jest współczynnikiem sprężystego tłumienia;  
 $c_d = P_a A f_d(\sigma) / (h_0 \omega)$  — jest współczynnikiem lepkiego tłumienia.

Wracając i uwzględniając zależności (17) i (18), widać, że:

gdy  $\sigma \ll \sigma_c$  to  $k_e \cong 0$  i  $c_d \cong (\mu L w^3 / h_0^3)$ ;

oraz gdy  $\sigma \gg \sigma_c$  to  $k_e \cong P_a A / h_0$  i  $c_d \cong 0$ .

Wielkość  $\sigma_c$  jest tak zwaną **liczbą ścisku odcięcia**. Występuje w momencie pojawienia się równości pomiędzy lepkim składnikiem siły a składnikiem sprężystym  $f_d = f_e$ . Z badań Langloisa dla płytek taśmowych wynika, że  $\sigma_c$  wynosi 10.1342 (rys. 2a).

### 3.3. Siła tłumiąca płytek prostokątnych

W 1983 roku Blech [11] pokazał rozwiązanie umożliwiające wyznaczanie składników siły tłumiącej występującej w układach wykorzystujących płytki MEMS o prostokątnej budowie (długość płytki  $L$  zbliżona do szerokości  $w$ ).

$$f_d(\sigma) = \frac{64\sigma}{\pi^6} \sum_{m,n \text{ odd}} \frac{m^2 + (n/\eta)^2}{(mn)^2 \left[ \left[ m^2 + (n/\eta)^2 \right]^2 + \sigma^2 / \pi^4 \right]} \quad (19a)$$

i

$$f_e(\sigma) = \frac{64\sigma^2}{\pi^8} \sum_{m,n \text{ odd}} \frac{1}{(mn)^2 \left[ \left[ m^2 + (n/\eta)^2 \right]^2 + \sigma^2 / \pi^4 \right]} \quad (19b)$$

Rozwiązanie Blecha ma obecnie szerokie zastosowania podczas projektowania układów MEMS. Z jego pracy wynikało ponadto, że liczba ścisku odcięcia dla płytek prostokątnych może zostać zapisana poniższą prostą zależnością:

$$\sigma_c = \pi^2 \left( 1 + \frac{1}{\eta^2} \right), \quad (20)$$

gdzie:  $\eta = L/w$  — jest współczynnikiem kształtu płytki.

Ostatnio Darling i in. [12] wyprowadzili identyczne wzory co wzory (19a) i (19b), wykorzystując metodę opartą na funkcji Greena. Dzięki temu podejściu istniała możliwość zastosowania wielu różnych warunków brzegowych z większą niż wcześniej łatwością. Przykładowo przez grupę tych badaczy badany był problem wpływu filmu powietrznego przy jednym z brzegów zamkniętym, dwóch brzegach zamkniętych itd.

Stosując podobny sposób jak przy wyznaczaniu wzoru (18), współczynnik lepkiej siły tłumiącej powietrznego filmu tłumiącego wynosi:

$$c_d(\sigma) = \frac{64\sigma p_a A}{\pi^6 h_0} \sum_{m,n \text{ odd}} \frac{m^2 + (n/\eta)^2}{(mn)^2 \left[ \left[ m^2 + (n/\eta)^2 \right]^2 + \sigma^2 / \pi^4 \right]}, \quad (21)$$

a współczynnik sprężystej siły tłumiącej:

$$k_e(\sigma) = \frac{64\sigma^2 p_a A}{\pi^8 h_0} \sum_{m,n \text{ odd}} \frac{1}{(mn)^2 \left[ \left[ m^2 + (n/\eta)^2 \right]^2 + \sigma^2 / \pi^4 \right]}. \quad (22)$$

Powyżej zaprezentowane równania są szeroko wykorzystywane w analizie tłumiących sił związanych z istnieniem filmu powietrznego w układach MEMS.

## 4. Współczynniki lepkiej siły tłumiącej dla filmu nieściśliwego

W praktyce duża część układów MEMS pracuje w niskich częstotliwościach. Wówczas najważniejsze jest oddziaływanie jedynie lepkiej siły tłumiącej. Film powietrzny w wyniku bardzo słabego sprężenia zakłada się jako „nieściśliwy”. Prawidłowe równanie opisujące taki stan to równanie Reynoldsa w postaci (10). Na jego bazie w literaturze współczynniki lepkiej siły tłumiącej zostały wyprowadzone dla różnych typowych płytek MEMS [4, 5, 9, 11-13].

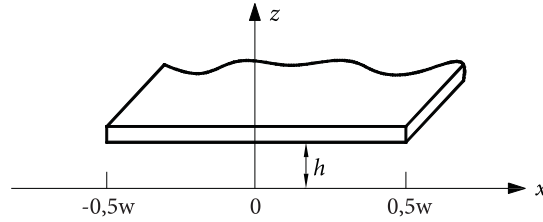
### 4.1. Płytki taśmowe (długie prostokątne)

W przypadku płytek taśmowych (rys. 3) zakładana długość  $L$  jest znacznie większa od szerokości  $w$ . Tłumiące ciśnienie można wyznaczyć bezpośrednio z scałkowania równania Reynoldsa (10) zapisanego w uproszczonej postaci:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (23)$$

dla następującego warunku brzegowego:

$$p(\pm 0,5w) = 0. \quad (24)$$



Rys. 3. Płytkę taśmowa (długa prostokątna)

Dwukrotne całkowanie równania (23) daje następujący wynik:

$$p(x,t) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2. \quad (25)$$

Wykorzystując warunki brzegowe (24), obliczono stałe całkowania. Ostateczne rozwiązanie ma następującą postać:

$$p(x,t) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \left( x^2 - \frac{w^2}{4} \right). \quad (26)$$

Ciśnienie  $p(x, t)$  przybiera wartość dodatnią, gdy film powietrzny jest ściskany ( $dh/dt < 0$ ), i ujemną w sytuacji odwrotnej. Maksymalne ciśnienie tłumiące występuje w środku płytki (dla  $x = 0$ ) i wynosi:

$$p(0,t) = \frac{3\mu w^2}{2h^3} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (27)$$

Siła tłumiąca  $F$  oddziałująca na płytkę wynosi:

$$F_t = \int_{-w/2}^{w/2} p(x) \cdot L \cdot dx = -\frac{\mu w^3 L}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\mu w^3 L}{h^3} \dot{h}. \quad (28)$$

Zgodnie z definicją siły tłumiącej  $F = -c \cdot \dot{x}$ , współczynnik siły tłumiącej dla długich płytek prostokątnych wynosi więc:

$$c_t = \frac{\mu w^3 L}{h^3}. \quad (29)$$

Wzory (28) i (29) zachowują swoją ważność tylko w przypadku, gdy długość płytki  $L$  jest znacznie większa niż jej szerokość  $w$ :

$$L \gg w. \quad (30)$$

#### 4.2. Płytki okrągłe

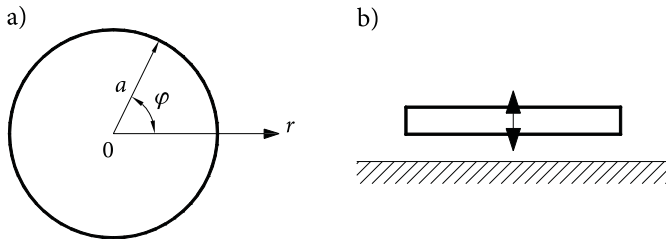
Dla płytek okrągłych (rys. 4) równanie Reynoldsa opisujące tłumienie filmem powietrznym można zapisać we współrzędnych biegunowych w postaci:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} p(r) \right) = \frac{12\mu}{h^3} \dot{h}. \quad (31)$$

wykorzystując następujące warunki brzegowe:

$$p(a) = 0, \quad \frac{dp}{dr}(0) = 0, \quad (32)$$

gdzie:  $a$  — jest promieniem płytki.



Rys. 4. Płytką kołową

Dwukrotne scałkowanie równania (31) da następujący wynik:

$$p(r, t) = \frac{3\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (33)$$

Wykorzystując warunki brzegowe (32), obliczono stałe całkowania. Ostateczne rozwiązanie ma następującą postać:

$$p(r, t) = \frac{3\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} (r^2 - a^2). \quad (34)$$

Maksymalne ciśnienie tłumiące występuje w środku płytki (dla  $r = 0$ ) i wynosi:

$$p(0,t) = -\frac{3\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} a^2. \quad (35)$$

Siła tłumiąca  $F$  oddziałująca na płytkę wynosi:

$$F_o = \int_0^a p(r) \cdot 2\pi r \cdot dr = -\frac{3\mu\pi}{2h^3} \frac{\partial h}{\partial t} a^4 = -\frac{3\mu A^2}{2\pi h^3} \dot{h}, \quad (36)$$

gdzie:  $A = \pi a^2$  — jest powierzchnią płytki.

Współczynnik siły tłumiącej wynosi:

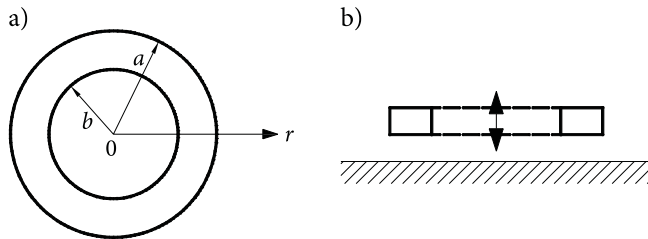
$$c_o = \frac{3\pi}{2h^3} \mu a^4 = \frac{3\mu A^2}{2\pi h^3}. \quad (37)$$

### 4.3. Płytki pierścieniowe

Wzór na siłę tłumiącą występującą w układach MEMS z płytkami pierścieniowymi (rys. 5) wyprowadza się z tego samego wzoru (31) co w przypadku płytek okrągłych, lecz z zachowaniem innych warunków brzegowych:

$$p(a) = 0; \quad p(b) = 0, \quad (38)$$

gdzie:  $a$  — promień zewnętrzny płytki;  
 $b$  — promień wycięcia w płytce.



Rys. 5. Płytką pierścieniową (okrągła z otworem)

Dwukrotne scałkowanie równania (31) oraz wykorzystanie powyższych warunków brzegowych (38) skutkuje następującym rozwiązaniem końcowym:

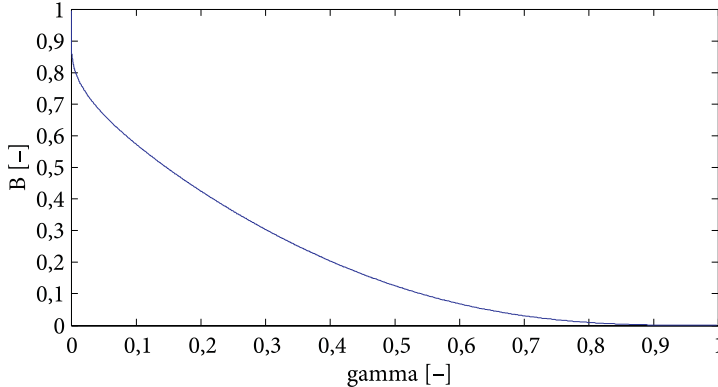
$$p(r,t) = \frac{3\mu}{h_0^3} \frac{\partial h}{\partial t} a^2 \left[ \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \left(\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}\right) - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \right]. \quad (39)$$

Siłę tłumiącą  $F$  wyznacza się z poniższego równania:

$$F_{pier} = \int_b^a p(r) \cdot 2\pi r \cdot dr = -\frac{3\mu\pi}{2h^3} \frac{\partial h}{\partial t} a^4 \cdot B(\gamma) = -\frac{3\mu A^2}{2\pi h^3} \dot{h} \cdot B(\gamma), \quad (40)$$

gdzie:  $\gamma = b/a$  oraz  $B(\gamma) = \left[ \frac{(1-\gamma^2)^2}{\ln \gamma} + 1 - \gamma^4 \right]$ .

Przebieg parametru  $B(\gamma)$  przedstawia poniższy rysunek 6.



Rys. 6. Przebieg parametru  $B(\gamma)$

Współczynnik siły tłumiącej w płytkach pierścieniowych wynosi:

$$c_{pier} = \frac{3\pi}{2h^3} \mu a^4 B(\gamma) = \frac{3\mu A^2}{2\pi h^3} B(\gamma). \quad (41)$$

#### 4.4. Płytki prostokątne

Uzyskanie rozwiązania dla płytek prostokątnych o porównywalnej szerokości  $w$  z długością  $L$  nie jest zagadnieniem tak prostym jak w przypadku prezentowanych uprzednio płytek. Znanych jest mimo to wiele rozwiązań: Blech [11], Bao [4, 5], Darling i in. [12]. Jako warunki brzegowe do wyprowadzenia rozwiązania równania (10) zakłada się:

$$p(\pm 0, 5w, y) = 0, \quad p(x, \pm 0, 5L) = 0. \quad (42)$$

Ostateczny wynik jest następujący:

$$p(x, y, t) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \left( x^2 - \frac{w^2}{4} \right) + \frac{48\mu w^2}{h^3 \pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{n\pi y}{w}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{w}\right)}{n^3 \cdot \cosh\left(\frac{n\pi L}{2w}\right)}. \quad (43)$$

Siła tłumiąca jest wyznaczana z poniższego równania:

$$F_p = \int_{-w/2}^{w/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} p(x, y) \cdot dy = -\frac{\mu w^3 L}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \cdot E(\lambda) = -\frac{\mu w^3 L}{h^3} \dot{h} \cdot E(\lambda), \quad (44)$$

gdzie:  $\lambda = w/L$  i  $E(\lambda) = 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \lambda \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{n\pi}{2\lambda}\right)$ .

Skomplikowany powyższy parametr  $E(\lambda)$  w przedziale od 0 do 1 ma charakter prawie liniowy, stąd w poniższej pracy aproksymowano go prostą liniową zależnością:

$$E(\lambda) = 1 - 0,58 \cdot \lambda. \quad (45)$$

Współczynnik siły tłumiącej można opisać poniższym równaniem:

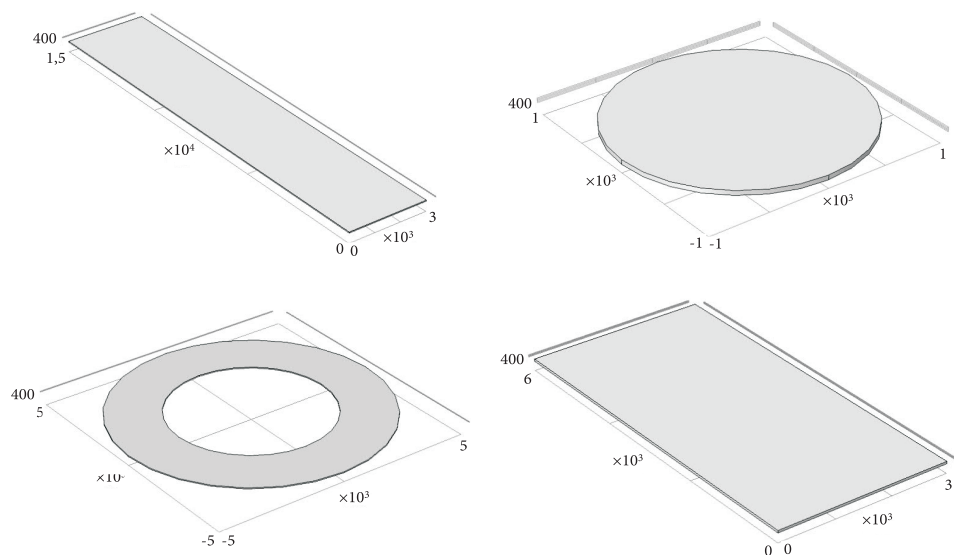
$$c_p = \frac{\mu L w^3}{h^3} E(\lambda). \quad (46)$$

## 5. Wyniki badań symulacyjno-analitycznych

Znajomość powyżej zaprezentowanych rozwiązań analitycznych umożliwia wstępną weryfikację specjalnego modułu MEMS będącego częścią programu Comsol Multiphysics. Badane zostaną siły tłumiące występujące na płytkach taśmowych, okrągłych, pierścieniowych i prostokątnych (rys. 7).

W zrealizowanych badaniach założono poniższe wartości najważniejszych wejściowych parametrów:

- szerość szczeliny powietrznej pomiędzy płytkami  $h_0 = 10$  [ $\mu\text{m}$ ];
- częstotliwość wymuszająca ruch płytki  $\omega = 2\pi \cdot 10^3$  [1/s];
- stałe maksymalne odchylenie ruchomej płytki od położenia początkowego  $\delta = 1$  [ $\mu\text{m}$ ];
- lepkość dynamiczna filmu powietrznego w temperaturze 20 stopni Celsjusza  $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$  [Pa·s];
- analizowany przedział czasowy będzie wynosił  $t = <0,4e-3>$  [s];



Rys. 7. Badane płytki w programie Comsol Multiphysics

f) ruch drgający płytki ruchomej:

$$h = h_0 + \delta \cdot \sin(\omega t); \quad (47)$$

g) pochodna funkcji  $h$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \dot{h} = \delta \cdot \omega \cdot \cos(\omega t). \quad (48)$$

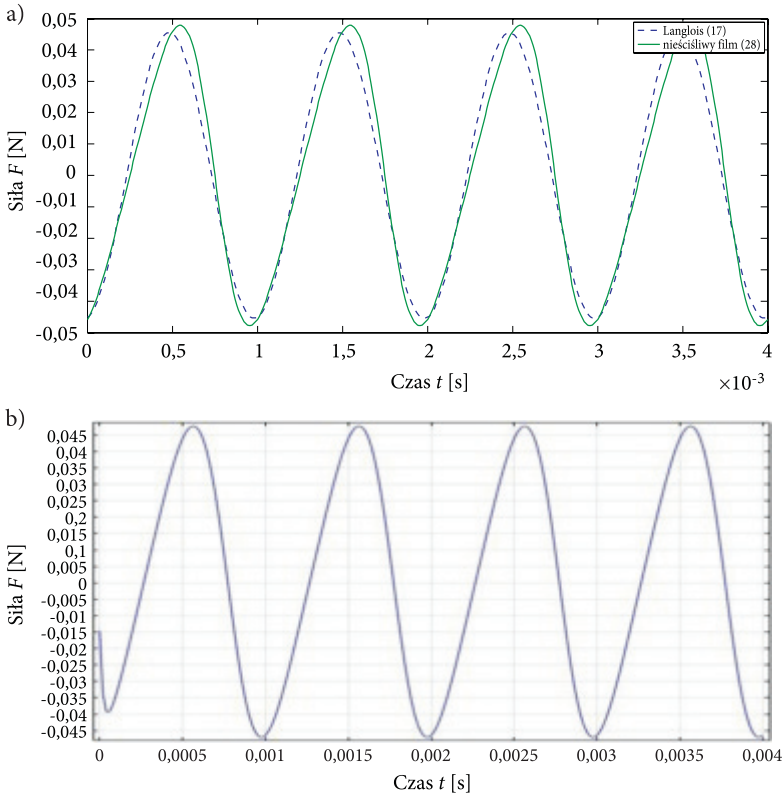
Wymiary badanych płytek przyjęto zgodnie z danymi zawartymi w tabeli 1. Otrzymane wyniki dla badanych płytek taśmowych (długich prostokątnych), okrągłych, pierścieniowych i prostokątnych przedstawione zostały na rysunkach 8-11.

TABELA 1

Wymiary badanych płytek

Rodzaj badanych płytek	Założone parametry
Płytki taśmowe (długie prostokątne)	$w = 3 \text{ mm}, L = 15 \text{ mm}$
Płytki okrągłe	$a = 1 \text{ mm}$
Płytki pierścieniowe	$a = 5 \text{ mm}, b = 3 \text{ mm}$
Płytki prostokątne	$w = 3 \text{ mm}, L = 6 \text{ mm}$

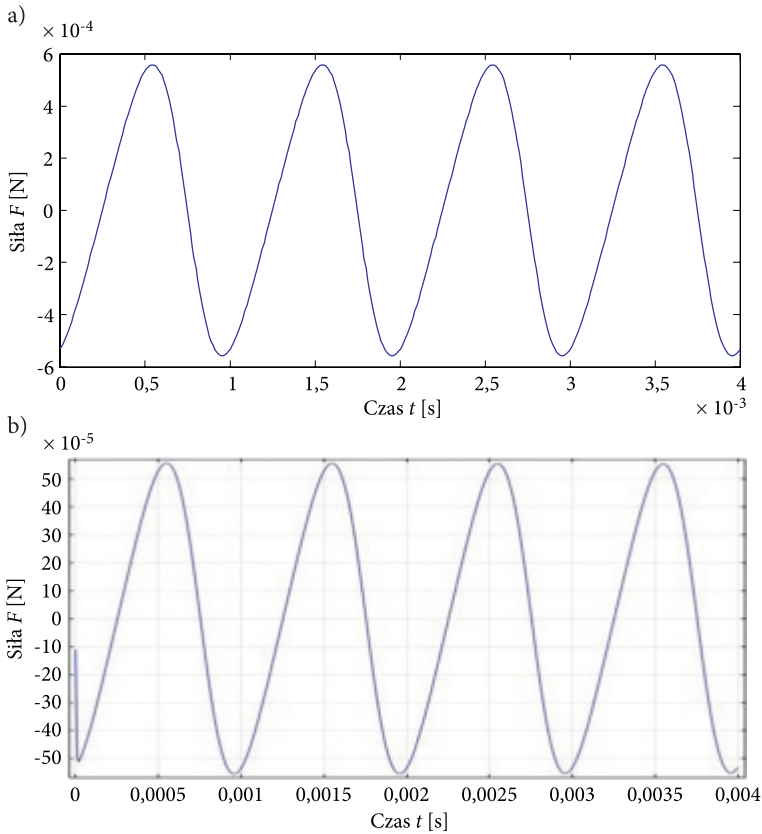




Rys. 8. Wyniki dla płytek taśmowych

Z powyżej przedstawionych wyników widać, że wyniki uzyskane dla płytek taśmowych z wykorzystaniem modułu MEMS (rys. 8b) programu Comsol Multiphysics ( $F_{\max} = 0,048$  N) są zbieżne z wynikami uzyskanymi uproszczoną metodą analityczną (rys. 8a). Maksymalna siła tłumiąca otrzymana uproszczoną metodą analityczną, w której założono nieściśliwość filmu powietrznego, wyniosła bowiem również 0,048 N. Maksymalna siła tłumiąca uzyskana natomiast z wykorzystaniem rozwiązania analitycznego dokładniejszego wg Langloisa (17) wskazuje natomiast na siłę maksymalną rzędu 0,0455 N (rys. 8a). Powyższy wynik sugeruje, że moduł MEMS może wykorzystywać gotowe znane rozwiązania analityczne, zamiast w sposób numeryczny rozwiązać pełne równanie Reynoldsa. Moduł ten nie uwzględnia tym samym wpływu ściśliwości filmu powietrznego.

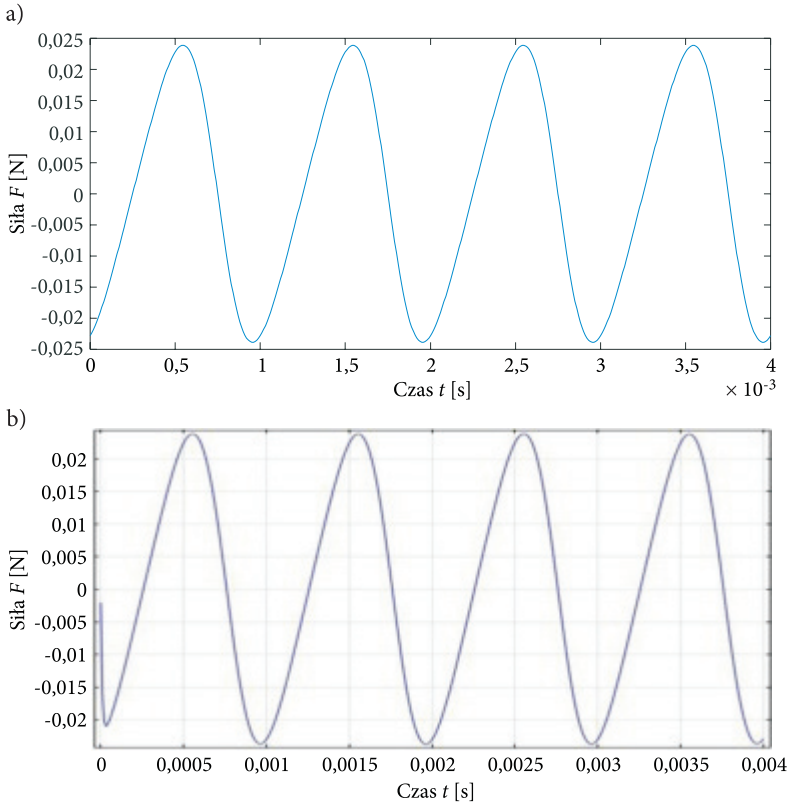
Maksymalna wartość siły tłumiącej dla analizowanych płytek okrągłych otrzymana z wykorzystaniem metody analitycznej wyniosła natomiast  $5,57 \cdot 10^{-4}$  N (rys. 9a). Tyle samo również i tym razem wyniosła maksymalna siła wyznaczona z wykorzystaniem modułu MEMS zaimplementowanego w programie Comsol (rys. 9b).



Rys. 9. Wyniki dla płytek okrągłych

Następnie badane były płytki pierścieniowe i jak poprzednio, tak i tym razem potwierdziło się, że wynik uzyskany z wykorzystaniem programu Comsol ( $F = 0,02385$  N) był prawie identyczny z wynikiem uzyskanym z uproszczonego rozwiązania analitycznego  $F = 0,0239$  N (rys. 10a i 10b).

W przypadku płytek prostokątnych zgodnie z wzorem (44) w obliczeniach analitycznych występuje parametr  $E(\lambda)$ . Współczynnik lambda będący ilorazem szerokości do długości płytki w powyższym przykładzie ( $w = 3$  mm i  $L = 6$  mm) wychodzi równy  $\lambda = 0,5$ , tym samym korzystając z równania (45), wartość współczynnika  $E$  wyniosła  $E(\lambda) = 0,71$ . W powyższym przypadku maksymalna siła wyznaczona z wykorzystaniem rozwiązania numerycznego (rys. 11b) wyniosła  $1,31 \cdot 10^{-2}$  N, natomiast maksymalna siła wyznaczona z pomocą uproszczonego rozwiązania (44) analitycznego  $1,36 \cdot 10^{-2}$  N (rys. 11a). Z wykorzystaniem rozwiązania dokładnego wg Blecha (19) otrzymamy maksymalną siłę rzędu  $1,3 \cdot 10^{-2}$  N (rys. 11a). Tym samym nie potwierdziły się przypuszczenia, że moduł MEMS bazuje jedynie na uproszczonych rozwiązaniach



Rys. 10. Wyniki dla płytek pierścieniowych

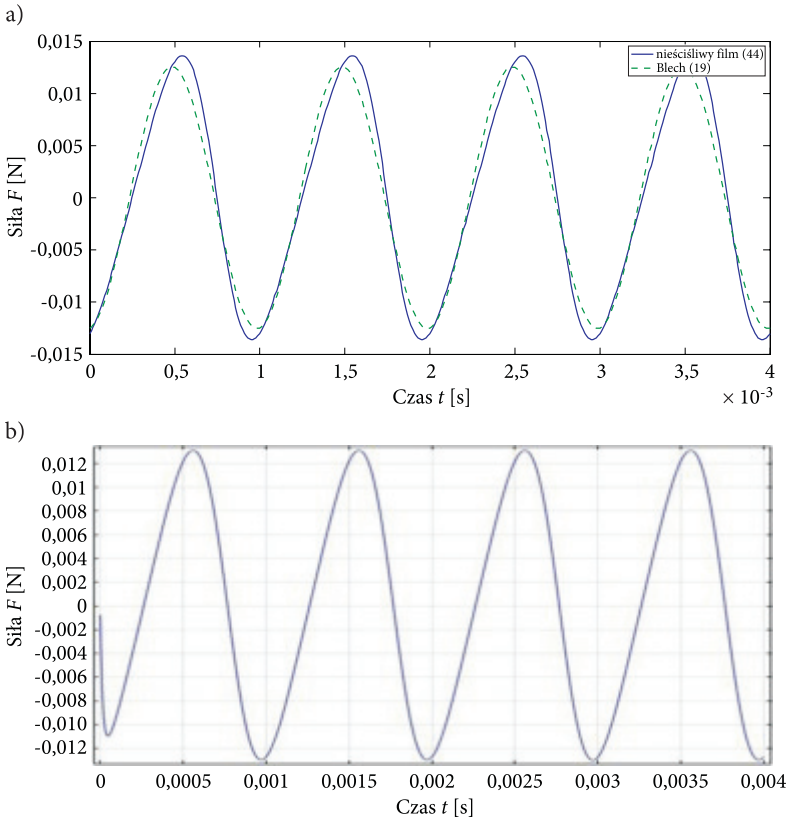
analitycznych. Potwierdzona natomiast została po raz kolejny przydatność modułu MEMS w modelowaniu sił tłumiących występujących w prostych układach.

Jak widać z powyżej zrealizowanych badań, moduł MEMS bardzo dobrze sprawdza się dla niskich częstotliwości i symuluje z dużą dokładnością przebieg zmiany siły tłumiącej.

Poza powyżej zrealizowanym cyklem prostych badań, przeprowadzono w niniejszej pracy jeszcze badania wykonane przy znacznie większej częstotliwości zbliżonej do częstotliwości odcięcia.

Zakładając w przykładzie z płytką prostokątną, że częstotliwość wymuszająca wynosi  $\omega = 2,23\pi \cdot 10^4$  [1/s] oraz czas trwania ruchu  $t = \langle 0,4e-4 \rangle$  [s], otrzyma się liczbę ścisku odcięcia  $\sigma_c = 13,62$ . Liczba ścisku odcięcia to ten moment, w którym wpływy lepkiej siły tłumiącej oraz sprężystej są równoważne, czyli de facto gdy:  $f_d \approx f_e$  (w tym przykładzie  $f_d = f_e = 0,375$ ).

Poniżej zaprezentowane są wyniki badań zrealizowanych dla liczby ścisku odcięcia (rys. 12).

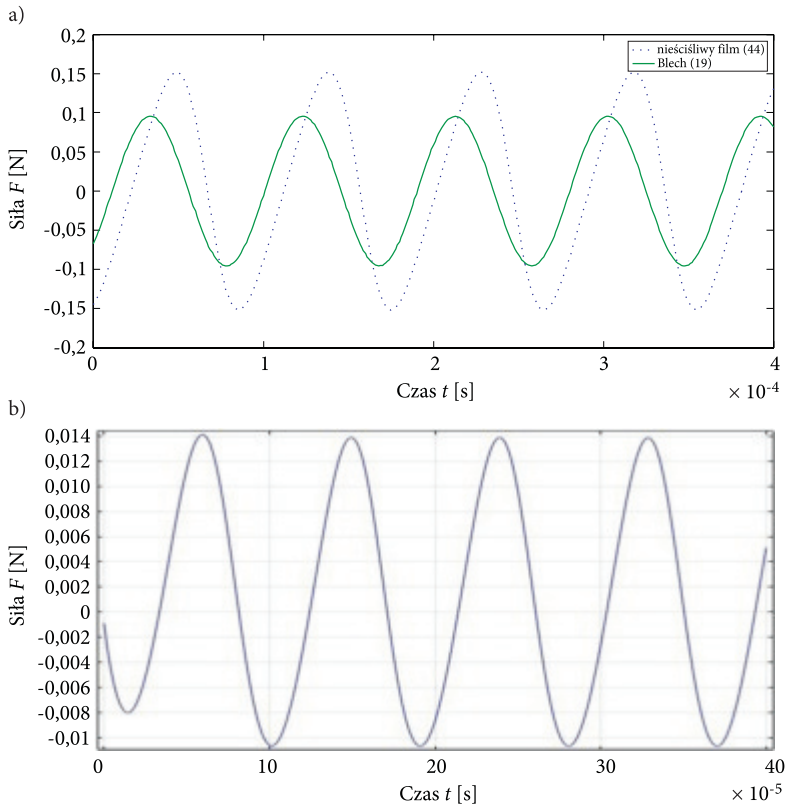


Rys. 11. Wyniki dla płytek prostokątnych

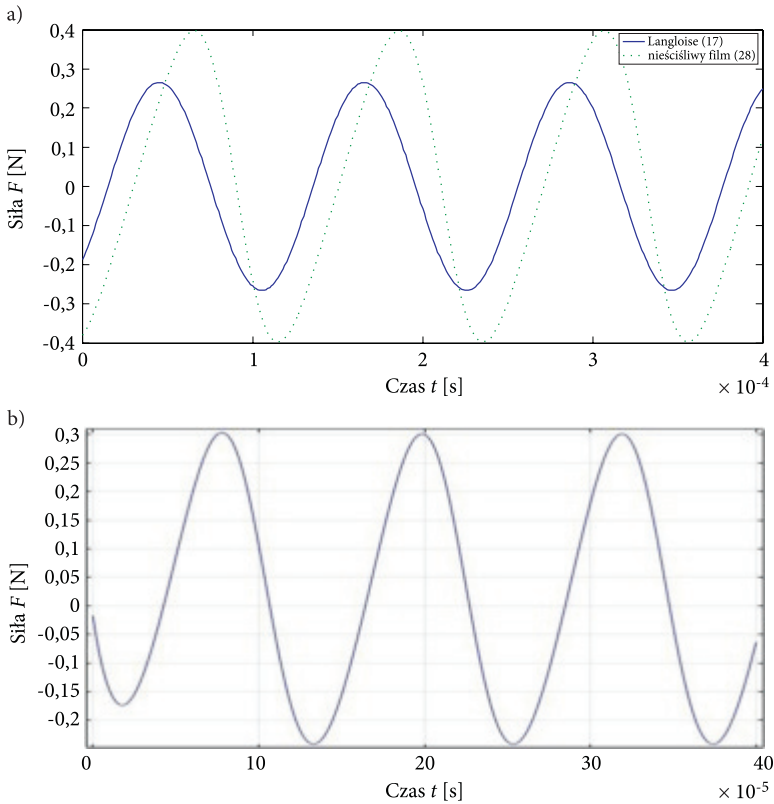
Z powyższych wyników widać, że obliczenia numeryczne (rys. 12b) wykonane przy dużych częstotliwościach dla płytek prostokątnych ( $F_{\max} = 0,14$  N) bardziej odpowiadały obliczeniom analitycznym (rys. 12a) z pominięciem wpływu sprężystości powietrza ( $F_{\max} = 0,15$  N) niż obliczeniom dokładnym z wykorzystaniem znanego dokładnego rozwiązania z 1983 roku wg Blecha ( $F_{\max} = 0,1$  N).

Podobne badania przy ustalonej liczbie ścisku równej liczbie odcięcia wykonano też dla płytek taśmowych ( $\omega = 1,65935\pi \cdot 10^4$  [1/s],  $t = <0,4e-4>$ ,  $\sigma_c = 13,62$ ,  $f_d = f_e = 0,4172$ ), a otrzymane rezultaty przedstawione zostały na rysunku 13.

Jak widać z przedstawionego wykresu, maksymalne wartości siły tłumiącej wynosiły ok. 0,266 N w rozwiązaniu dokładnym analitycznym (rys. 13a) wg Langloisa, natomiast w rozwiązaniu z nieściślym filmem powietrznym (rys. 13b) ok. 0,4 N, oraz 0,3 N w rozwiązaniu numerycznym (rys. 13b) z wykorzystaniem modułu MEMS programu Comsol Multiphysics.



Rys. 12. Wyniki dla płytek prostokątnych przy  $\sigma_c$

Rys. 13. Wyniki dla płytek taśmowych dla  $\sigma_c$ 

## 6. Wnioski

Modelowanie sił tłumiących związanych z istnieniem filmu powietrznego nie jest zagadnieniem prostym. Uprozczone rozwiązania analityczne na bazie równań Reynoldsa znane są jedynie dla płytek o prostych kształtach (taśmowe, prostokątne, kołowe, pierścieniowe). W przypadku bardziej złożonych kształtów w modelowaniu tego typu układów przydatne są symulacje numeryczne polegające na rozwiązywaniu równania Reynoldsa lub równań Naviera-Stokesa z wykorzystaniem metod numerycznych. Jak zawsze podczas modelowania tego typu trzeba wykorzystywać założenia upraszczające (zmiana bardzo skomplikowanych kształtów na prostsze, wprowadzanie stałych parametrów opisujących warunki brzegowe i ośrodek reprezentujący film powietrzny zamiast zakładania zmiennych ich wartości itp.). Obliczenia tego typu mogą być prowadzone obecnie z wykorzystaniem oprogramowania typu: ANSYS [14-21], COMSOL [22-24], CoventorWare [25-27], ELMER [28, 29], PHASTA (*parallel hierarchic adaptive stabilized transient analysis*) [30] oraz CFD-ACE

[31]. Należy pamiętać, że jeszcze nie dawno obliczenia numeryczne wpływu filmu powietrznego na tłumienie układów MEMS nie były możliwe z wykorzystaniem powyżej wspomnianych programów, więc jest to duże udogodnienie.

Zrealizowane badania z wykorzystaniem znanych rozwiązań analitycznych i modułu MEMS wykazały, że z dużą dokładnością można symulować siły tłumiące z wykorzystaniem programu Comsol Multiphysics. Pierwszy cykl badań wykonany został przy założeniu małej częstotliwości wymuszającej ruch górnej płytki. Otrzymane wyniki wskazywały, że prawdopodobnie moduł MEMS, zamiast w sposób numeryczny rozwiązywać pełne równanie Reynoldsa, wykorzystuje zaimplementowane przez programistów znane z literatury rozwiązania uproszczone. Przeprowadzone w drugim cyklu badania dodatkowe nie potwierdziły, ale również nie zaprzeczyły powyżej sformułowanej tezie. W przypadku płytek prostokątnych dla liczby ścisiku odcięcia uzyskano bowiem wyniki zbieżne do wyników uzyskiwanych z uproszczonego rozwiązania analitycznego, czyli dla filmu nieściśliwego. Natomiast w przypadku płytek taśmowych (długie prostokątne), również przy liczbie ścisiku odcięcia, zauważono, że wyniki symulacji komputerowych są bliższe ogólnemu rozwiązaniu Blecha niż rozwiązaniu uproszczonemu. Tym samym konieczne jest dalsze zbadanie możliwości programu Comsol Multiphysics, zanim będzie on wykorzystywany do modelowania sił tłumiących w układach charakteryzujących się złożonymi kształtami czy też z perforowanymi płytkami w celu obniżenia siły tłumiącej.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2014 jako projekt badawczy o numerze: N N503 319039.

Artykuł wpłynął do redakcji 8.12.2014 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 12.08.2015 r.

#### LITERATURA

- [1] TILMANS H.A., ELWESPOEK M., FLUITMAN J.H., *Micro resonant force gauges*, Sensors Actuators A, 30, 1992, 35-53.
- [2] HAMROCK B.J., SCHMID S.R., JACOBSON B.O., *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, second edition, CRC Press, 2004.
- [3] BAO M.H., *Micro Mechanical Transducers-Pressure Sensors, Accelerometers and Gyroscopes*, Chapter 3, Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [4] BAO M.H., *Analysis and Design Principles of MEMS Devices*, Chapter 3, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [5] BAO M., YANG H., *Squeeze film air damping in MEMS*, Sensors Actuators A, 136, 2007, 3-27.
- [6] KHONSARI M.M., BOOSER E.R., *Applied Tribology*, Wiley, New York, 2001.
- [7] REYNOLDS O., *On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. January 1, 177, 1886, 157-234.

- [8] TIPEI N., *Theory of lubrication, with applications to liquid- and gas-film lubrication*, Stanford University Press, 1962.
- [9] LANGLOIS W.E., *Isothermal squeeze films*, Quart. Appl. Math., XX (2), 1962, 131-150.
- [10] WHITE F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill Book Company, 1974.
- [11] BLECH J.J., *On isothermal squeeze films*, ASME J. Lubric. Technol., 105, 1983, 615-620.
- [12] DARLING R., HIVICK C., XU J., *Compact analytical modeling of squeeze film damping with arbitrary venting conditions using a Green's function approach*, Sens. Actuators A, 70, 1998, 32-41.
- [13] GRIFFIN W.S., RICHARSON H.H., YAMANAMI S., *A study of squeeze film damping*, ASME J. Basic Eng., 88, 1966, 451-456.
- [14] MOHITE S.S. et al., *A Compact Squeeze — Film Model Including Inertia, Compressibility, and Rarefaction Effects for Perforated 3-D MEMS Structures*, Journal of MEMS, 17 (3), June, 2008, 709-723.
- [15] HOULIHAN R., KRAFT M., *Modelling squeeze film effects in a MEMS accelerometer with a levitated proof mass*, J. of Micromech. and Microeng., 15, 2005, 893-902.
- [16] BAO et al., *Modified Reynolds' equation and analytical analysis of squeeze-film air damping of perforated structures*, J. of Micromech. and Microeng., 13, 2003, 795-800.
- [17] OSTERTGAARD D., MEHNER J., *Using a heat transfer analogy to solve for squeeze film damping and stiffness coefficients in MEMS structures*, January 23, 2003, online reference: <http://ansys.net/papers/mems/mems-thermal-analogy-fsi-damping.pdf>.
- [18] LI P. et al., *A new model for squeeze-film damping of electrically actuated microbeams under the effect of a static deflection*, J. of Micromech. and Microeng., 17 (7), July 2007, 1242-1251.
- [19] WIBBELER J. et al., *Development of Ansys/Multyphysics Modules for MEMS by CAD-FEM GmbH*, 19th CAD-FEM Users Meeting 2001 — International Congress on FEM Technology, October 17-19, 2001, Berlin, online reference: [http://www.technet-alliance.com/uploads/tx\\_caeworld/UM2001\\_MEMS\\_1\\_wibbeler\\_217\\_226.pdf](http://www.technet-alliance.com/uploads/tx_caeworld/UM2001_MEMS_1_wibbeler_217_226.pdf).
- [20] HYVARINEN J., SODERKVIST J., *Dynamic analysis of MEMS devices with moving parts using ANSYS and LINFLOW*, 2006, online reference: [http://www.anker-zemer.com/MEMS\\_moving\\_ANSYS\\_LINFLOW\\_2006.pdf](http://www.anker-zemer.com/MEMS_moving_ANSYS_LINFLOW_2006.pdf).
- [21] PANDEY A.K. et al., *Analytical solution of the modified Reynolds equation for squeeze film damping in perforated MEMS structures*, Sensors and Actuators A, 135, 2007, 839-848.
- [22] NIGRO S. et al., *Evaluation of Squeeze-film Damping Effects in MEMS Perforated Plates*, Proceedings of 8th IASME /WSEAS International Conference on Fluid Mechanics & Aerodynamics (FMA 2010), Taipei, Taiwan, 2010, 314-319.
- [23] SUIJLEN M.A.G. et al., *Squeeze film damping in the free molecular flow regime with full thermal accommodation*, Sensors and Actuators A, 156, 2009, 171-179.
- [24] KAYA T. et al., *Design of a MEMS Capacitive Comb-drive Accelerometer*, Proceedings of 2011 Comsol Conference, Boston, October 13-15, 2011.
- [25] SILVA M.G., DESHPANDE M., GREINER K., GILBERT J.R., *Gas damping and spring effects on MEMS devices with multiple perforations and multiple gaps*, Proceedings of the 10th International Conference on Solidstate Sensors and Actuators (Transducers'99), Sendai, 1999, 1148-1151.
- [26] BERNY A., *Substrate Effects in Squeeze Film Damping of Lateral Parallel-Plate Sensing MEMS Structures*, University of California at Berkeley, online reference, 2001.
- [27] ROCHA L.A. et al., *Experimental verification of squeezed-film damping models for MEMS*, Proceedings of the 16th MME MicroMechanics Europe Workshop, Gotenburg, Sweden, September 4-6, 2005, 244-247.



- [28] VEIJOLA T., LEHTOVUORI A., *Numerical and compact modelling of squeeze-film damping in RF MEMS resonators*, Proceedings of the symposium on design, test, integration and packaging of MEMS/MOEMS, April 9-11, 2008, 222-228.
- [29] VEIJOLA T., RABACK P., *Methods for Solving Gas Damping Problems in Perforated Microstructures Using a 2D Finite-Element Solver*, Sensors 2007, 7, 2007, 1069-1090.
- [30] MARRERO V. et al., *On Squeeze Film Damping in Microsystems*, Journal of Tribology, 132 (3), July 2010.
- [31] LAI Y.G., PRZEKWAŚ A., *A Finite volume method for fluid flow simulations with moving boundaries*, J. Computat. Fluid Dyn., 2, 1994, 19-40.

## K. URBANOWICZ

### Modelling of damping forces occurring in simple MEMS systems

**Abstract.** A certain damping force occurs in the micro-mechanical systems referred as MEMS. At the design stage of such systems, these forces must be accurately estimated. As shown in this work, in all systems operating at low frequencies, most important force is the one associated with the flotation of air film from the volume between two parallel operating movable MEMS plates. This force can be accurately estimated by analytical methods known from the literature. The paper presents analytical solutions that are frequently used in practice for simple plates. Also some simple simulations, using all described analytical solutions compared with the results of specialized program called Comsol Multyphysics, are shown. Presented research demonstrate the effectiveness of numerical software.

**Keywords:** MEMS, damping forces, Reynolds equation, modelling, simulation

**DOI:** 10.5604/12345865.1186348

