

dr n. tech. Andrzej Antoni CZAJKOWSKI

Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Szczecinie, Wydział Transportu Samochodowego, Edukacja Techniczno-Informatyczna
Higher School of Technology and Economics in Szczecin, Faculty of Motor Transport, Technique and Informatics Education

OSZACOWANIE RÓWNAŃ PODSTAWOWYCH W MODELU MATEMATYCZNYM OPISUJĄCYM PRZEPIY W CIECZY W PRZYRZĄDACH ROTACYJNYCH

Streszczenie

Wstęp i cele: W artykule omawia się równania pędu, ciągłości i energii z uwzględnieniem cieczy nienewtonowskich oraz sił Lorenza. Równania te opisują model matematyczny przepływu cieczy w wybranych przyrządach rotacyjnych, jak reometry i wiskozymetry rotacyjne oraz uproszczone typy mieszalników walcowych z cylindrycznym mieszadłem. Głównym celem jest oszacowanie równań pędu, równania ciągłości i równania energii oraz podanie warunków brzegowych.

Materiał i metody: Materiał badawczy stanowią równania pędu, ciągłości i energii. W pracy przedstawiono metodę analityczną oszacowania badanych równań.

Wyniki: W rozważaniach pokazano oszacowania wszystkich równań oraz przedstawiono założenia ubezwymirowujące, stosowane liczby podobieństwa oraz odpowiednie założenia upraszczające oraz warunki brzegowe.

Wniosek: Wyprowadzone równania posłużą do analizy parametrów eksploatacyjnych (np. prędkość cieczy, naprężeń stycznych w cieczy, zapotrzebowania na moc przyrządu) przyrządów rotacyjnych zarówno dla cieczy newtonowskich jak i nienewtonowskich o zmiennej lepkości zależnej od własności fizyko-chemicznych cieczy.

Słowa kluczowe: Przyrządy rotacyjne, przepływ cieczy, model matematyczny.

(Otrzymano: 01.02.2013; Zrecenzowano: 15.06.2013; Zaakceptowano: 30.06.2013)

ESTIMATION OF BASIC EQUATIONS IN MATHEMATICAL MODEL DESCRIBING THE FLUID FLOW IN ROTARY INSTRUMENTS

Abstract

Introduction and aims: The article discusses the momentum equation, continuity and energy taking into account the non-Newtonian fluid and Lorenz forces. These equations describe a mathematical model of fluid flow in selected rotary instruments, such as rotational rheometers and viscometers and simplified mixer types of cylindrical roller mixer. The main objective is to estimate the equations of momentum, continuity equation and energy equation, and provide boundary conditions.

Material and methods: The study material provide the momentum, continuity and energy equation. The paper presents an analytical method of analyzed equations.

Results: The discussion shows the evaluation of all the equations and the assumptions of dimension and dimensionless used the number of similarities and the appropriate simplifying assumptions and boundary conditions.

Conclusion: The derived equations will be used to analyze the performance parameters (e.g. fluid velocity, shear stress in the liquid, the demand for power unit) of rotary instruments for both Newtonian and non-Newtonian fluid viscosity with variable viscosity dependent from the physical and chemical properties.

Keywords: Rotating equipment, fluid flow, the mathematical model.

(Received: 01.02.2013; Revised: 15.06.2013; Accepted: 30.06.2013)

1. Wiadomości ogólne o przyrządach rotacyjnych i rodzajach cieczy

W przyrządach rotacyjnych występuje przepływ cieczy między dwiema powierzchniami, z których jedna wykonuje ruch obrotowy natomiast druga jest na ogół nieruchoma. Wraz z rozwojem postępu technicznego, mamy do czynienia z cieczami o zmiennej lepkości, z cieczami o własnościach nienewtonowskich, a także z przepływami cieczy w obecności pól elektromagnetycznych. Wspomniane okoliczności skłaniają zarówno do badania przepływów niekonwencjonalnych czynników cieczowych w omawianych urządzeniach, jak również wymagają badania parametrów eksploatacyjnych tych urządzeń przy uwzględnieniu nowych własności cieczy [16].

Powszechnie wiadomo, że ciecze o własnościach nienewtonowskich charakteryzują się tym, że krzywa płynięcia jako zależność między naprężeniami stycznymi a prędkością ścinania jest linią prostą. Wszystkie ciecze, dla których krzywa płynięcia nie jest linią prostą nazywamy cieczami o własnościach nienewtonowskich. Cieczami wykazującymi własności nienewtonowskie są, między innymi, roztwory polimerów, zanieczyszczone oleje, oleje z inhibitorami czyli z dodatkami ulepszającymi ich własności, ciecze magneto reologiczne oraz ciecze elektroeologiczne [1], [21], [22], [30].

Najnowsze technologie wymagają często zmiany wartości lepkości cieczy w czasie jej przepływu. Takie własności mają właśnie ciecze elektroeologiczne i magnetoeologiczne, które pod wpływem pola elektromagnetycznego w ciągu kilkunastu mikrosekund mogą nie tylko zwiększyć kilkadziesiąt razy swoją lepkość lecz również mogą zmienić się z cieczy o własnościach newtonowskich w ciecz pseudoplastyczną lub nawet mogą zestalić się [12], [13].

W artykule omawia się oszacowanie równań pędu, równania ciągłości i równania energii, które opisują model matematyczny przepływu cieczy w wybranych przyrządach rotacyjnych. Do urządzeń takich zalicza się reometry i wiskozymetry rotacyjne oraz uproszczone typy mieszalników walcowych z cylindrycznym mieszadłem. W konstrukcji cylindra wewnętrznego nie uwzględnia się dodatkowych elementów. Wiskozymetry służą do pomiaru lepkości cieczy. Przy użyciu reometrów mierzy się własności reologiczne cieczy takiej jak naprężenia styczne czy prędkość ścinania.

Zasada pomiaru w przyrządach rotacyjnych polega na poddaniu naprężeniom ścinającym badanej próbki cieczy między dwoma współosiowymi powierzchniami cylindrycznymi, z których jedna wykonuje ruch obrotowy (zwykle cylinder wewnętrzny). W reometrach rotacyjnych dokonuje się pomiaru częstości obrotów cylindra wewnętrznego przy różnej prędkości ścinania badanej cieczy. Moment skręcania cylindra wewnętrznego M_s w [J] mierzy się za pomocą różnych urządzeń mechanicznych [20].

Przedstawiony model matematyczny pozwala wyznaczać teoretycznie parametry przyrządów rotacyjnych w szczególności prędkość cieczy oraz naprężenia styczne w próbkach badanych cieczy. Wartości analityczne naprężeń stycznych można porównać z wartościami uzyskanymi przez innych autorów na drodze doświadczalnej. Ponadto wyznaczone na drodze teoretycznej wartości naprężeń stycznych mogą posłużyć bezpośrednio do wyznaczenia niektórych parametrów eksploatacyjnych reometrów lub wybranych uproszczonych typów mieszalników walcowych. Najczęściej interesującym zagadnieniem jest wyznaczenie wartości zapotrzebowania na moc potrzebną do napędu przyrządów rotacyjnych lub uproszczonego typu mieszalnika walcowego z cylindrycznym mieszadłem.

Zwróćmy uwagę na to, że dokonywane pomiary w reometrach i wiskozymetrach rotacyjnych z zasady pozwalają na określenie uśrednionych wartości parametrów reologicznych cieczy. Fakt ten zachęca również do badania dokładnych wartości parametrów reologicznych cieczy na drodze czysto teoretycznej.

Podkreślimy, że rozpatrywany model mieszalnika walcowego z cylindrycznym mieszadłem stanowi model uproszczony, który może występować w przemyśle spożywczym lub farma-

ceutycznym. Uproszczenie polega na tym, iż w konstrukcji mieszalnika nie uwzględnia się płytek, kotwic, wstęg czy śmigieł. Również przy ścianie zewnętrznej mieszalnika nie wprowadza się żadnych przegród ani innych dodatkowych elementów podstawowych.

2. Modele mechaniczne przyrządów rotacyjnych

2.1. Wspólny schematyczny model geometryczno - mechaniczny

Rozpatruje się uproszony schemat geometryczno-mechaniczny dla przyrządów rotacyjnych. Powierzchnia cylindra wewnętrznego wykonuje ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową, natomiast powierzchnia cylindra zewnętrznego jest nieruchoma (Rys. 1).

Przyjmuje się oznaczenia:

1. – ruchomy cylinder wewnętrzny,
2. – nieruchomy cylinder zewnętrzny,

R_w – promień cylindra 1 [m],

R_z – promień cylindra 2 [m],

U – prędkość cylindra 1 [m/s],

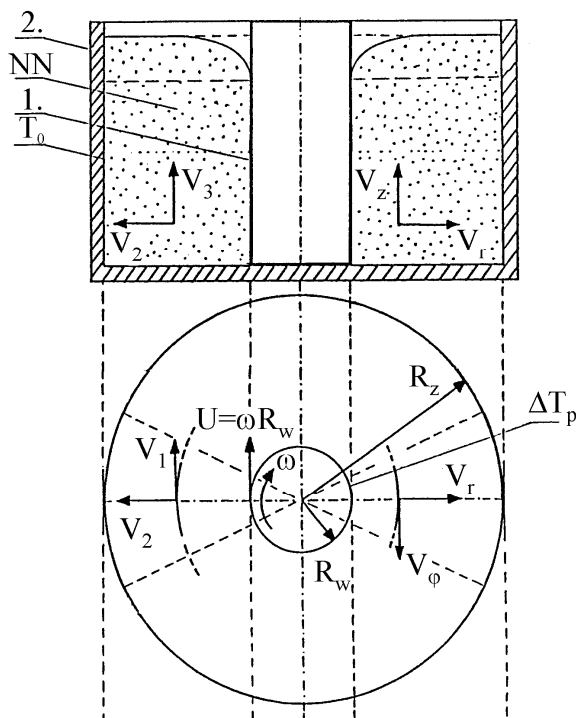
ω – prędkość kątowa cylindra 1 [1/s],

T_0 – temperatura otoczenia [K],

ΔT_p – przyrost temperatury względem T_0 [K].

Współrzędne wektora prędkości cieczy \mathbf{v} są oznaczone symbolami:

- obwodowa $V_1 \equiv V_\phi$ [m/s],
 - promieniowa $V_2 \equiv V_r$ [m/s],
 - po wysokości słupa cieczy $V_3 \equiv V_z$ [m/s],
- oraz NN – badana ciecz.



Rys. 1. Wspólny schemat geometryczno-mechaniczny przyrządów rotacyjnych i uproszczonych typów mieszalników [4]

Fig. 1. Common geometrical and mechanical scheme of rotating mechanical devices and simplified types of mixers [4]

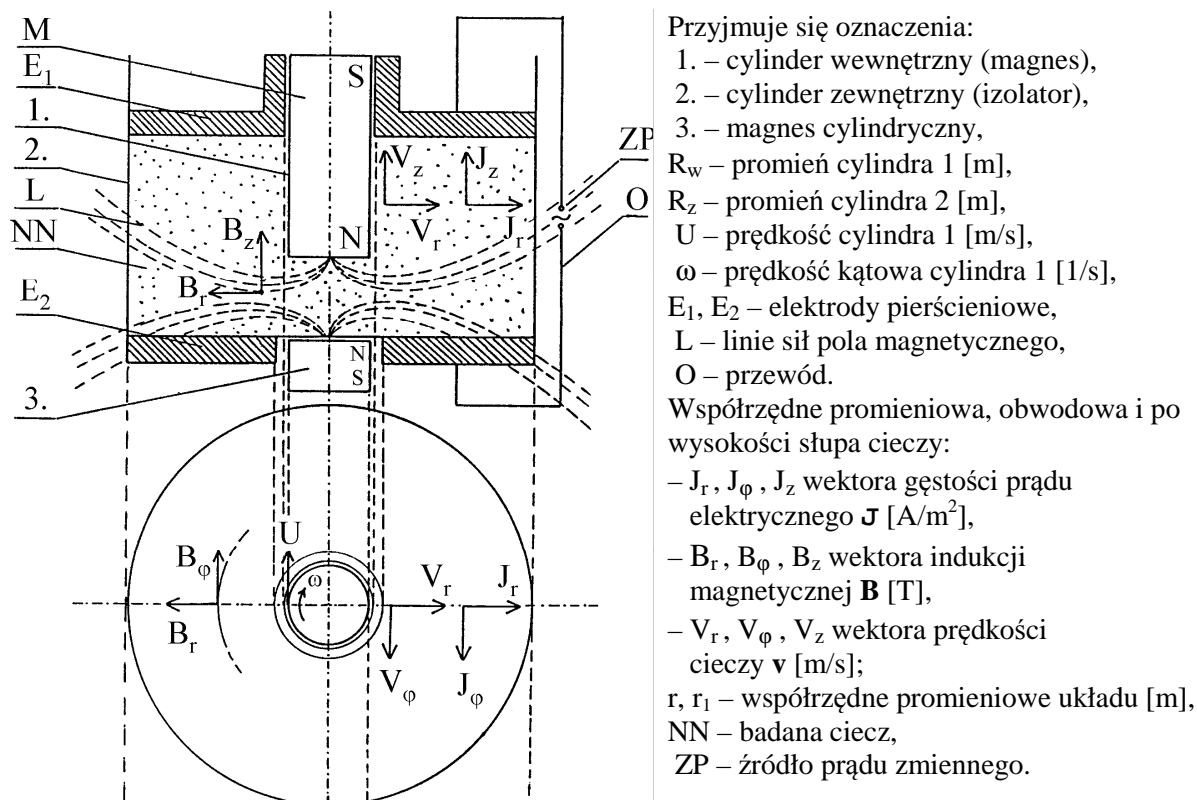
Rozpatruje się geometrię, w której bezwymiarowy stosunek długości promienia cylindra zewnętrznego do długości promienia cylindra wewnętrznego oznaczany symbolem D ma granice od 1,07 do 1,40 dla reometrów i wiskozymetrów rotacyjnych oraz od 1,1 do 3 dla uproszczonych typów mieszalników walcowych z cylindrycznym mieszadłem. Prędkość obrotowa $n_0 = 30\omega/\pi$ osiąga wartości od 16 do 160 obrotów na minutę. Współczynnik lepkości dynamicznej μ dla rozpatrywanych cieczy ma wartość od 0,68 do 1,85 [Pa·s]. Gęstość cieczy ρ ma wartość od 800 do 1100 [kg/m³]. Dla wartości prędkości cieczy do 2 [m/s] rozpatruje się laminarny stacjonarny przepływ cieczy nieściśliwej charakteryzujący się liczbami Reynoldsa w zakresie od 1 do 20 oraz liczbami Galileusza w zakresie od 10 do 10⁶.

W modelu cieplnym przyjmuje się izotermiczny ruch badanych cieczy. W większości przyrządów rotacyjnych i uproszczonych typach mieszalników walcowych z cylindrycznym mieszadłem ruch obrotowy cylindra wewnętrznego powoduje wyrównanie temperatury nie tylko na powierzchniach obu cylindrów a także w całym obszarze badanej próbki cieczy jeżeli wartość temperatury na powierzchniach obu cylindrów jest jednakowa.

Ponadto przyjmuje się transport ciepła wyłącznie poprzez przewodnictwo cieplne i to w kierunku promieniowym, ponieważ w tym kierunku warstwa cieczy ma najmniejszą grubość. Zakładamy, iż w cieczy nie występują żadne źródła ciepła. Pomija się dyssypację energii oraz transport ciepła spowodowany konwekcją naturalną i wymuszoną [4].

2.2. Wspólny schematyczny model geometryczno - mechaniczno – elektromagnetyczny

Przepływ prądu występuje w obwodzie elektrycznym: źródło prądu zmiennego ZP, przewód O, elektrody pierścieniowe E_1 i E_2 i ciecz NN przewodząca prąd elektryczny. Cylinder wewnętrzny 1 i magnes cylindryczny 3 w podstawie przyrządu stanowią magnesy stałe o biegunach N-S zwróconych jednoimiennie. Zakłada się, że powierzchnia cylindra zewnętrznego 2 nie jest przewodnikiem prądu elektrycznego (Rys. 2). Doprowadzenie prądu do elektrod wyposażone jest w mechanizm zapewniający stały kontakt elektrod z lustrem cieczy. Rozpatruje się ciecze, w których wpływ zjawiska dysocjacji elektrolitycznej na parametry przepływu jest pomijalnie mały. Pole magnetyczne charakteryzuje się różną od zera promieniową składową indukcji magnetycznej B_r , a pozostałe składowe tego wektora są pomijalnie małe. Przepływ prądu pomiędzy elektrodami charakteryzuje się różną od zera składową gęstości prądu I_z , a pozostałe składowe wektora gęstości prądu elektrycznego są pomijalnie małe.



Rys. 2. Wspólny schemat geometryczno-mechaniczno-elektromagnetyczny przyrządów rotacyjnych i uproszczonych typów mieszalników [4]

Fig. 2. Common geometrical, mechanical and electromagnetic scheme of rotating mechanical devices and simplified types of mixers [4]

Rozpatruje się ciecze o przewodności elektrycznej właściwej σ od $1 \cdot 10^5$ do $3 \cdot 10^5$ [S/m]. Wartości współrzędnych wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B} wahają się od 0,1 do 0,2 [T], natomiast współrzędne wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} mają wartości od 0,022 do 0,65 [V/m]. Współrzędne wektora gęstości prądu elektrycznego \mathbf{J} przyjmują wartości od 0,002 do $20 \cdot 10^4$ [A/m^2]. W przepływie cieczy liczby Hartmanna mają wartość od 1 do 10 [4].

3. Równania podstawowe dla niekonwencjonalnych cieczy oraz sił Lorentza

Przepływ cieczy w uproszczonych modelach reometrów i wiskozymetrów rotacyjnych, a także w uproszczonych typach mieszalników walcowych z cylindrycznym mieszadłem opisyje się równaniami: pędu, ciągiłości, energii, Maxwella oraz Ohma [14], [15].

Rozważa się układ współrzędnych cylindrycznych (r, φ, z) , gdzie r wyraża współrzędną promieniową, φ - współrzędną obwodową, z - współrzędną po wysokości słupa cieczy w [m].

Symbolami V_r, V_φ, V_z oznacza się współrzędne wektora prędkości cieczy \mathbf{v} kierunku promieniowym, obwodowym i po wysokości słupa cieczy. Ponadto symbolem μ_p oznacza się lepkość pozorną cieczy w [Pa·s], symbolem p - zmienne ciśnienie w [Pa], natomiast ρ oznacza stałą gęstość cieczy w [kg/m³].

Ruch cieczy nienewtonowskiej opisany jest we współrzędnych cylindrycznych (r, φ, z) trzema równaniami zachowania pędu, które dla stacjonarnego laminarnego przepływu nieściśliwego, z uwzględnieniem pola elektromagnetycznego mają następującą postać [2]-[11],[17]:

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi V_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (2\mu_p \Theta_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2\mu_p \Theta_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu_p \Theta_{rz}) + \quad (1)$$

$$- \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} [2\mu_p \text{div}(\mathbf{v})] + \frac{1}{r} 2\mu_p (\Theta_{rr} - \Theta_{\varphi\varphi}) + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_r,$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} - \frac{V_r V_\varphi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (2\mu_p \Theta_{r\varphi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2\mu_p \Theta_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu_p \Theta_{\varphi z}) + \quad (2)$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{2}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [2\mu_p \text{div}(\mathbf{v})] + \frac{2}{r} (2\mu_p \Theta_{r\varphi}) + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\varphi,$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (2\mu_p \Theta_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2\mu_p \Theta_{z\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (2\mu_p \Theta_{zz}) + \quad (3)$$

$$- \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} [\mu_p \text{div}(\mathbf{v})] + \frac{1}{r} (2\mu_p \Theta_{rz}) + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_z + \rho g.$$

gdzie

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \Theta_{rr} + \Theta_{\varphi\varphi} + \Theta_{zz}, \quad (4)$$

natomiast g oznacza przyspieszenie ziemskie w [m/s²], ponadto $\gamma \equiv \rho g$ wyraża ciężar cieczy w [N/m³].

W równaniach (1) i (2) przyjmuje się siły Coulomba w polu elektromagnetycznym jako bardzo małe. Współrzędne wektora prędkości deformacji T_d , występujące w równaniach (1)-(3), w układzie cylindrycznym (r, φ, z) mają postać [4]-[10], [25]-[29]:

$$\Theta_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad \Theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}, \quad \Theta_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad (5)-(7)$$

$$\Theta_{\varphi r} \equiv \Theta_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r} \right), \quad (8)$$

$$\Theta_{rz} \equiv \Theta_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right), \quad \Theta_{\varphi z} \equiv \Theta_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right). \quad (9)-(10)$$

Symbol \mathbf{J} oznacza wektor gęstości prądu elektrycznego w [A/m²] o współrzędnych: promieniowej J_r , obwodowej J_φ i w kierunku słupa cieczy J_z . Natomiast \mathbf{B} oznacza wektor indukcji magnetycznej w [kg/s²A] o współrzędnych: promieniowej B_r , obwodowej B_φ i w kierunku słupa cieczy B_z . Ponadto człony $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i$ dla $i = r, \varphi, z$ opisujące siły Lorentza występujące

w równaniach (1)-(3) rzutowane na poszczególne osi układu współrzędnych cylindrycznych są definiowane następującymi równaniami Maxwella [25]-[29]:

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_r = J_\varphi B_z - J_z B_\varphi, \quad (11)$$

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\varphi = J_z B_r - J_r B_z, \quad (12)$$

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_z = J_r B_\varphi - J_\varphi B_r. \quad (13)$$

Symbole $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_r$, $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\varphi$, $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_z$ opisują elektromagnetyczne oddziaływania w cieczy po kierunkach: promieniowym, obwodowym i po wysokości słupa cieczy. Równania (8)-(10) uzupełnia się równaniami Ohma, które mają następującą postać [25]-[29]:

$$J_r = \sigma(E_r + V_\varphi B_z - V_z B_\varphi), \quad (14)$$

$$J_\varphi = \sigma(E_\varphi + V_z B_r - V_r B_z), \quad (15)$$

$$J_z = \sigma(E_z + V_r B_\varphi - V_\varphi B_r), \quad (16)$$

gdzie symbole E_r , E_φ , E_z oznaczają współrzędne promieniową, obwodową i po wysokości słupa cieczy wektora natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} w [V/m], natomiast symbol σ - to przewodność elektryczna właściwa cieczy w [S/m].

Do równań pędu (1)-(3) dołącza się równanie ciągłości, które ma następującą postać [24]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0. \quad (17)$$

Symbol μ_p występujący w równaniach pędu (1)-(3) wyraża lepkość pozorną cieczy w [Pa] o modelu potęgowych Reintera-Rivlina, która jest zdefiniowana następującym wzorem [18]:

$$\mu_p(n, r, \varphi, z, t) \equiv 2^{n-1} m(n) \cdot \left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{s=1}^3 \Theta_{\alpha_k \alpha_s} \Theta_{\alpha_k \alpha_s} \right|, \quad (18)$$

gdzie $\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = z$. Symbol m oznacza współczynnik konsystencji cieczy w [Pa·sⁿ] w ogólności zależny od indeksu przepływu cieczy n , współrzędnych r , φ , z układu cylindrycznego (r, φ, z) oraz od czasu t . Ponadto symbole $\Theta_{\alpha_k \alpha_s}$ dla $k=1,2,3$ oraz $s=1,2,3$ oznaczają współrzędne tensora prędkości deformacji, które określają wzory (5)-(10). Po rozpisaniu sum we wzorze (18) oraz uwzględnieniu związków (5)-(10) lepkość pozorną μ_p otrzymuje następującą postać [4]-[10], [25]-[29]:

$$\begin{aligned} \mu_p(n, r, \varphi, z, t) \equiv 2^{n-1} m(n) \cdot & \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right)^2 \right|^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Symbol m oznacza współczynnik konsystencji cieczy w [Pa·sⁿ] zależny od indeksu przepływu cieczy n z przedziału od 0,4 do 1 i od współrzędnych układu cylindrycznego (r, φ, z) oraz od czasu t w [s].

Dla przepływu cieczy z uwzględnieniem temperatury T w [K] do równań pędu (1)-(3) i równania ciągłości (17) dołącza się w układzie współrzędnych cylindrycznych, równanie energii mające następującą postać [4]-[10], [19], [23]:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial(c_v T)}{\partial t} + \rho V_r \frac{\partial(c_v T)}{\partial r} + \rho \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial(c_v T)}{\partial \varphi} + \rho V_z \frac{\partial(c_v T)}{\partial z} = \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\mathcal{J}^2}{\sigma} + 4\mu_p \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) \right]^2 \right\} - p \cdot \text{div}(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (20)$$

Człon pierwszy lewej strony równania (20), tzn. pochodna $(c_v T)$ po czasie, przedstawia zmianę energii wewnętrznej w czasie na jednostkę objętości, natomiast pozostałe człony lewej strony tego równania opisują transport energii za pomocą konwekcji. Trzy pierwsze człony prawej strony równania (20) przedstawiają energię przewodzenia ciepła na jednostkę czasu i objętości. Człon \mathcal{J}^2/σ opisuje dyssypację Joule'a i oznacza zmianę energii elektrycznej w cieplną. Energia cieplna powstała w płynie podczas przepływu ulega rozproszeniu. Proces ten opisują pozostałe człony prawej strony tego równania zwane członami dyssypacji energii łącznie z ostatnim, który oznacza dyssypację ciśnieniową. W równaniu (20) symbol T oznacza temperaturę w ogólności zależną od współrzędnych r , φ , z oraz od czasu t , natomiast symbol c_v wyraża ciepło właściwe cieczy w [J/kg·K] przy stałej objętości. Współczynnik przewodności cieplnej cieczy w [W/m·K] oznaczony symbolem λ również może zależeć od współrzędnych r , φ , z oraz od czasu t . Ponadto symbol μ_p przedstawia lepkość pozorną cieczy w [Pa·s] zdefiniowaną wzorem (19), zależną w ogólności od współrzędnych r , φ , z oraz od czasu t .

4. Założenia ubezwymiarowujące

4.1. Związki między wielkościami wymiarowymi a bezwymiarowymi

Dla współrzędnych wektora prędkości cieczy związki wielkości wymiarowych z bezwymiarowymi przedstawiają się następująco [4]-[10]:

$$V_\varphi = U \cdot V_{\varphi_1}, \quad V_r = V \cdot V_{r_1}, \quad V_z = W \cdot V_{z_1}, \quad (21)-(23)$$

gdzie U , V , W są charakterystycznymi wielkościami wymiarowymi w [m/s], natomiast odpowiednie współrzędne bezwymiarowe to V_{φ_1} , V_{r_1} , V_{z_1} przy tym [4]-[10]:

$$V_\varphi = V_\varphi(r, \varphi, z), \quad V_r = V_r(r, \varphi, z), \quad V_z = V_z(r, \varphi, z), \quad (24)-(26)$$

$$V_{\varphi_1} = V_{\varphi_1}(r_1, \varphi, z_1), \quad V_{r_1} = V_{r_1}(r_1, \varphi, z_1), \quad V_{z_1} = V_{z_1}(r_1, \varphi, z_1), \quad (27)-(29)$$

Współczynnik konsystencji cieczy m , gęstość cieczy ρ oraz współczynnik przewodności cieplnej cieczy mają postać [4]-[10]:

$$m = m_0 m_1, \quad \rho = \rho_0 \rho_1, \quad \lambda = \lambda_0 \lambda_1, \quad (30)-(32)$$

$$\rho_1 \equiv 1, \quad \lambda_1 \equiv 1, \quad (33),(34)$$

gdzie m_0 , ρ_0 , λ_0 - to charakterystyczne wielkości wymiarowe wielkości wymiarowe odpowiednio w [Pa·s]=[Ns/m²], [kg/m³] oraz [W/mK], natomiast m_1 , ρ_1 , λ_1 oznaczają wielkości bezwymiarowe odpowiednio dla współczynnika konsystencji cieczy, gęstości cieczy i współczynnika przewodności cieplnej cieczy. Dodatkowo przyjmuje się, że ρ_1 i λ_1 to bezwymiarowe wielkości jednostkowe.

Ciśnienie p oraz prędkość obwodową U określone są następującymi zależnościami [4]:

$$p = p_a + \rho_0 U^2 p_1 + \gamma H z_1, \quad U = \omega R_w. \quad (35),(36)$$

gdzie p_a to ciśnienie charakterystyczne w [Pa], γ - to charakterystyczny ciężar właściwy cieczy w [N/m³] i H oznacza wysokość słupa cieczy w [m]. Wielkości bezwymiarowe to p_1 i z_1 .

Zależności między promieniami $R_w, R_z, R_1, r_1, r_1^*$, współrzędnymi z, z_1 , ukazują wzory [4]:

$$\Delta_R \equiv R_z - R_w, \quad r_1 \equiv (D-1)r_1^* + 1, \quad R_z \equiv D \cdot R_w. \quad (37)-(39)$$

$$z \equiv H z_1, \quad r \equiv R_1 \left[1 + \left(\frac{R_z}{R_w} - 1 \right) r_1^* \right] = R_w + \Delta_R r_1^*. \quad (40),(41)$$

gdzie Δ_R, R_w, R_z, z, H - to wielkości wymiarowe w [m].

Związki między pochodnymi cząstkowymi oraz parametr s_1 mają postać [4]:

$$\frac{\partial}{\partial r_1^*} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial r_1^*}, \quad \frac{\partial r}{\partial r_1^*} \equiv \Delta_R, \quad \frac{\partial}{\partial r} \equiv \frac{1}{R_w} \cdot \frac{\partial}{\partial r_1}, \quad \frac{\partial}{\partial r_1^*} \equiv \frac{\Delta_R}{R_w} \cdot \frac{\partial}{\partial r_1} \quad (42)-(45)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \equiv \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\partial}{\partial r_1^*}, \quad (46)$$

$$s_1 \equiv \frac{R_w}{H}. \quad (47)$$

Bezwymiarowy parametr dla grubości warstwy cieczy ε_1 oraz bezwymiarowe parametry dla ilorazów prędkości ε_2 i ε_3 stosowane w oszacowaniach równań mają postać [4]:

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{R_z - R_w}{R_w} = \frac{\Delta_R}{R_w}, \quad \varepsilon_2 \equiv \frac{V}{U}, \quad \varepsilon_3 \equiv \frac{W}{U}. \quad (48)-(50)$$

Dla temperatury związek wielkości wymiarowych z bezwymiarowymi jest następujący [4]:

$$T \equiv T_0 T_1, \quad (51)$$

gdzie T_0 oznacza wymiarową charakterystyczną temperaturę otoczenia w [K], a T_1 to temperatura bezwymiarowa.

4.2. Liczby podobieństwa

Liczba Reynoldsa Re_n i zmodyfikowana liczba Reynoldsa Re_n^* dla cieczy nienewtonowskiej mają postaci [4], [31]:

$$Re_n \equiv \frac{\rho_0 R_w^n (\omega R_w)^{2-n}}{m_0(n)} = \frac{\rho_0 R_w^n}{m_0(n) \cdot U^{n-2}}, \quad (52)$$

$$Re_n^* \equiv \frac{\rho_0 \Delta_w^n}{m_0(n) \cdot U^{n-2}}. \quad (53)$$

gdzie n to bezwymiarowy indeks przepływu cieczy z przedziału $0,4 \leq n \leq 1$. Jeśli indeks przepływu $n=1$, to ciecz jest cieczą newtonowską.

Liczbę Froude'a dla przepływu cieczy przedstawia następujący wzór [4], [31]:

$$\text{Fr} \equiv \frac{\sqrt{gH}}{U}, \quad (54)$$

Liczba Prandtla dla cieczy nienewtonowskiej ma postać [4], [31]:

$$\text{Pr}_n \equiv \frac{c_v \mu_p}{\lambda_0} = \frac{c_v m_0(n) \cdot U^{n-1}}{R_w^{n-1} \lambda_0} = \frac{c_v m_0(n)}{\lambda_0} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1}. \quad (55)$$

Liczby Eckerta i Prandtla dla cieczy newtonowskiej mają postać [4], [31]:

$$\text{Ec} \equiv \frac{U^2}{c_v T_0}, \quad \text{Pr}_1 \equiv \frac{c_v \mu_0}{\lambda_0}, \quad (56), (57)$$

$$\text{Ec} \cdot \text{Pr}_1 \equiv \frac{U^2 \mu_0}{T_0 \lambda_0}. \quad (58)$$

Liczba Graetzta dla przepływu cieczy ma postać [4], [31]:

$$\text{Gz}_n \equiv \text{Re}_n \cdot \text{Pr}_n = \frac{\rho_0 R_w^n}{m_0 U^{n-2}} \cdot \frac{c_v m_0}{\lambda_0} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} = \frac{\rho_0 c_v}{\lambda_0} U R_w. \quad (59)$$

Liczba Brinkmana dla cieczy nienewtonowskiej ma postać [4], [31]:

$$\text{Br}_n \equiv \text{Ec}_n \cdot \text{Pr}_n = \frac{U^{n+1} m_0(n)}{R_w^{n-1} \lambda_0 T_0}. \quad (60)$$

5. Oszacowania równań podstawowych

5.1. Oszacowania członów w równaniach zachowania pędu dla przepływu stacjonarnego

➤ Oszacowanie rzędu wielkości członów w równaniach zachowania pędu dla współrzędnej promieniowej r

Równanie zachowania pędu (1) dla $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ oraz po pominięciu sił masowych ma następującą wymiarową postać [4]:

$$\begin{aligned} \rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\phi^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \cdot 2^{n-1} \frac{\partial V_r}{\partial r} \mu_p \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[2 \cdot 2^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi}{r} \right) \mu_p \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2 \cdot 2^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \mu_p \right] + \\ + \frac{1}{r} 2 \cdot 2^{n-1} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} - \frac{V_r}{r} \right) \mu_p, \end{aligned} \quad (61)$$

gdzie lepkość pozorną cieczy μ_p określa wzór (19). Po uwzględnieniu wymiarowych związków określonych wzorami (21)-(50) i zależności [4]:

$$\mu_p \equiv \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} m_0(n) \cdot \varepsilon_1^{1-n} \mu_{p1} \quad (62)$$

wtedy równanie (61) dla zdefiniowanej lepkości cieczy (19) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0 U^2}{R_w \varepsilon_1} \left(\varepsilon_2^2 V_{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 V_{z_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}^2}{r_1} \right) = \\
 & = -\frac{\rho_0 U^2}{R_w \varepsilon_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial r_1^*} + 2m_0 \frac{1}{R_w \varepsilon_1} \frac{U}{R_w \varepsilon_1} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\mu_{p_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right) + \\
 & + \frac{m_0}{R_w} \frac{U}{R_w \varepsilon_1} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) \right] + \\
 & + m_0 \frac{1}{H} \frac{U}{R_w \varepsilon_1} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mu_{p_1} \left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right) \right] + \\
 & + 2m_0 \frac{1}{R_w} \frac{U}{R_w \varepsilon_1} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \frac{1}{r_1} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} - s_1 \varepsilon_2 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right) \mu_{p_1}.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Bezwymiarowa lepkość pozorna cieczy otrzymuje postać [4]:

$$\begin{aligned}
 \mu_{p_1} \equiv m_1(n) \cdot & \left| 2\varepsilon_1^2 \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon \frac{V_{r_1}}{r_1} \right)^2 + 2\varepsilon_2^2 \left(\frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right)^2 + 2s_1^2 \varepsilon_3^2 \left(\frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right)^2 + \left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \left(s_1 \varepsilon_1 \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} \right)^2 \right|^{\frac{n-1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{64}$$

gdzie bezwymiarowe wartości $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ określono wzorami (48)-(50).

Równanie (63) pomnożone obustronnie przez wyrażenie $\frac{R_w \varepsilon_1}{\rho_0 U^2}$ uzyskuje postać [4]:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_2^2 V_{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 V_{z_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}^2}{r_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial r_1^*} + \frac{m_0}{\rho_0 U} \frac{1}{R_w \varepsilon_1} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \times \\
 & \times \left\{ 2\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\mu_{p_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right) + \varepsilon_1 \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + s_1 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mu_{p_1} \left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right) \right] + 2\varepsilon_1 \frac{1}{r_1} \mu_{p_1} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} - s_1 \varepsilon_2 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{65}$$

Zachodzą następujące zależności [4]:

$$\frac{R_w \varepsilon_1}{\rho_0 U^2} \frac{m_0(n)}{R_w \varepsilon_1} \frac{U \varepsilon_1^{1-n}}{R_w \varepsilon_1} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} = \frac{U^{n-2} m_0(n)}{\rho_0 R_w^n \varepsilon_1^n} = \frac{U^{n-2} m_0(n)}{\rho_0 R_w^n} \frac{\Delta_R^n}{R_w^n} = \frac{U^{n-2} m_0(n)}{\rho_0 \Delta_R^n} = \frac{1}{\text{Re}_n^*} = \frac{1}{\text{Re}_n \varepsilon_1^n}. \tag{66}$$

Po uporządkowaniu i wprowadzeniu zależności (66) do równania (65) przyjmuje ono postać:

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_2^2 V_{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 V_{z_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}^2}{r_1} = \\
 & = -\frac{\partial p_1}{\partial r_1^*} + \frac{1}{\text{Re}_n \varepsilon_1^n} \left\{ 2\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\mu_{p_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right) + \frac{\varepsilon_1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + s_1 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mu_{p_1} \left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right) \right] + \frac{2\varepsilon_1}{r_1} \mu_{p_1} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} - \frac{\varepsilon_1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} - s_1 \varepsilon_2 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right) \right\}. \quad (67)
 \end{aligned}$$

gdzie lepkość pozorną μ_{p_1} zdefiniowano wzorem (64).

Wnioski (dla współrzędnej promieniowej r):

- Dla bezwymiarowych parametrów $\varepsilon_1 = O(10^{-1})$, $\varepsilon_2 = O(10^{-2})$, $\varepsilon_3 = O(10^{-2})$ i liczby Reynoldsa $\text{Re}_n = O(10)$, po odrzuceniu wyrazów rzędu 0,01 w porównaniu z wyrazami rzędu 1, równanie (67) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r_1^*} = \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}^2}{r_1}. \quad (68)$$

- Natomiast bezwymiarową lepkość pozorną cieczy (64) upraszcza się następująco:

$$\mu_{p_1}(r_1, n) \equiv m_1(n) \cdot \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right)^{n-1}. \quad (69)$$

- Ponieważ wszystkie pochodne funkcji V_{φ_1} względem φ w równaniu (67) są rzędu 0,01 (tj. pomijalnie małe), stąd bezwymiarowa prędkość V_{φ_1} nie zależy od współrzędnej φ , a więc zależy tylko od współrzędnej promieniowej r_1 .
- Z równania (68) oraz z powyższego wniosku drugiego wynika, że bezwymiarowe ciśnienie zależy od współrzędnej promieniowej r_1 .

➤ Oszacowanie rzędu wielkości członów w równaniach zachowania pędu dla współrzędnej obwodowej φ

Równanie zachowania pędu (2) dla $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ oraz po pominięciu sił masowych ma następującą wymiarową postać [4]:

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} - \frac{V_r V_\varphi}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left[2 \cdot 2^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{V_r}{\varphi} - \frac{V_\varphi}{r} \right) \mu_p \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[2 \cdot 2^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} \right) \mu_p \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[2 \cdot 2^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \mu_p \right] + \frac{2}{r} \left[2 \cdot 2^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r} \right) \mu_p \right], \quad (70)
 \end{aligned}$$

gdzie współrzędne μ_p określa wzór (19). Równanie (70) po uwzględnieniu związków (21)-(50) oraz zależności (62) uzyskuje następującą postać [4]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0 U^2}{R_w \varepsilon_1} \left(\varepsilon_2 V_{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 V_{z_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{V_{r_1} V_{\varphi_1}}{r_1} \right) = \\
 & = -\frac{\rho_0 U^2}{R_w} \frac{1}{r_1} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) \right] + \\
 & + \frac{2m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \frac{\varepsilon_1^{1-n} \varepsilon_1^2}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_2 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right) \right] + \\
 & + \frac{m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \varepsilon_1^2 \frac{R_w}{H} \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\varepsilon_3}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} + s_1 \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} \right) \right] + \\
 & + \frac{2m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \frac{\varepsilon_1}{r_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} - \varepsilon_1 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right) \mu_{p_1},
 \end{aligned} \tag{71}$$

przy czym dla części ostatniego składnika równania (71) ma miejsce następujący związek [4]:

$$\frac{\varepsilon_1}{r_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} - \varepsilon_1 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right) \mu_{p_1} = \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}{r_1^2} \mu_{p_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_1 \mu_{p_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right). \tag{72}$$

gdzie μ_{p_1} określono wzorem (64), a parametry ε_1 , ε_2 , ε_3 zdefiniowano wzorami (48)-(50).

Obie strony równania (71) dzielimy przez wyrażenie $\frac{m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n}$. Wtedy otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0 R_w^n \varepsilon_1^n}{U^{n-2} m_0} \left(\varepsilon_2 V_{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 V_{z_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{V_{r_1} V_{\varphi_1}}{r_1} \right) = -\frac{\rho_0 R_w^n \varepsilon_1^n}{U^{n-2} m_0} \varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) \right] + \varepsilon_1^2 \frac{2}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_2 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right) \right] + \\
 & + s_1 \varepsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\varepsilon_3}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} + s_1 \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} \right) \right] + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{r_1^2} \mu_{p_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + 2\varepsilon_1 \mu_{p_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right),
 \end{aligned} \tag{73}$$

gdzie

$$\varepsilon_1^n \text{Re}_n \equiv \frac{\rho_0 R_w^n \varepsilon_1^n}{U^{n-2} R_w^n \varepsilon_1^n} m_0. \tag{74}$$

Po uporządkowaniu równania (73) oraz wprowadzeniu liczby Reynoldsa (74) uzyskuje się następujące równanie [4]:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re}_n \left(\varepsilon_1^n \varepsilon_2 V_{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1^{n+1} \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1^{n+1} \varepsilon_3 V_{z_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} + \varepsilon_1^{n+1} \varepsilon_2 \frac{V_{r_1} V_{\varphi_1}}{r_1} \right) = \\
 & = -\operatorname{Re}_n \varepsilon_1^{n+1} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) \right] + \\
 & + 2\varepsilon_1 \mu_{p_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + 2\varepsilon_1^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_2 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right) \right] + \\
 & + s_1 \varepsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\varepsilon_3}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} + s_1 \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{75}$$

gdzie lepkość pozorną μ_{p_1} zdefiniowano wzorem (64).

Wnioski (dla współrzędnej obwodowej φ):

- Dla parametrów $\varepsilon_1 = O(10^{-1})$, $\varepsilon_2 = O(10^{-2})$, $\varepsilon_3 = O(10^{-2})$ i liczby Reynoldsa $\operatorname{Re}_n = O(10)$ i po odrzuceniu członów rzędu 1, wtedy równanie (75) upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial r_1^*} \left[\mu_{p_1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) \right] + 2\varepsilon_1 \mu_{p_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) = 0 \tag{76}$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\mu_{p_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} \right) - \varepsilon_1 \frac{\partial \mu_{p_1}}{\partial r_1^*} \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} + 2\varepsilon_1 \mu_{p_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(\frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right) = 0. \tag{77}$$

- Równanie (76) w postaci wymiarowej ma postać.

$$\frac{d}{dr} \left(\mu_p \frac{dV_\varphi}{dr} \right) + \frac{\mu_p}{r} \frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{\mu_p}{r_2} V_\varphi - \frac{d\mu_p}{dr} \frac{V_\varphi}{r} = 0. \tag{78}$$

➤ Oszacowanie rzędu wielkości członów w równaniach zachowania pędu dla współrzędnej w kierunku z

Równanie zachowania pędu (2) dla $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ oraz po pominięciu sił masowych ma następującą wymiarową postać [4]:

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left[2^{n-1} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \mu_p \right] + \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[2^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \mu_p \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2^n \frac{\partial V_z}{\partial z} \mu_p \right] + \frac{1}{r} \left[2^{n-1} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \mu_p \right] + \rho_0 g,
 \end{aligned} \tag{79}$$

gdzie μ_p określa wzór (19), natomiast $\rho_0 g$ oznacza ciężar cieczy.

Po podstawieniu do równania (79) związków (21)-(47) i zależności (62), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0 U^2}{R_w \varepsilon_1} \left(\varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3^2 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right) = -\frac{\rho_0 U^2}{H} \frac{\partial p}{\partial z} + \\
 & + \frac{m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left[\left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right) \mu_{p_1} \right] + \\
 & + \frac{m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \frac{\varepsilon_1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(\varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{\partial z_1} \right) \mu_{p_1} \right] + \\
 & + \frac{m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} s_1^2 \varepsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \mu_{p_1} \right] + \\
 & + \frac{m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n} \frac{\varepsilon_1}{r_1} \left[\left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right) \mu_{p_1} \right] + \rho_0 g,
 \end{aligned} \tag{80}$$

gdzie μ_p określa wzór (19), a parametry $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ zdefiniowano wzorami (48)-(50).

Obie strony równania (80) dzielimy przez wyrażenie $\frac{m_0 U}{R_w^2 \varepsilon_1^2} \left(\frac{U}{R_w} \right)^{n-1} \varepsilon_1^{1-n}$. Wówczas mamy [4]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0 R_w^n \varepsilon_1^n}{U^{n-2} m_0} \left(\varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3^2 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right) = -s_1 \varepsilon_1 \text{Re}_n^* \frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left[\left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right) \mu_{p_1} \right] + \frac{\varepsilon_1^2}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{\varepsilon_3}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{\partial z_1} \right) \mu_{p_1} \right] + \\
 & + 2s_1^2 \varepsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \mu_{p_1} \right] + \frac{\varepsilon_1}{r_1} \left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right) \mu_{p_1} + \\
 & + \frac{\rho_0 U^2}{R_w \varepsilon_1} \cdot \frac{R_w^n \varepsilon_1^n R_w^{n-1}}{m_0 U^n \varepsilon_1^{1-n}} \cdot g \cdot \frac{R_w \varepsilon_1}{U^2} \cdot \frac{R_w}{H} \cdot \frac{H}{R_w},
 \end{aligned} \tag{81}$$

gdzie

$$\frac{\rho_0 U^2}{R_w \varepsilon_1} \frac{R_w^n \varepsilon_1^n R_w^{n-1}}{m_0 U^n \varepsilon_1^{1-n}} \cdot g \cdot \frac{R_w \varepsilon_1}{U^2} \frac{R_w}{H} \frac{H}{R_w} = s_1 \varepsilon_1 \text{Re}_n^* (\text{Fr})^2. \tag{82}$$

Wnioski (dla współrzędnej po kierunku z):

- Dla parametrów $\varepsilon_1 = O(10^{-1})$, $\varepsilon_2 = O(10^{-2})$, $\varepsilon_3 = O(10^{-2})$ i liczby Reynoldsa $\text{Re}_n = O(10)$ oraz liczby Froude'a $\text{Fr} = O(1)$ i po odrzuceniu członów rzędu 0,01 w porównaniu z wyrazami rzędu 1, wtedy równanie (81) upraszcza się do następującej postaci:

$$\frac{\partial p_1}{\partial z_1} = (\text{Fr})^2. \tag{83}$$

- Na mocy równania (83) wnosimy, iż ciśnienie zmienia się linowo względem wysokości z_1 przyrządu pomiarowego.

5.2. Oszacowania członów występujących w równaniach zachowania energii

Równanie zachowania energii ma następującą wymiarową postać [4]:

$$\begin{aligned}
 & \rho V_r \frac{\partial(c_v T)}{\partial r} + \rho \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial(c_v T)}{\partial \phi} + \rho V_z \frac{\partial(c_v T)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \\
 & + 2^{n-1} m(n) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} \right)^2 \left| \right|^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\phi}{r} \right) \right]^2 \right\} - p \cdot \text{div}(\mathbf{v}).
 \end{aligned} \tag{84}$$

Po wstawieniu wymiarowych wartości (21)-(51) do równania (84) uzyskuje się równanie zachowania energii w następującej postaci [4]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho_0 V c_v T_0}{R_w \varepsilon_1} V_{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r_1^*} + \frac{\rho_0 U c_v T_0}{R_w} V_{\phi_1} \frac{1}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial \phi} + \frac{\rho_0 W c_v T_0}{H} V_{z_1} \frac{\partial T_1}{\partial z_1} = \\
 & = \frac{\lambda_0 R_w T_0}{R_w^3 \varepsilon_1^2 r_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(r_1 \frac{\partial T_1}{\partial r_1^*} \right) + \frac{\lambda_0 T_0}{R_w^2 r_1^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \phi^2} + \frac{\lambda_0 T_0}{H^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2} + \\
 & + 2^{n-1} m_0 m_1 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{U}{R_w} \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\phi_1}}{\partial \phi} + \frac{V}{R_w} \frac{V_{r_1}}{r_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{V}{R_w \varepsilon_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{W}{H} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{4} \left(\frac{V}{R_w} \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \phi} + \frac{U}{R_w \varepsilon_1} \frac{\partial V_{\phi_1}}{\partial r_1^*} - \frac{U}{R_w} \frac{V_{\phi_1}}{r_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{W}{R_w \varepsilon_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + \frac{V}{H} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{4} \left(\frac{U}{H} \frac{\partial V_{\phi_1}}{\partial z_1} + \frac{W}{R_w} \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \phi} \right)^2 \left| \right|^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{V}{R_w \varepsilon_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{U}{R_w} \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\phi_1}}{\partial \phi} + \frac{V}{R_w} \frac{V_{r_1}}{r_1} \right)^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{W}{H} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{U}{H} \frac{\partial V_{\phi_1}}{\partial z_1} + \frac{W}{R_w} \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \phi} \right)^2 + \\
 & \left. \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{W}{R_w \varepsilon_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + \frac{V}{H} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{V}{R_w} \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \phi} + \frac{U}{R_w \varepsilon_1} \frac{\partial V_{\phi_1}}{\partial r_1^*} - \frac{U}{R_w} \frac{V_{\phi_1}}{r_1} \right]^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{85}$$

Równanie powyższe nie zawiera członu $p \cdot \text{div}(\mathbf{v})$ oznaczającego dyssypację ciśnieniową, ponieważ wobec przyjętego równania ciągłości (4) oraz nieściśliwości cieczy jest ona równa zero.

Równanie (85) dzielimy stronami przez wyrażenie $\frac{\lambda_0 R_w T_0}{R_w^3 \varepsilon_1^2}$. Wtedy otrzymujemy [4]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_0 c_v}{\lambda_0} UR_w \varepsilon_1 \left(\frac{V}{U} V_{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 V_{\varphi_1} \frac{1}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} + \frac{W R_w}{U H} \varepsilon_1 V_{z_1} \frac{\partial T_1}{\partial z_1} \right) = \\
& = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(r_1 \frac{\partial T_1}{\partial r_1^*} \right) + \frac{\varepsilon_1^2}{r_1^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} + \varepsilon_1^2 \left(\frac{R_w}{H} \right)^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2} + \\
& + \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} m_0 m_1 \left(\frac{U}{R_w \varepsilon_1} \right)^{n-1} \cdot \left[2 \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_1 \frac{V}{U} \frac{V_{r_1}}{r_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{V}{U} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right)^2 + 2 \left(\varepsilon_1 \frac{W R_w}{U H} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right)^2 \right. \\
& + \left(\varepsilon_1 \frac{V}{U} \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{W}{U} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \frac{V R_w}{U H} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \\
& + \left(\varepsilon_1 \frac{R_w}{H} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} + \varepsilon_1 \frac{W}{U} \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} \right)^2 \left. \right]^{n-1} \cdot \left[4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{R_w^3 \varepsilon_1^3}{\lambda_0 R_w T_0} \cdot \frac{U^2}{R_w^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right\} 2 \left(\frac{V}{U} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right)^2 + \\
& + 2 \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_1 \frac{V}{U} \frac{V_{r_1}}{r_1} \right)^2 + 2 \left(\varepsilon_1 \frac{W R_w}{U H} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\varepsilon_1 \frac{R_w}{H} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} + \frac{W \varepsilon_1}{U r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} \right)^2 + \\
& + \left(\frac{W}{U} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 \frac{V R_w}{U H} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \left[\frac{V \varepsilon_1}{U r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right]^2 \left. \right\}. \tag{86}
\end{aligned}$$

Wprowadzając do równania (86) bezwymiarowe wartości (21)-(51) oraz liczby Graetza i Brinkmana uzyskujemy następujące równanie [4]:

$$\begin{aligned}
& Gz_n \varepsilon_1 \left(\varepsilon_2 V_{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r_1^*} + \varepsilon_1 V_{\varphi_1} \frac{1}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 V_{z_1} \frac{\partial T_1}{\partial z_1} \right) = \\
& = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(r_1 \frac{\partial T_1}{\partial r_1^*} \right) + \frac{\varepsilon_1^2}{r_1^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} + s_1^2 \varepsilon_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2} + \\
& + Br_n \varepsilon_1^{1-n} m_1 \cdot \left[2 \varepsilon_1^2 \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_2 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right)^2 + 2 \varepsilon_2^2 \left(\frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right)^2 + 2 s_1^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \left(\frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right)^2 \right. \\
& + \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right)^2 + \left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \varepsilon_1^2 \left(s_1 \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} + \frac{\varepsilon_3}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} \right)^2 \left. \right]^{n-1} \times \\
& \times \left[2 \varepsilon_2^2 \left(\frac{\partial V_{r_1}}{\partial r_1^*} \right)^2 + 2 \varepsilon_1^2 \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial \varphi} + \varepsilon_2 \frac{V_{r_1}}{r_1} \right)^2 + 2 s_1^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \left(\frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \varepsilon_1^2 \left(s_1 \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial z_1} + \frac{\varepsilon_3}{r_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} \right)^2 \right. \\
& + \left(\varepsilon_3 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r_1^*} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial V_{r_1}}{\partial z_1} \right)^2 + \left. \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r_1} \frac{\partial V_{r_1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right)^2 \right\}. \tag{87}
\end{aligned}$$

Wnioski dla równania energii:

- Dla parametrów $\varepsilon_1=O(10^{-1})$, $\varepsilon_2=O(10^{-2})$, $\varepsilon_3=O(10^{-2})$, liczby Reynoldsa $Re_n=O(10)$ oraz liczby Graetz $Gz=O(1)$ i po odrzuceniu wyrazów rzędu 0,01 w porównaniu z wyrazami rzędu 1 równanie zachowania energii (87) upraszcza się do następującej postaci:

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(r_1 \frac{\partial T_1}{\partial r_1^*} \right) + Br_n \varepsilon_1^{1-n} m_1 \left(\frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi 1}}{r_1} \right)^{n+1} = 0. \quad (88)$$

- Jeżeli dodatkowo przyjmie się założenie, że liczba Brinkmana jest rzędu $Br_n=O(10^{-2})$, to równanie energii (88) ostatecznie upraszcza się do postaci:

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1^*} \left(r_1 \frac{\partial T_1}{\partial r_1^*} \right) = 0. \quad (89)$$

- Tak więc w tym przypadku temperatura zależy od zmiennej r_1 .

6. Założenia upraszczające i warunki brzegowe

6.1. Założenia upraszczające

◆ Przypadki przepływu cieczy

- Gęstość cieczy występująca w przyrządach rotacyjnych zmienia się nieznacznie, stąd:

$$\rho = \text{const}. \quad (90)$$

- Ruch cieczy w przyrządach rotacyjnych jest wywołany ruchem obrotowym cylindra wewnętrznego o prędkości obwodowej U w [m/s]. Składowe wektora prędkości cieczy opisano wzorami (21)-(23).

- Stosunki prędkości V w kierunku promieniowym oraz prędkości W w kierunku wysokości przyrządu do prędkości obwodowej U cylindra wewnętrznego są rzędu 0,01 - czyli:

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{V}{U} = O(0,01), \quad \varepsilon_3 \equiv \frac{W}{U} = O(0,01). \quad (91),(92)$$

- Bezwymiarową grubość warstwy określa się wzorem:

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{R_z - R_w}{R_w} = \frac{\Delta R}{R_w}. \quad (93)$$

- W wyniku oszacowania rzędu wartości poszczególnych członów występujących w równaniach pędu dla $\varepsilon_1 = O(0,1)$ i dla liczb Reynoldsa $Re_n = O(10)$ uzyskuje się:

$$V_\varphi = V_\varphi(r), \quad V_r(r) \equiv 0, \quad V_z(r) \equiv 0. \quad (94)-(96)$$

Bezwymiarowe wartości pochodnych składowej V_φ względem zmiennej φ , a także wartości pochodnych składowych promieniowej V_r i pionowej V_z względem zmiennych r , φ , z są pomijalnie małe (rzędu 0,01) w porównaniu z wartościami pochodnych funkcji V_φ względem zmiennej r , które są rzędu jedności. Dlatego przyjmuje się, że składowa obwodowa V_φ jest różna od zera i jest funkcją tylko zmiennej r . Składowe V_r , V_z są stałe i pomijalnie małe.

- Dla przyjętych uproszeń równanie ciągłości (17) jest tożsamościowo spełnione.

- W wyniku oszacowania rzędu wartości poszczególnych członów występujących w równaniach pędu oraz na mocy wzorów (91)-(93) uzyskuje się:

$$p = p(r, z). \quad (97)$$

- Z przeprowadzonych oszacowań wynika, że pochodne ciśnienia w kierunku φ są pomijalnie małe, a pochodna ciśnienia w kierunku r jest funkcją składowej V_φ czyli jest funkcją r . Z oszacowania członów równania zachowania pędu w kierunku z wynika, że ciśnienie zmienia się w sposób liniowy w kierunku wysokości przyrządu rotacyjnego.
- Z uproszczeń (91) i (92) a także na podstawie oszacowań rzędu wartości członów występujących we wzorze (19) wynika, że lepkość pozorna jest funkcją tylko składowej obwodowej V_φ czyli zależy tylko od zmiennej r i indeksu przepływu cieczy n :

$$\mu_p = \mu_p(r, n). \quad (98)$$

- Indeks przepływu cieczy n jest pewną umowną miarą Reinera-Rivlina, która opisuje stopień zawartości zanieczyszczeń, dodatków polimerowych lub olejów w cieczy. Dla cieczy o własnościach nienewtonowskich $0,4 < n < 1$, a dla cieczy newtonowskiej $n=1$.
- W cieczy występują zwykle różne dodatki w postaci polimerów, olejów, tłuszczów czy zanieczyszczeń, które wpływają na własności fizyko – chemiczne cieczy, a zatem na zmiany lepkości cieczy na przestrzeni jej mieszania. Na mocy oszacowań zmiany ciśnienia i prędkości występują w kierunku promieniowym, to lepkość zmienia też w tym kierunku. Zmiany lepkości w kierunkach obwodowym i po wysokości naczynia są pomijalnie małe. Stąd lepkość dynamiczna cieczy ma następującą postać:

$$\mu = \mu(r). \quad (99)$$

◆ Nieizotermiczny przepływ cieczy

- W warstwie cieczy w przyrządach rotacyjnych nie ma zewnętrznych źródeł ciepła. Ciepło nie wytwarza się w cieczy na skutek reakcji chemicznych. Jeśli przyjmuje się, że parametry ε_2 i ε_3 są rzędu 0,01; natomiast parametr ε_1 jest rzędu 0,1; a także gdy pominiemy dysypację energii oraz konwekcję wymuszoną ciepła, to wyniku oszacowań uzyskuje się, że pochodne temperatury w kierunkach obwodowym i po wysokości przyrządu są pomijalnie małe w porównaniu z pochodną temperatury w kierunku promieniowym. Stąd wynika, że:

$$T = T(r). \quad (100)$$

Transport ciepła w cieczy odbywa się prawie wyłącznie na drodze przewodzenia w kierunku promieniowym.

- Zmiany ciśnienia wpływają minimalnie na zmianę lepkości dynamicznej. Temperatura zależna tylko od współrzędnej r powoduje, że lepkość dynamiczna cieczy zależy też tylko od współrzędnej r :

$$\mu = \mu[T(r)]. \quad (101)$$

- Z oszacowań wynika, że człony w równaniu energii opisujące konwekcję wymuszoną ciepła mają następującą bezwymiarową postać [4]:

$$Gz_n \varepsilon_1 \left(\varepsilon_2 V_{r1} \frac{\partial T_1}{\partial r_1} + \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi 1}}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial \varphi} + s_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 V_{z1} \frac{\partial T_1}{\partial z_1} \right). \quad (102)$$

gdzie parametr s_1 i liczbę Graetza Gz_n opisują odpowiednio wzory (47) i (59).

- Zakłada się, że badane ciecze słabo przewodzą prąd elektryczny. Zatem przewodność elektryczna właściwa jest bardzo mała. Przy niedużych gęstościach prądu \mathbf{J} człon opisujący w równaniu (20) ciepło Joule'a jest pomijanie mały, co wraza się wzorem:

$$\frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} \equiv \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})^2 \approx 0. \quad (103)$$

- Z oszacowań i przy wykorzystaniu uproszczeń (21)-(23) wynika, że człony opisujące dysypację energii w równaniu zachowania energii mają wymiarową postać [4]:

$$Br_n \varepsilon_1^{1-n} m_1(n) \left| \frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial V_{\varphi_1}}{\partial r_1^*} - \varepsilon_1 \frac{V_{\varphi_1}}{r_1} \right). \quad (104)$$

Jeśli liczba Brinkmanna Br_n jest rzędu 0,01 oraz parametr $\varepsilon_1 = O(0,01)$, to wyrażenie (104) ma wartość pomijalnie małą (co najwyżej 0,01) w porównaniu z członami opisującymi przewodzenie ciepła w kierunku promieniowym, które są rzędu jedności. Tak więc w rozpatrywanych liczb Brinkmanna pomija się dyssypację lepkościową w równaniu zachowania energii.

- Dyssypacja ciśnieniowa, wobec przyjętego równania ciągłości (17) oraz nieściśliwości cieczy jest równa zero, co wyrażamy następująco:

$$\mathbf{p} \cdot \text{div}(\mathbf{v}) = 0. \quad (105)$$

- Zmiany ciśnienia i temperatury są niewielkie w obszarze przepływu cieczy. Stąd współczynnik przewodności cieplnej cieczy λ występujący w równaniu (20) ma wartość stałą:

$$\lambda = \text{const.} \quad (106)$$

◆ Izotermiczny przepływ cieczy w polu elektromagnetycznym

- Powierzchnia zewnętrzna przyrządu wykonana jest z metalu, który nie przewodzi prądu elektrycznego. Stąd przyjmuje się, że prąd elektryczny płynie tylko w kierunku z po wysokości przyrządu. Dlatego współrzędne promieniowe J_r i obwodowe J_φ wektora gęstości prądu elektrycznego \mathbf{J} występujące w równaniach Maxwella (11)-(13) oraz w równaniach Ohma (14)-(16) są pomijalnie małe. Natomiast współrzędne J_z zależą tylko od współrzędnej z układu (r, φ, z) . Stąd mamy uproszczenie następujące:

$$J_r \equiv 0, \quad J_\varphi \equiv 0, \quad J_z = J_z(z). \quad (107)-(109)$$

- Przepływ prądu elektrycznego występuje wzdłuż osi OZ obrotu cylindra wewnętrznego. W równaniach Maxwella (11)-(13) i w równaniach Ohma (14)-(16) przyjmuje się, że współrzędne promieniowe E_r oraz współrzędne obwodowe E_φ wektora natężenia pola magnetycznego \mathbf{E} są równe zero. Natomiast współrzędne E_z po kierunku osio OZ zależą tylko od współrzędnej z układu (r, φ, z) . Stąd mamy dalsze uproszczenie:

$$E_r \equiv 0, \quad E_\varphi \equiv 0, \quad E_z = E_z(z). \quad (110)-(112)$$

- Prąd płynie w kierunku od podstawy przyrządu poprzez ciecz przewodzącą prąd elektryczny i cylinder wewnętrzny (mieszadło). Dlatego zakłada się, że współrzędne obwodowe B_φ oraz współrzędne B_z po kierunku wysokości przyrządu wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B} , występujące w równaniach Maxwella (11)-(13) oraz w równaniach Ohma (14)-(16), są również pomijalnie małe. Natomiast współrzędne promieniowe B_r zależą tylko od współrzędnej promieniowej r układu (r, φ, z) . Stąd mamy uproszczenie:

$$B_r = B_r(r), \quad B_\varphi \equiv 0, \quad B_z \equiv 0. \quad (113)-(115)$$

6.2. Warunki brzegowe

◆ Wszystkie rozpatrywane przypadki przepływu cieczy

- W równaniach opisujących przepływ cieczy niewiadomą jest prędkość obwodowa cieczy V_φ , która dla przyjętych uproszczeń, zależy tylko od współrzędnej promieniowej r . W analizie prędkości cieczy zakłada się, że prędkość cieczy przylegającej do cylindra wewnętrznego jest równa prędkości liniowej jego powierzchni. Z drugiej strony przyjmuje się, że na ściankach naczynia prędkość cieczy zanika. Stąd warunki brzegowe mają postać [4]:

$$V_\varphi(r = R_w) = \omega R_w, \quad V_\varphi(r = R_z) = 0. \quad (116),(117)$$

- Zakłada się, że wartość ciśnienia p w [Pa] na powierzchni cylindra zewnętrznego jest równa ciśnieniu atmosferycznego p_a w [Pa]. Stąd mamy warunek brzegowy [4]:

$$p(r = R_z) = p_a + \gamma H z_1. \quad (118)$$

◆ Nieizotermiczny przepływ cieczy

- Ponieważ zakłada się, że ciepło napływa z cylindra wewnętrznego przyrządu stąd wartość temperatury cieczy T w [K] na powierzchni tego cylindra różni się o wymiarowy przyrost temperatury ΔT_p w [K] w porównaniu z wartością temperatury otoczenia T_o w [K]. Prowadzi to do następujących warunków brzegowych [4]:

$$T(r = R_w) = T_o + \Delta T_p, \quad T(r = R_z) = T_o. \quad (119),(120)$$

7. Równania podstawowe po uwzględnieniu oszacowań i założeń upraszczających

7.1. Izotermiczny przepływ cieczy

◆ Przypadek cieczy o własnościach nienewtonowskich

- Równania zachowania pędu (1)-(3) wraz ze współzrędnymi tensora prędkości deformacji (5)-(10) po uwzględnieniu w nich założeń (90)-(99) i po tożsamościowym spełnieniu równania ciągłości (17) przyjmują następującą postać [4]:

$$\frac{d}{dr} \left(\mu_p(r) \frac{dV_\varphi}{dr} \right) + \frac{\mu_p(r)}{r} \cdot \frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{\mu_p(r)}{r^2} V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial \mu_p}{\partial r} = 0, \quad (121)$$

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{V_\varphi^2}{r}, \quad \frac{dp}{dz} = \gamma \quad (122),(123)$$

dla $R_w \leq r \leq R_z$, $0 \leq z \leq H$, gdzie γ oznacza ciężar cieczy w $[N/m^3]$.

- Lepkość pozorna cieczy określona wzorem (19) przyjmuje następującą postać [4]:

$$\mu_p(n,r) \equiv 2^{n-1} m(n) \cdot \left| \frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r} \right|^{n-1}. \quad (124)$$

W równaniu (121) niewiadomą jest funkcja prędkości cieczy $V_\varphi = V_\varphi(r)$, natomiast w równaniu (122) niewiadomą jest funkcja ciśnienia $p = p(r)$. Ponadto lepkość pozorna cieczy zależy od współrzędnej obwodowej wektora prędkości cieczy i zależy tylko od współrzędnej promieniowej r . Współczynnik konsystencji cieczy zależy od indeksu przepływu n . Dla równania (121) przyjmuje się warunki brzegowe (116) i (117), a dla równania (122) – warunek brzegowy (118).

◆ Przypadek cieczy o własnościach newtonowskich

- W przypadku, gdy lepkość dynamiczna cieczy zależy tylko od współrzędnej promieniowej r , tzn. $\mu_p(n,r) \equiv \mu(r)$, to równanie (121) i równanie (122) tworzą układ o postaci [4]:

$$\frac{d}{dr} \left(\mu(T) \frac{dV_\varphi}{dr} \right) + \frac{\mu(T)}{r} \cdot \frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{\mu(T)}{r^2} V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r} \cdot \frac{d\mu}{dr} = 0, \quad (125)$$

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{V_\varphi^2}{r}, \quad \frac{dp}{dz} = \rho g, \quad (126),(127)$$

dla $R_w \leq r \leq R_z$, $0 \leq z \leq H$, natomiast $T=T(r)$. W równaniu (125) niewiadomą jest funkcja prędkości cieczy $V_\varphi=V_\varphi(r)$. Dla równania (125) przyjmuje się warunki brzegowe (116) i (117), a dla równania (126)-(127) warunek brzegowy (118).

7.2. Nieizotermiczny przepływ cieczy

◆ Przypadek cieczy o własnościach newtonowskich

- Równanie pędu (1) oraz równanie energii (20) po podstawieniu współrzędnych tensora prędkości deformacji (5)-(10) i po tożsamościowym spełnieniu równania ciągłości (17) przyjmują następującą postać układu, w którym do równania (125) dopisuje się równanie:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\kappa \cdot r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (128)$$

dla $R_w \leq r \leq R_z$, $\mu=\mu[T(r)]$, gdzie współczynnik przewodzenia temperatury κ w [m^2/s] definiuje się następującym wzorem:

$$\kappa \equiv \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}. \quad (129)$$

Symbol λ oznacza stały współczynnik przewodności cieplnej cieczy, ρ – stałą gęstość cieczy, c_p – ciepło właściwe cieczy w [$J/kg \cdot K$]. Obecnie dla równania (125) zakłada się warunki brzegowe (116) i (117), natomiast dla równania (128) przyjmuje się warunki brzegowe (119) i (120). W równaniu (125) niewiadomą jest funkcja prędkości cieczy $V_\varphi=V_\varphi(r)$, a w równaniu (128) niewiadomą jest funkcja temperatury $T=T(r)$. Obie niewiadome funkcje są zależne od współrzędnej promieniowej r układu (r,φ,z) . Ponadto zakłada się, że lepkość dynamiczna cieczy, określona wzorem (101) zależy wyłącznie od temperatury.

7.3. Izotermiczny przepływ cieczy w polu elektromagnetycznym

◆ Przypadek cieczy o własnościach newtonowskich

- W równaniu pędu (2) podstawia się współrzędne tensora prędkości deformacji (5)-(10). Równanie ciągłości (17) jest tożsamościowo spełnione. Ponadto przyjmuje się, że siły Lorenza działają tylko w kierunku długości z przyrządu pomiarowego, a zatem zakłada się niezerowe współrzędne J_z wektora gęstości prądu elektrycznego. Współrzędne promieniowe J_r i współrzędne obwodowe J_φ uważa się za znikomo małe. Wówczas równanie pędu (2) przyjmuje następującą postać [4]:

$$\mu \left(\frac{d^2 V_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} V_\varphi \right) + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\varphi = 0, \quad (130)$$

gdzie

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\varphi = J_z B_r - J_r B_z \approx J_z B_r. \quad (131)$$

W równaniu (130) niewiadomą jest funkcja prędkości cieczy $V_\varphi = V_\varphi(r)$ zależna tylko od współrzędnej r układu (r, φ, z) . Lepkość dynamiczna cieczy jest stała.

W zależności (131) przyjmuje się ponadto, że współrzędne w kierunku wysokości słupa cieczy B_z wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B} są pomijalnie małe ponieważ przepływ prądu elektrycznego ma miejsce pomiędzy dnem przyrządu pomiarowego a cylindrem wewnętrznym. Ścianka zewnętrzna (cylinder zewnętrzny) przyrządu pomiarowego (uproszczonego mieszalnika) nie przewodzi prądu elektrycznego.

8. Wnioski

- W pracy przedstawiono równania pędu i ciągłości z uwzględnieniem cieczy nienewtonowskich oraz sił Lorentza.
- W rozważaniach pokazano oszacowania wszystkich równań oraz przedstawiono założenia ubezwymiarowujące i stosowane liczby podobieństwa. Dla uproszczonych równań pokazano odpowiednie założenia upraszczające oraz warunki brzegowe.
- Wyprowadzone równania będą zastosowane do dalszych badań przepływu cieczy w przyrządach rotacyjnych z uwzględnieniem cieczy newtonowskich, nienewtonowskich jak i cieczy przewodzących prąd elektryczny.
- Wyprowadzone równania posłużą do analizy parametrów eksploatacyjnych przyrządów rotacyjnych dla cieczy newtonowskich o zmiennej lepkości zależnej od własności fizykochemicznych cieczy, dla cieczy newtonowskich o zmiennej lepkości zależnej od temperatury cieczy oraz dla cieczy przewodzących prąd elektryczny w polu elektromagnetycznym.
- Analiza parametrów eksploatacyjnych będzie dotyczyła bezwymiarowych rozkładów prędkości cieczy, naprężeń stycznych w cieczy oraz zapotrzebowania na moc potrzebną do napędu przyrządów rotacyjnych i pewnych typów uproszczonych mieszalników walcowych.

Literatura

- [1] Astarita G., Marrucci G.: *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*, McGraw-Hill Co., London & New York 1974, pp. 1-200.
- [2] Böhme G.: *Strömungsmechanik nicht-Newtonscher Fluid*, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, LAMM, Band 52 B.G. Teubner, Stuttgart 1981, S. 1-280.
- [3] Brauer H.: *Grundlagen der Einphasen und Mehrphasenströmungen*, Verlag Sauerländer, Aarau und Frankfurt am Main 1971, S. 18-70, 869-937.
- [4] Czajkowski A.A.: *Research on the influence of rheological properties of a fluid on the exploitation parameters of rotary devaces*, Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences, University of Technology in Szczecin, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Informatics and Technical Education Szczecin 1994, (in Polish).

- [5] Czajkowski A.A., Wierzcholski K.: *Numerical analysis of the values of a velocity function for Newtonian fluid with non-monotone variable dynamic viscosity in flows occurring in the cylindrical mixers*, Scientific Publications of the Silesian University of Technology, No. 1154, Mechanics No. 107, Gliwice 1992, Poland pp. 79-85, (in Polish).
- [6] Czajkowski A.A., Wierzcholski K.: *Numerical analysis of shear stresses distribution occurring in the non-isothermal Newtonian fluid flow with changeable dynamic viscosity dependent form temperature in the cylindrical mixers*, Proceedings of The X Local Conference of Fluid Mechanics, Sarnówek, Poland, 1992, Vol. II, pp. 222-227, (in Polish).
- [7] Czajkowski A.A., Wierzcholski K.: *Numerical analysis of the values of velocity function for Newtonian and non-isothermal fluid with temperature-dependent variable dynamic viscosity in flows occurring in the cylindrical mixers*, Proceedings of The X Local Conference of Fluid Mechanics, Sarnówek, Poland, 1992, Vol. II, pp. 228-233, (in Polish).
- [8] Czajkowski A.A., Wierzcholski K.: *Analysis of tangential stresses occurring during the mixing process in the cylindrical mixer for electrically conducting fluid*, Proceedings of The II International Conference „Boundary Element Techniques and Singularity Methods in Engineering”, Wrocław 1992, Poland, pp. 177-187.
- [9] Czajkowski A.A., Wierzcholski K.: *Analytical solutions of some ordinary non-linear differential equation of the second order describing the non-Newtonian fluid flow in the mixing process*, Proceedings of The VII International Conference „System-Modelling-Control-7”, Zakopane 1993, Poland, Vol. 1, pp. 108-113.
- [10] Czajkowski A.A., Wierzcholski K.: *Numerical analysis of shear stress occurring in the pseudo-Newtonian fluid flow in a mixing cylinder*, Scientific Publications of the Silesian University of Technology, No. 1231, Mechanics No. 116, Gliwice 1994, Poland, pp. 93-102 (in Polish).
- [11] Friedrich M.: *Dissipation in gerührten nicht-Newtonschen Flüssigkeiten*, Der Fakultät für Maschinenwesen der Universität Hannover, Hannover im Februar 1990, S. 1-77.
- [12] Halsey Th.C., Martin J.E.: *Electrorheological fluids*, World of Science, December 1993, pp. 44-51 (in Polish).
- [13] Hughes W.F., Young F.J.: *Electro-magneto-dynamics of fluids*, John Wiley & Sons, New York – London, 1966, pp. 83-100.
- [14] Kamke E.: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1 Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, GEST & PORTIG K.-G., Leipzig 1967, Auflage 8, S. 119-138.
- [15] Kaćki E.: *Partial differential equations in physics and technology problems*, WNT, Warsaw 1989, the second edition, changed, pp. 115-119 (in Polish).
- [16] Kembłowski Z.: *Rheometry non-Newtonian fluids*, WNT, Warsaw 1973, the first edition, pp. 7-60 & 119-178, (in Polish).
- [17] Лойцянский Л.Г.: *Механика жидкости и газа*, Издательство «Наука», Москва 1978, стр. 1-100.
- [18] Пикус Ю.М.: *Гидросматическая смазка вязкопластичными и вязкими жидкостями*, Издательство «Вышэйшая Школа» Государственного Комитета БССР, Минск 1981, стр. 1-37.
- [19] Schilo D.: *Leistungsbedarf von Tangentialrührern beim Rühren nicht-Newtonscher Flüssigkeiten*, Technische Universität Berlin, Nr 41 1969 5/6, S. 253-259.
- [20] Stręk Fr.: *Mixing and mixers*, WNT, Warsaw 1981, the second edition, amended and extended, pp. 19-306, (in Polish).

- [21] Subba Raju P.V.: *Flow between two unsteadily rotating disks*, Applied Scientific Research 16, No. 5 1966, pp. 395-404.
- [22] Teipel I., Evers W.: *Similarity solutions for viscoelastic fluid near an infinite rotating disk*, Proceedings of The X Brazilian Congress of Mechanical Engineering, Rio De Janeiro, Brazil, 1989 December, pp. 5-8.
- [23] Trusdell C.: *A first course in rational continuum mechanics*, John Hopkins University, Baltimore Maryland 1972, pp. 1-230.
- [24] White F.M.: *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill Inc., New York, St. Louis, San Francisco, Düsseldorf, Johannesburg, Kuala Lumpur, London, Mexico, Montreal, New Delhi, Panama, Paris, São Paulo, Singapur, Sydney, Tokyo, Toronto 1974, pp. 110-195.
- [25] Wierzholski K.: *Estimation and integration of the basic equations for the non-Newtonian lubricant flow in the journal-thrust-bearing gap with non-monotonic curvilinear generating line of journal surface*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, Tome 33, No. 4, 1988, pp. 370-374.
- [26] Wierzholski K.: *Strömung des Schmierstoffs im deformierten Krummlinigen Spalt des Gleitlagers im magnetischen Field*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, Tome 29, No. 2, 1984, pp. 193-200.
- [27] Wierzholski K.: *Estimation of solutions of basic equations for the non-Newtonian fluid flow in a film between two non-rotational surfaces*, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série de Mécanique Appliquée, Tome 36, No. 1-2, 1991, pp. 103-122.
- [28] Wierzholski K.: *Mathematical methods in hydrodynamic theory of lubrication*, Scientific Papers of Polytechnic University of Szczecin, Nr 511, Department of thermal engineering Nr 4, Publisher of Polytechnic University in Szczecin, 1993, the first edition, pp. 19-30.
- [29] Wierzholski K., Czajkowski A.A.: *Electro-magneto-dynamic fluid flow in the cylindrical mixer*, Proceedings of The IV International Conference of Fluid Mechanics, Alexandria, The Arab Republic of Egypt, 1992, Vol. VIII, pp. 303-308.
- [30] Wilkinson W.L.: *Non-Newtonian fluids*, WNT, Warsaw 1963, the first edition, pp. 38-70 & 136-160, (in Polish).
- [31] Zierep J.: *Similarity criteria and principles of fluid mechanics modeling*, PWN, Warsaw 1978, the first edition, pp. 9-12 & 50, (in Polish).