

Marek Lis, Politechnika Częstochowska, Częstochowa  
Andrzej Szafraniec, Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny, Radom

## MODEL MATEMATYCZNY SYNCHRONICZNEGO UKŁADU POMPOWEGO O PODATNEJ TRANSMISJI RUCHU

### MATHEMATICAL MODEL OF A SYNCHRONIC PUMP SYSTEM WITH A SUSCEPTIBLE MOVEMENT TRANSMISSION

**Streszczenie:** W pracy, wychodząc z interdyscyplinarnych podejść, opracowano model matematyczny układu pompowego dużej mocy, składającego się z silnika synchronicznego o biegunach jawnych, który przez podatną transmisję ruchu napędza pompę pionową. Transmisje ruchu rozpatruje się, jako ekwiwalentne sprzęgło elastyczne o mechanicznych parametrach skupionych. Ogólne różniczkowe równania elektromechaniczno-hydraulicznego stanu przedstawione są w postaci Cauchy'ego. Wyniki symulacji komputerowej przedstawione są w postaci rysunków.

**Abstract:** In the article, a mathematical model of a high power pump system was developed. The pump system consists of a synchronous motor with non-salient poles, a clutch that provides a susceptible movement transmission and a vertical pump. The model was developed based on an interdisciplinary approach. Movement transmissions are considered as an equivalent flexible coupling with mechanical clustered parameters. General differential equations of electro-mechanical-hydraulic state are presented in the Cauchy form. The results of the computer simulation are presented in the figures.

**Słowa kluczowe:** silniki synchroniczne, układy pompowe, modelowanie interdyscyplinarne, kompensacja mocy biernej.

**Keywords:** synchronous motors, pumping systems, interdisciplinary modeling, reactive power compensation.

#### 1. Wstęp

Układy pompowe dużej mocy są stosowane między innymi w elektrowniach do ochłodzenia turbozespołów. Najczęściej pompy pionowe dużej mocy są napędzane przez silniki asynchroniczne [1], [7], [8], [9], [11],[12].

Wynika to z szeregu znanych zalet silników asynchronicznych w porównaniu z innymi maszynami elektrycznymi. Jedną z głównych wad napędów asynchronicznych dużej mocy są duże prądy magnesowania, co prowadzi do niezbędności stabilizacji napięcia układu napędowego, którego elementami są asynchroniczne układy pompowe [3], [5], [6]. W wielu przypadkach należy stosować układy do kompensacji mocy biernej, szczególnie w przypadkach pracy dużej ilości napędów asynchronicznych. Zastosowanie baterii kondensatorów statycznych komplikuje fakt, że silniki asynchroniczne dużych mocy są zasilane z sieci średniego napięcia, co z kolei wymusza zastosowanie kosztownych urządzeń kompensacyjnych [3].

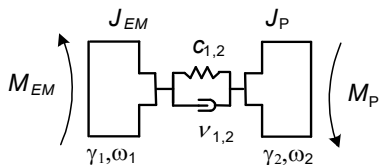
W przypadku zastąpienia silnika asynchronicznego silnikiem synchronicznym problem kompensacji mocy biernej w przedsiębiorstwach znika automatycznie [2].

W pracy przedstawiono model matematyczny jawnobiegunowego silnika synchronicznego, który przez długi wał napędza pompę pionową. Takie układy mogłyby mieć zastosowanie w elektrowniach. Z punktu widzenia energetyki do opisywania wymienionego układu należy wykorzystywać zasady fizyczne z trzech dziedzin nauki: elektrotechniki, mechaniki stosowanej oraz hydrauliki. My proponujemy inne podejście – stworzenie modelu matematycznego scalonego układu, wykorzystującego zasadę Hamiltona-Ostrogradskiego, która została zmodyfikowana w pracy [3], [4]. Zasada ta ma zastosowanie w skomplikowanych układach dynamicznych z uwzględnieniem praktycznie wszystkich uogólnionych sił działania zarówno w samym układzie, jak i na zewnątrz badanego układu.

**Celem pracy** jest modelowanie matematyczne procesów nieustalonych w synchronicznym układzie pompowym o podatnej transmisji ruchu na podstawie zmodyfikowanej zasady Hamiltona-Ostrogradskiego.

## 2. Model matematyczny układu

Model matematyczny układu tworzymy, korzystając z rozszerzonej funkcji Lagrange'a [6], [7], [8].



Rys. 1. Schemat długiego wału ze sprzęgłem sprężysto-elastycznym

$$\begin{aligned} \dot{P}'_0 = & \sum_{j=1}^3 \int_0^{i_{Sj}} \Psi_{Sj}(i_{Sj}) di_{Sj} + \sum_{m=1}^3 \int_0^{i_{Rm}} \Psi_{Rm}(i_{Rm}) di_{Rm} + \\ & \left. + \frac{J_{EM} \omega_1^2}{2} + \frac{J_P \omega_2^2}{2} + \frac{L_\Sigma Q^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \dot{P}'_{EM} = & \sum_{j=1}^3 \int_0^{i_{Sj}} \Psi_{Sj}(i_{Sj}) di_{Sj} + \sum_{m=1}^3 \int_0^{i_{Rm}} \Psi_{Rm}(i_{Rm}) di_{Rm}; \\ T_M = & \frac{J_{EM} \omega_1^2}{2} + \frac{J_P \omega_2^2}{2}; \quad T_\Sigma = \frac{L_\Sigma Q^2}{2}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} P = & \frac{c_{1,2}(\gamma_2 - \gamma_1)}{2}, \quad \Phi = \sum_{j=1}^3 \int_0^t \frac{1}{2} r_{Sj} i_{Sj}^2 d\tau + \\ & + \sum_{m=1}^3 \int_0^t \frac{1}{2} r_{Rm} i_{Rm}^2 d\tau + \frac{v_{1,2}(\omega_2 - \omega_1)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t R_\Sigma Q^2 d\tau; \end{aligned} \quad (3)$$

$$D = \sum_{j=1}^3 \int_0^t u_{Sj} i_{Sj} d\tau + \int_0^t u_f i_f d\tau, \quad j = A, B, C, \quad m = D, Q, f \quad (4)$$

gdzie:  $\dot{P}'_0$ ,  $P$ ,  $\Phi$ ,  $D$  – odpowiednio koenergia kinetyczna układu, energia potencjalna, energia dyssypacji, energia sił niepotencjalnych układu  $\dot{P}'_{EM}$  – koenergia silnika synchronicznego,  $T_M$  – energia kinetyczna transmisji ruchu,  $T_\Sigma$  – całkowita energia kinetyczna pompy wraz z rurociągiem,  $\Psi$  – sumaryczne strumienie skojarzone uzwojeń maszyny,  $i$  – prądy w uzwojeniach silnika;  $r_S$  – oporność fazy uzwojenia stojana;  $r_R$  – oporność uzwojenia wirnika;  $S, R$  – indeksy parametrów odpowiednio stojana i wirnika;  $A, B, C$  – indeksy faz zasilania silnika elektrycznego;  $m$  – indeksy uzwojeń wirnika ( $D$  – dotyczy osi  $d$  uzwojenia tłumiącego,  $Q$  – dotyczy osi  $q$  uzwojenia tłumiącego),  $f$  – indeksy uzwojenia wzbudzenia;  $u_S$  – napięcie zasilania silnika;  $u_f$  – napięcie zasilania uzwojenia wzbudzenia wirnika,  $J_{EM}, J_P$  – momenty bezwładności wirnika i pompy pionowej,  $M_{EM}, M_P$  – momenty elektromagnetyczne silnika i hy-

drauliczny pompy,  $\gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2$  – kąty obrotu oraz prędkości kątowe odpowiednich jednostek inercyjnych,  $Q$  – wydajność pompy,  $c_{1,2}, v_{1,2}$  – współczynniki sztywności i rozproszenia sprzęgła elastycznego,  $L_\Sigma$  – inercyjność rurociągu i pompy,  $R_\Sigma$  – oporność hydrauliczna pompy i rurociągu,  $t$  – czas,  $\tau$  – dodatkowa zmienna całkowania.

Na podstawie wyrażeń (1) – (3) wyznaczamy niekonserwatywną funkcję Lagrange'a  $L = \dot{P}'_0 - P + \Phi - D$ , która występuje w równaniu Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_k} - \frac{\partial L}{\partial \phi_k} = 0, \quad k = 1-9 \quad (5)$$

gdzie:  $k$  – liczba stopni swobody holonomicznego układu,  $q_{(1-6)} = Q_{SA}, Q_{SB}, Q_{SC}, Q_{RD}, Q_{RO}, Q_{Rf}$  – ładunki elektryczne odpowiednio w uzwojeniach stojana i wirnika,  $q_{7,8} = \gamma_1, \gamma_2, q_9 = V$ .

Uwzględniając uogólnione prędkości  $\dot{\phi} \equiv dq/dt$  wyznaczamy wartości prądów w uzwojeniach oraz prędkość kątową i wydajność pompy:

$$\dot{\phi}_{(1-6)} = i_{SA}, i_{SB}, i_{SC}, i_{RD}, i_{RO}, i_{Rf}, \quad \dot{\phi}_{7,8} = \omega_1, \omega_2, \quad \dot{\phi}_9 = Q.$$

Korzystając z teorii Wita-Woodsona wyznaczamy [3], [10]:

$$M_{EM} = \frac{\partial [\dot{P}'_{EM}^*]}{\partial \dot{\gamma}}, \quad u_f = \frac{\partial [\dot{P}'_{EM}^*]}{\partial \dot{Q}_f}, \quad \rho g(H_\Gamma - H_0) = \frac{\partial [\dot{P}'_{EM}^*]}{\partial V} \quad (6)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość płynu,  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  $(H_\Gamma - H_0)$  – różnica wysokości podnoszenia płynu. Po wykonaniu matematycznych przekształceń w postaci macierzowo-wektorowej otrzymujemy:

$$\frac{d\Psi_S}{dt} = \mathbf{u}_S - \mathbf{r}_S \mathbf{i}_S, \quad \Psi_S = \mathbf{\Pi}^{-1} \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{\Pi} \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sin(\gamma_1 - 120^\circ) & \sin \gamma_1 \\ -\cos(\gamma_1 - 120^\circ) & \cos \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\frac{d\Psi_R}{dt} = \mathbf{u}_R - \mathbf{r}_R \mathbf{i}_R, \quad \Psi_R = \boldsymbol{\psi} \quad (8)$$

$$\mathbf{i}_S = \boldsymbol{\alpha}_{\sigma S} (\Psi_S - \mathbf{\Pi}^{-1} \boldsymbol{\psi}),$$

$$\mathbf{i}_R = \boldsymbol{\alpha}_{\sigma R} (\Psi_R - \mathbf{B} \boldsymbol{\psi}), \quad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \frac{L_d}{1 + L_d(\alpha_{\sigma S} + \alpha_D + \alpha_f)} & \\ & \frac{L_q}{1 + L_q(\alpha_{\sigma S} + \alpha_Q)} \end{bmatrix} \times (\boldsymbol{\alpha}_{\sigma S} \mathbf{\Pi} \Psi_S + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\alpha}_{\sigma R} \Psi_R) \quad (10)$$

gdzie:  $\mathbf{\Pi}$  – macierz Parka,  $\mathbf{B}$  – macierz topologiczna [3], [5].

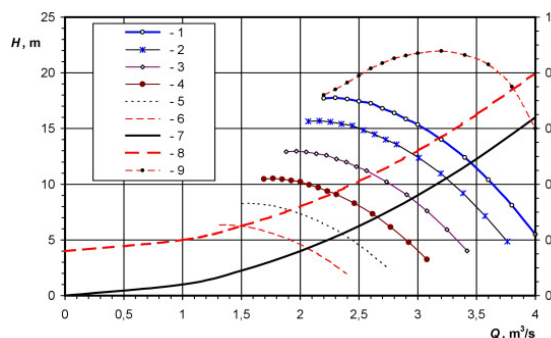
Moment elektromagnetyczny silnika synchronicznego wyznaczamy korzystając z [3]:

$$M_{EM} = \sqrt{3}p_0(\psi_{SA}i_{SB} - \psi_{SB}i_{SA}) \quad (11)$$

### 3. Model matematyczny pompy

Analiza układu pompowego jest bardzo skomplikowaną procedurą z punktu widzenia znalezienia wartości parametrów pompy. W pracy [8] wyznaczono parametry pompy, które z zadowalającą dokładnością odwzorowują pracę układu pompowego w stanach dynamicznych. Przy opisie rurociągu wykorzystuje się równania różniczkowe Bernoulliego [9], [11]. Moment obciążenia silnika synchronicznego wyznaczamy na podstawie teorii podobieństwa [8], [9]. Wysokość podnoszenia pompy w funkcji wydajności jest aproksymowana przez zależności paraboliczne:

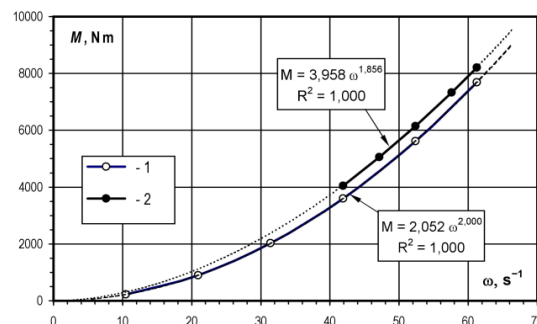
$$H = a + bQ + cQ^2, \quad (12)$$



Rys. 2. Wysokość podnoszenia pompy, charakterystyka rurociągu i sprawność pompy w funkcji wydajności

W wyniku aproksymacji otrzymano charakterystyki przedstawione na rysunku 2. Charakterystyki pompy 1 – 6 przedstawiono dla różnych prędkości obrotowych. Charakterystyki rurociągu 7-8 wykonano dla wysokości podnoszenia  $H_r = 0$  m i 4 m. Krzywa 9 przedstawia sprawność pompy.

Na rysunku 3 przedstawiono zależności momentu obciążenia układu hydraulicznego w funkcji prędkości kątowej.



Rys. 3. Zależność momentu obciążenia w funkcji prędkości kątowej podczas rozruchu pompowego układu synchronicznego dla  $H_r = 0$  m i 4 m

Moment obciążenia silnika synchronicznego wyznaczamy z zależności:

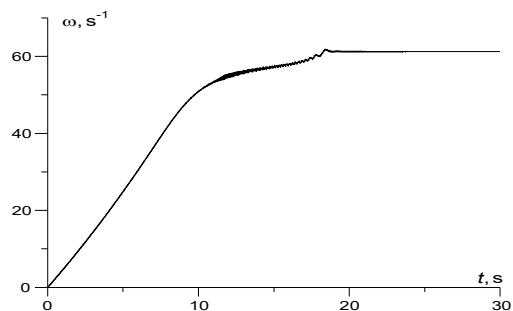
$$M_p = 3,958 \omega^{1,856} \quad (13)$$

### 4. Wyniki symulacji komputerowej

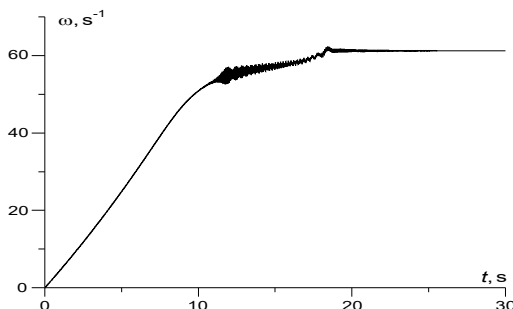
Symulację komputerową przeprowadzono dla napędu synchronicznego o podatnej transmisji ruchu z silnikiem jawnobiegunowym o danych znamionowych:  $P_N = 630$  kW,  $U_N = 6$  kV,  $n_N = 750$ , obr/min,  $u_f = 42$  V,  $p = 4$ .

Dane wału i sprzęgła:  $l_0 = 6$  m,  $G = 8,1 \cdot 10^{10}$  Nm,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>,  $d_0 = 200$  mm,  $\xi = 300$  Nm<sup>2</sup>s. Dane pompy:  $n_N = 585$  ob./min,  $H_{\max} = 13,6$  m.  $Q_N = 10700$  m<sup>3</sup>/h. Dane rurociągu: średnica rury  $D=1,2$  m, długość  $l=1500$  m,  $H_G=4$  m. Podczas asynchronicznego rozruchu układu pompowego uzwojenia wzbudzenia zostało zwarte, aby zmniejszyć wartość SEM samoindukcji. Łopatki pompy zostały skrócone na minimalny kąt  $\delta = -8^\circ$ , przez co wydajność pompy zmniejsza się około dwa razy. Po osiągnięciu podsynchronicznej prędkości obrotowej uzwojenie wzbudzenia zostało zasilane napięciem  $u_f = 30$  V, przy którym występuje maksymalna sprawność silnika, a także zostały skrócone łopatki pompy na maksymalny kąt  $\delta = 2^\circ$ . Czas pracy symulacji wynosił 30 s. Następnie, przeprowadzono cztery eksperymenty, które dotyczyły zmian napięcia wzbudzenia silnika:  $u_{f1} = 16$  V,  $u_{f2} = 26$  V,  $u_{f3} = 42$  V,  $u_{f4} = 50$  V, które dotyczyły czasu 35 s.

Celem symulacji jest wyznaczenie zmian kąta między napięciem i prądem w przewodach zasilania silnika synchronicznego.

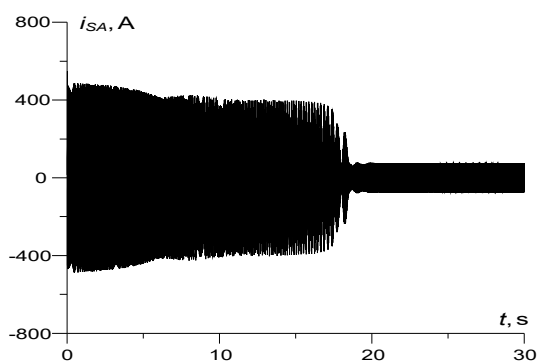


Rys. 4. Chwilowa prędkość obrotowa silnika

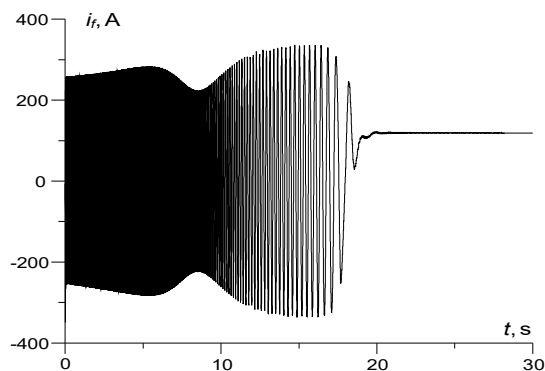


Rys. 5. Chwilowa prędkość obrotowa wału pompy

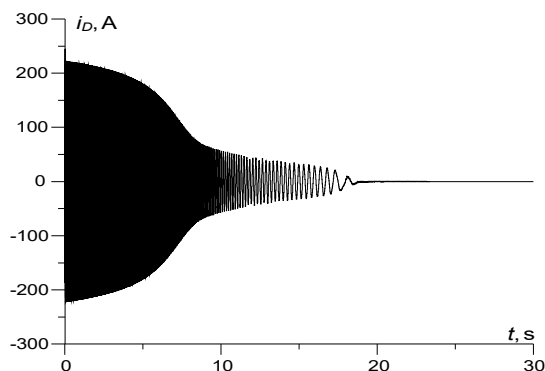
Na rysunkach 4, 5 przedstawiono chwilowe prędkości obrotowe wirnika silnika oraz wału pompy. Porównując rysunki 4 i 5 widzimy wpływ podatności długiego wału transmisji ruchu na wartości prędkości obrotowej. Ponieważ całkowity moment bezwładności pompy jest zdecydowanie mniejszy od momentu bezwładności wirnika, to amplituda oscylacji wału pompy będzie większą od amplitudy oscylacji wirnika silnika. W stanie ustalonym prędkości wyrównają się.



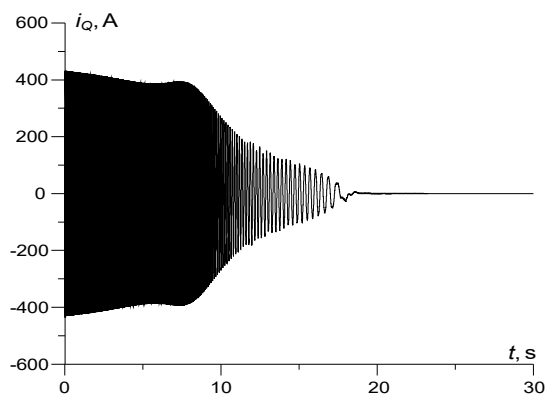
Rys. 6. Chwilowy prąd fazy A uzwojenia twornika



Rys. 7. Chwilowy prąd wzbudzenia silnika

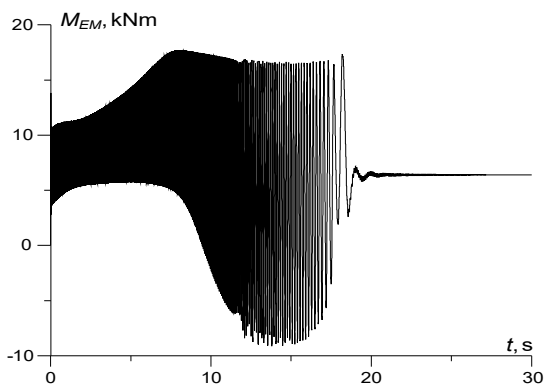


Rys. 8. Chwilowy prąd tłumienia za osią d

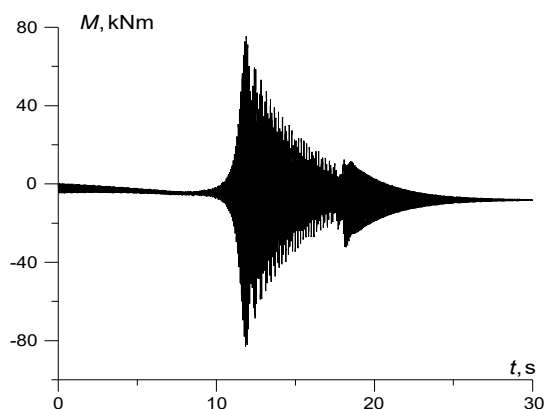


Rys. 9. Chwilowy prąd tłumienia za osią q

Na rysunkach 6 – 9 przedstawiono chwilowe prądy w uzwojeniach silnika. Podczas rozruchu silnika synchronicznego w uzwojeniu wzbudzenia indukują się oscylacyjny prąd, który w stanie ustalonym osiąga wartość  $i_f = 115$  A. Podobna sytuacja ma miejsce w tłumiącym układzie rozruchowym. Analizowany silnik synchroniczny ma uzwojenie klatkowe do asynchronicznego rozruchu silnika. Dlatego prądy tłumiące płyną głównie podczas rozruchu. W stanie ustalonym w uzwojeniu klatkowym prądy zanikają, co widać na rysunkach 8 i 9.

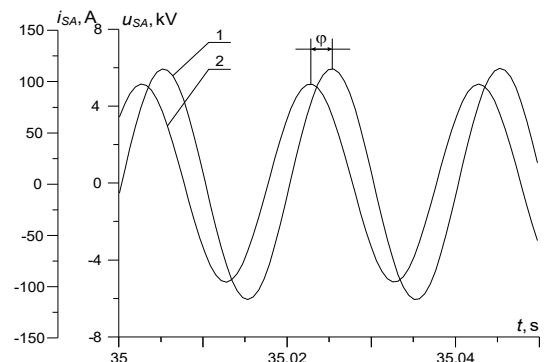


Rys. 10. Moment elektromagnetyczny silnika

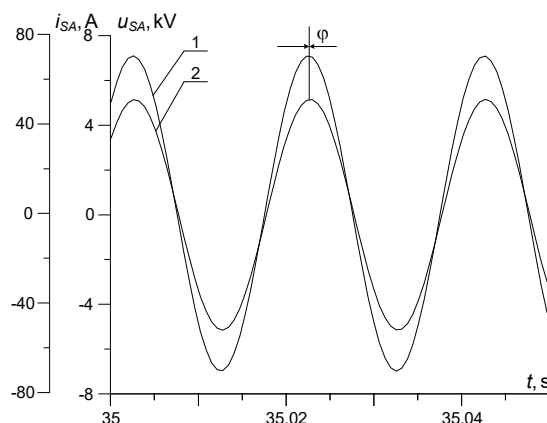


Rys. 11. Moment sprężystości w wale transmisji ruchu

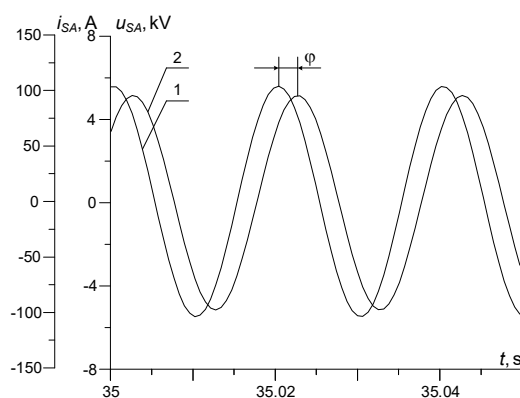
Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono chwilowe momenty: elektromagnetyczny i sprężystości w wale transmisji ruchu. Moment elektromagnetyczny silnika na początku rozruchu przyjmuje oscylacyjny charakter, a po rozruchu jego częstotliwość zmniejsza się i w stanie synchronicznym przyjmuje stałą wartość. Wartość momentu sprężystości, w stanie wchodzenia układu w synchronizm, wzrasta 13 razy w stosunku do stanu ustalonego, w którym momenty z rysunków 10 i 11 przyjmują jednakowej wartości – około 6,3 kNm.



Rys. 12. Przebieg prądu 1 i napięcia 2 fazy A w stanie ustalonym –  $u_f = 16V$ ,  $\varphi = 48^\circ$



Rys. 13. Przebieg prądu 1 i napięcia 2 fazy A w stanie ustalonym –  $u_f = 26V$ ,  $\varphi = 0^\circ$



Rys. 14. Przebieg prądu 1 i napięcia 2 fazy A w stanie ustalonym –  $u_f = 42V$ ,  $\varphi = 43^\circ$

Rysunki 12 – 14 przedstawiają przebiegi prądu 1 i napięcia 2 fazy A w stanie ustalonym dla różnych wartości napięć wzbudzenia silnika synchronicznej:  $u_f = 16, 26, 42, V$ . Zastosowanie silników synchronicznych nie wymaga stosowania kompensacji mocy biernej. Z punktu widzenia fizyki kompensacja mocy biernej powiązana jest ze zmianą charakteru obciążenia zespołów elektrycznych z aktywno-indukcyjnego na aktywno-pojemnościowe, co z kolei prowadzi do podwyższenia napięcia. Zmiana wartości napięcia wzbudzenia silnika synchronicznego w pierwszym przybliżeniu oznacza zmianę typu obciążenia zespołu. Z punktu widzenia elektrotechniki teoretycznej powoduje to zmiany kąta  $\varphi$  między napięciem oraz prądem. Ponieważ rozpatrywany układ elektromechaniczny jest zasilany ze źródła o nieskończonej mocy, to zmiany są zauważalne w wartościach prądu pobieranego przez układ pompowy. Najbardziej korzystną w naszym przypadku jest praca układu przy obciążeniu rezystancyjnym (rys. 13). Na rysunku 12 pokazano pracę układu przy obciążeniu rezystancyjno-indukcyjnym.

Na rysunku 14 przy znamionowym napięciu wzbudzenia układ ma charakter obciążenia rezystancyjno-pojemnościowy.

## 5. Wnioski

1. Wykorzystanie podejść wariacyjnych do modelowania skomplikowanych obiektów dynamicznych daje możliwość stworzenia końcowych równań stanu systemu wyłącznie z jednego podejścia energetycznego. Dotyczy to w szczególności układów pompowych dużej mocy.

2. Zastosowanie w układach pompowych dużej mocy silników synchronicznych zamiast tradycyjnych – asynchronicznych nie wymaga kompensacji mocy biernej.

## 6. Literatura

- [1]. Glinka T.: "Dynamika silnika indukcyjnego i synchronicznego po wyłączeniu i ponownym załączeniu napięcia", *Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe*, nr 1/2017, str. 1 - 14.
- [2]. Zawilak T.: "Silnik synchroniczny wzbudzany magnesami trwałymi w napędzie pompy dużej mocy", *Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe*, nr 2/2015, str. 247 - 251.
- [3]. Czaban A.: „Modelowanie matematyczne procesów oscylacyjnych w systemach elektromechanicznych” *Wydawnictwo T. Soroki*, Lwów 2008, str. 328.
- [4]. Czaban A., Lis M., Sosnowski J., Lewoniuk W.: „Model matematyczny dwuprzewodowej linii zasilania z wykorzystaniem modyfikowanej zasady Hamiltona”, *Maszyny Elektryczne - Zeszyty Problemowe*, nr 1/2016, str. 31 - 36.
- [5]. Czaban A., Lis M.: „Model matematyczny układu napędowego z silnikiem synchronicznym jako nauczyciel sztucznej sieci neuronowej”, *Przegląd Elektrotechniczny*, 12/2013, str. 320 – 323.
- [6]. Lis M.: „Modelowanie matematyczne procesów nieustalonych w elektrycznych układach napędo-

wych o złożonej transmisji ruchu”, – *Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej*, 2013, str.258.

- [7]. Szafraniec A.: „Modelowanie matematyczne procesów oscylacyjnych w napędzie elektrohydraulicznym o podatnej transmisji ruchu”, *Przegląd Elektrotechniczny*, 12/2017, str. 167-170.
- [8]. Łukasik Z., Czaban A., Szafraniec A., Żuk V.: „The mathematical model of the drive system with asynchronous motor and vertical pump”, *Przegląd Elektrotechniczny*, 1/2018, str. 133-138.
- [9]. Mandrus W., Żuk W.: „Hydraulika, napędy hydrauliczne i pneumatyczne maszyn wojskowych”, *ACB*, Lwów 2013, str. 372.
- [10]. Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J., Sira-Ramirez H.: “Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications”, *Springer Verlag*, London 1998, str. 543.
- [11]. Jędrał W., Karaśkiewicz K., Szymczyk J.: „Badanie nieustalonych stanów pracy i charakterystyk zupełnych pomp wirowych”, *Instal* 11/2013, str. 21-24.
- [12]. Zhang D., Shi W., Chen B., Guan X.: “Unsteady flow analysis and experimental investigation of axial-flow pump”, *Journal of Hydrodynamics*, 2010, v. 22(1), str. 35 – 43.

## Autorzy

dr hab. inż. Marek Lis prof. nadzw. Politechniki Częstochowskiej, Zakład Maszyn i Napędów Elektrycznych Wydziału Elektrycznego  
ul. Armii Krajowej 17  
lism@el.pcz.czyst.pl  
dr inż. Andrzej Szafraniec  
Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny  
im. Kazimierza Pułaskiego  
Wydział Transportu i Elektrotechniki  
26-600 Radom, ul. Malczewskiego 29  
a.szafraniec@uthrad.pl  
tel. 48 3617760