

PAULINA OBARA<sup>1</sup>  
EWA NOWAK<sup>2</sup>  
KATARZYNA NOWAK<sup>3</sup>  
Kielce University of Technology  
<sup>1</sup>e-mail: paula@tu.kielce.pl  
<sup>2</sup>e-mail: enowak@tu.kielce.pl  
<sup>3</sup>e-mail: knowak@tu.kielce.pl

# INFLUENCE OF ELASTIC SUPPORT ON THE EIGENVALUES OF STEPPED COLUMNS

## Abstract

The paper analyses the influence of the stiffness of the elastic support of the stepped column on the natural vibration frequency and the critical load values. The exact stability analysis and dynamic analysis using a continuous mass distribution were carried out. The safe areas and the natural frequency for different column support conditions were determined.

**Keywords:** critical force, natural frequency, stepped columns, elastic supports

## 1. Introduction

The analyses of stability and harmonic vibration of beams are regarded as classical problems of structural mechanics. In numerous studies, beams and columns with variable cross-sections were analyzed. Those include the fundamental study [1], in which a formula for the critical force in a simply supported stepped column was derived, and also present-day considerations [2–6]. The studies analyzed the impact of cross-section change of segment and loading with axial force on the beam natural vibration. Two-segment and multi-segment structures were considered. Both exact and approximate analyses were performed.

From the engineering standpoint, it is crucial that the stiffness of elastic support of the structure members is accounted for [7, 8]. The aim of the paper is to estimate the impact of the elastic support on the critical loads and the natural vibration frequency of non-prismatic columns. An exact approach was proposed in the study. It allows the estimation of eigenvalues for different elastic support. The Mathematica environment was used to find solutions. The results presented in the paper concern a column that consists of two segments. The method, however, is applicable to the analysis of multi-segment columns.

## 2. Formulation of the problem

The subject of the investigations is a column, made of isotropic, linearly elastic material, with step-

variable cross-section. It was assumed that the column segments ( $i = 1, 2$ ) are loaded with axial forces  $S_i$  (Fig. 1a). The following characteristics were adopted:  $E$  – Young modulus of elasticity,  $J_i$  – moment of inertia,  $l_i$  – length,  $\mu_i$  – mass uniformly distributed over unit length. In the analysis, in which the elastic support of the column was assumed, both the rotational stiffness  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$  and the linear stiffness  $\tilde{k}_3, \tilde{k}_4$  were accounted for (Fig. 1b).

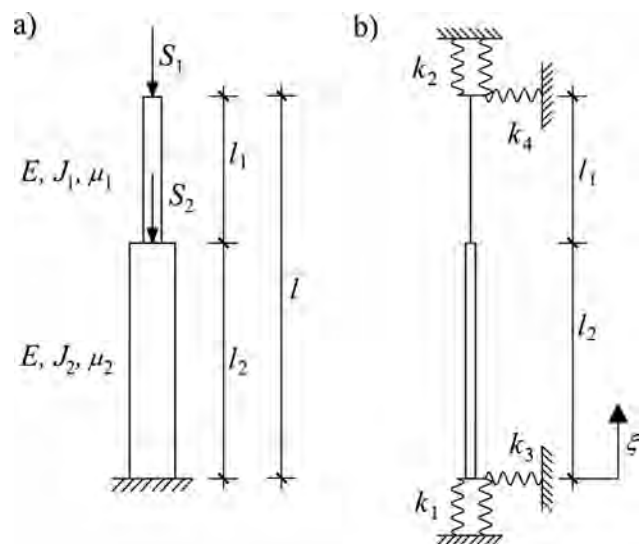


Fig. 1. Stepped column (a), elastic support (b)

For the so formulated problem, the analysis of harmonic vibration was performed. In the analysis, axial forces were accounted for and the real

distribution of the mass was maintained. In such a case, the mathematical model of the process is given by the following equation:

$$\mathbf{K}(\sigma_i, \lambda_i)\mathbf{q} = 0 \quad (1)$$

where  $\mathbf{q}$  is the vector of generalized coordinates (Fig. 2a), and  $\mathbf{K}(\sigma_i, \lambda_i)$  is the global dynamic stiffness matrix of the construction, which accounts for the impact of axial forces  $N_i$ . The terms of the matrix depend on the dimensionless parameters that describe the axial force intensity  $N_i$  and the natural vibration frequency  $\omega$  respectively:

$$\sigma_i^2 = \frac{N_i l_i^2}{EJ_i}, \quad \lambda_i^4 = \frac{\mu_i \omega^2 l_i^4}{EJ_i} \quad (2)$$

where:

$$i = 1, 2; N_1 = S_1; N_2 = (S_1 + S_2)$$

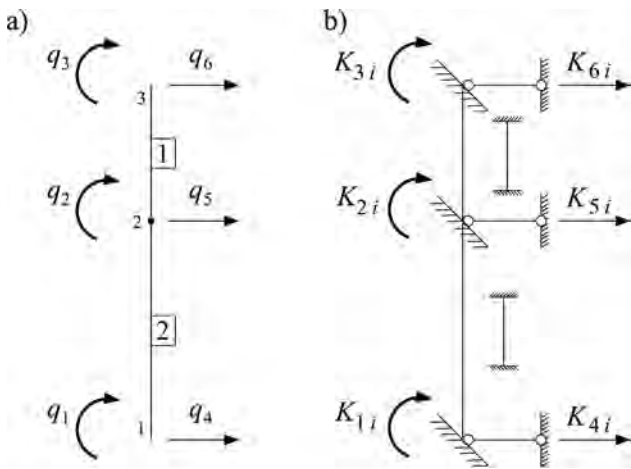


Fig. 2. Generalized coordinates (a), basic scheme of the displacement method (b)

The matrix terms are determined in successive unit stages, in which unit displacements are ascribed to the imposed constraints (Fig. 2b). The analysis is performed using transformation formulas of the transverse harmonic vibration while taking into account axial forces [9]. Non zero-solutions to eq. (1) correspond to the zeroing of the basic determinant of the stiffness matrix:

$$|\mathbf{K}(\sigma_i, \lambda_i)| = 0 \quad (3)$$

Condition (3) leads to the determination of the following: critical loads ( $\lambda_i = 0$ ), natural vibration frequency ( $\sigma_i = 0$ ), and also vibration frequency dependence on compressive forces for different values of support stiffness: for clamped-clamped (C-C), clamped-pined (C-P), clamped-sliding resistant (C-S), clamped-free (C-F), pined-pined (P-P) and pined-sliding resistant (P-S) (Fig. 3). The analysis

was performed on the dimensionless parameters that describe both the column characteristics, i.e. stiffness, mass, axial forces, length ratios:

$$\kappa = \frac{J_2}{J_1}, \quad m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad s = \frac{N_2}{N_1}, \quad \xi = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \quad (4)$$

and also the manner of support:

$$k_1 = \frac{\tilde{k}_1 l_1}{EJ_1}, \quad k_2 = \frac{\tilde{k}_2 l_1}{EJ_1}, \quad k_3 = \frac{\tilde{k}_3 l_1^3}{EJ_1}, \quad k_4 = \frac{\tilde{k}_4 l_1^3}{EJ_1} \quad (5)$$

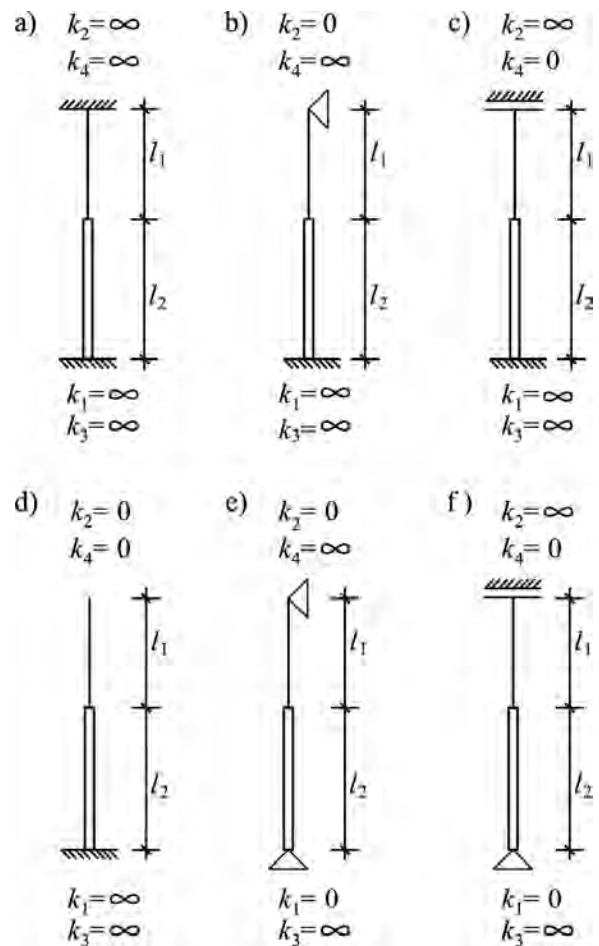


Fig. 3. Values of support stiffness  $k_i$  for different support conditions of the column: C-C (a), C-P (b), C-S (c), C-F (d), P-P (e), P-S (f)

### 2.1. Stability analysis

When the initial stability analysis is performed, it is possible to determine the critical load values and safe areas on the plane of  $S_1$  and  $S_2$  parameters (values of  $S_1$  and  $S_2$  forces, for which the column is in the static equilibrium) as a function of the support stiffness parameter  $k_i$ . The analysis can be carried out for arbitrary geometric characteristics of the segments. Figure 4, for

instance, shows the variation in the critical load value  $S_1 [EJ_1/l_1^2]$  depending on the segment length ratio  $\xi$  for different values of the support stiffness  $k_1$ . Three cases were considered:  $s = 1$  ( $S_2 = 0$ ),  $s = 2$  ( $S_2 = S_1$ ),  $s = 3$  ( $S_2 = 2S_1$ ), and the assumption was made that the ratio of the inertia moments  $\kappa$  is 2

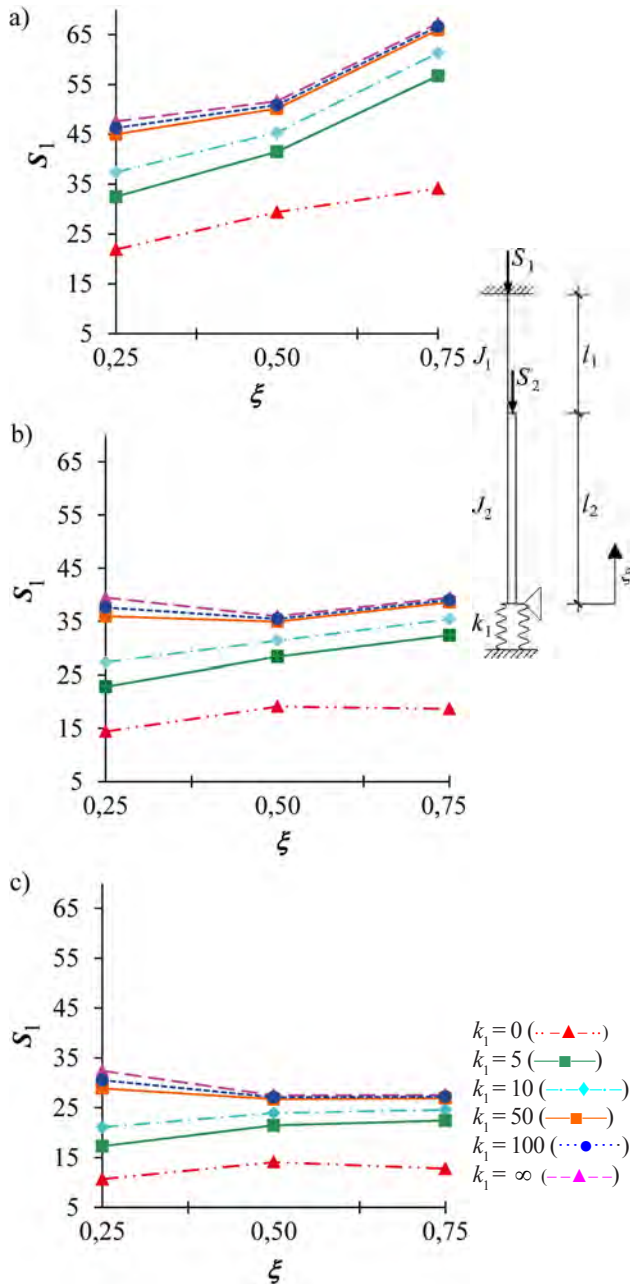


Fig. 4. The graph of the dependence  $S_1(\xi) [EJ_1/l_1^2]$  for variation in the support stiffness  $k_1$  for:  $s = 1$  (a),  $s = 2$  (b),  $s = 3$  (c)

## 2.2. Dynamic analysis

The dynamic analysis leads to the determination of the natural vibration frequency  $\omega$  as a function of the support stiffness parameter  $k_1$ . The paper provides the graphs of the parameter  $\lambda_1$  dependence on the segment length ratio  $\xi$  for varied support stiffness:  $k_1$  (Fig. 5a),  $k_2$  (Fig. 6a),  $k_3$  (Fig. 7a), and  $k_4$  (Fig. 8a). The results for the case:  $m = 2$ ,  $\kappa = 2$  are presented. It can be seen that  $\lambda_1$  decreases when the parameter  $\xi$  grows. The dependence  $\omega_1(\xi)$  for varied support stiffness  $k_1$  are shown in Figures 5b – 8b (the frequency is expressed in  $[\sqrt{EJ_1/\mu_1 l_1^4}]$ ).

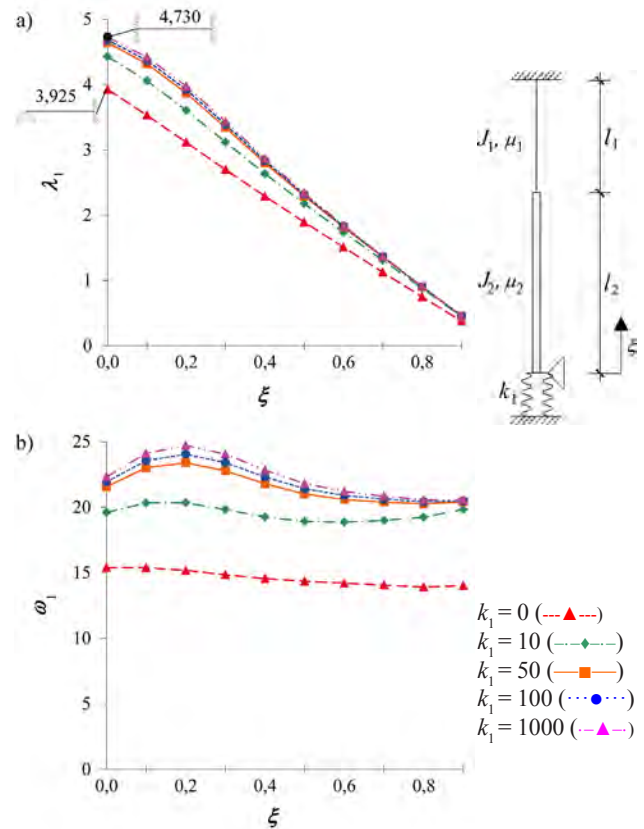


Fig. 5. The graph of the dependence  $\lambda_1(\xi)$  (a) and  $\omega_1(\xi) [EJ_1/\mu_1 l_1^4]$  (b) for variation in the support stiffness  $k_1$

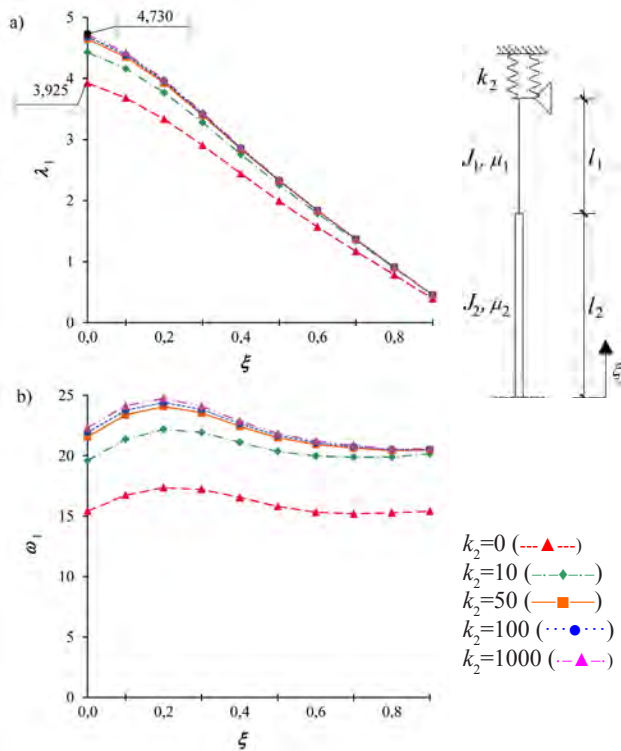


Fig. 6. The graph of the dependence  $\lambda_1(\xi)$  (a) and  $\omega_1(\xi)$  [ $EJ_1/\mu_1 l_1^4$ ] (b) for variation in the support stiffness  $k_2$

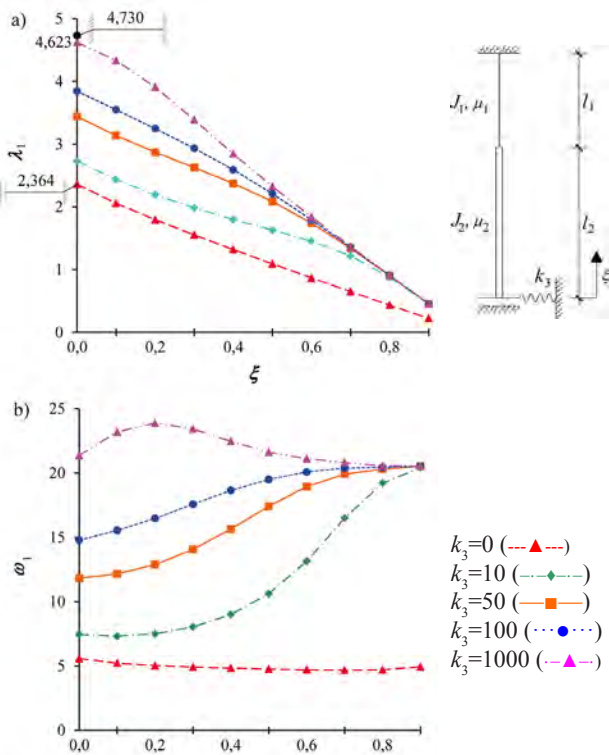


Fig. 7. The graph of the dependence  $\lambda_1(\xi)$  (a) and  $\omega_1(\xi)$  [ $EJ_1/\mu_1 l_1^4$ ] (b) for variation in the support stiffness  $k_3$

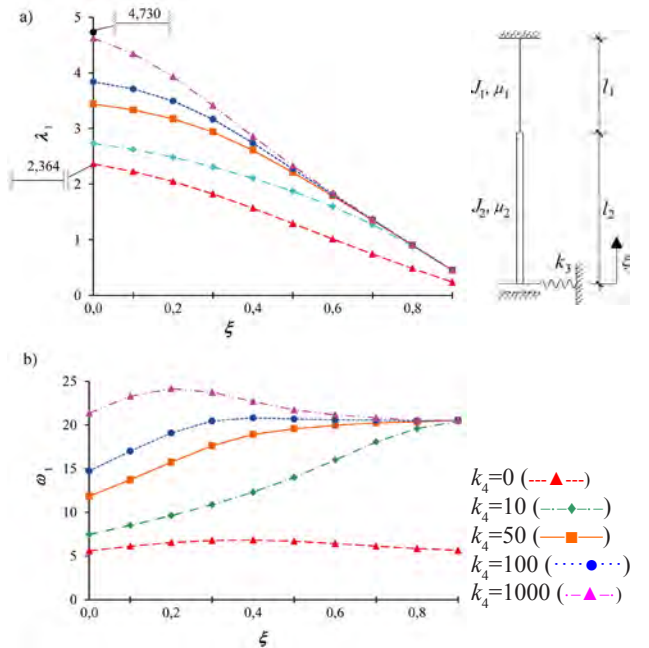


Fig. 8. The graph of the dependence  $\lambda_1(\xi)$  (a) and  $\omega_1(\xi)$  [ $EJ_1/\mu_1 l_1^4$ ] (b) for variation in the support stiffness  $k_4$

3. Example

The stability analysis and dynamic analysis for exemplary steel stepped column were carried out. The following material and geometric data were taken into account:  $E = 210$  GPa,  $l_1 = 4.45$  m,  $J_1 = 3300$  cm<sup>4</sup>,  $\mu_1 = 63.2$  kg/m,  $l_2 = 7.4$  m,  $J_2 = 120000$  cm<sup>4</sup>,  $\mu_2 = 169$  kg/m. For the adopted data, the non-dimensional parameters  $\xi = 0.62$ ,  $\kappa = 36.4$ ,  $m = 2.67$  were obtained. They describe the ratio of the length, the ratio of stiffness and the ratio of mass of segments, respectively.

Figure 9 shows safe areas on the plane  $S_1$  and  $S_2$ , depending on the support stiffness  $k_4$ . The influence of the support stiffness  $k_1$  on the values of the first natural frequency is shown in Figure 10.

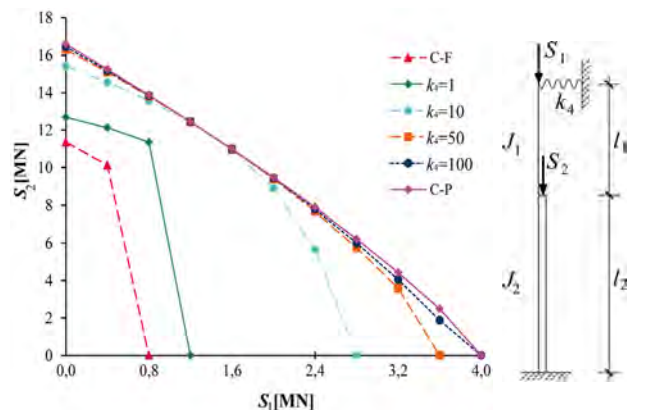


Fig. 9. Safe areas depending on the support stiffness  $k_4$

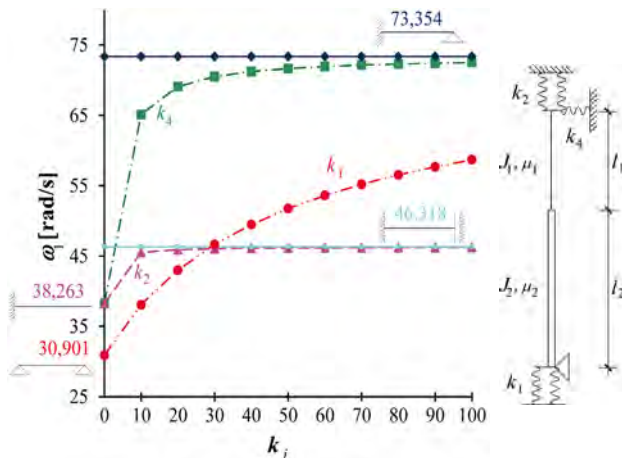


Fig. 10. First natural frequencies depending on the support stiffness  $k_i$

#### 4. Conclusions

The work approach allows the:

- determination of critical loads,
- identification of safe areas,
- determination of natural frequencies,

for any elastic support and geometric characteristics of stepped columns.

Analyses show that the elasticity of the support significantly affects critical loads, safe areas and natural frequencies.

Determination of the influence on the natural frequency can be used for the inverse problem, i.e. based on the measurement of free vibration of stepped columns we can check its connection rigidity.

#### References

- [1] Basiński W., Kowal Z., Obara P.: *Zamocowanie dźwigarów stalowych – diagnostyczne oszacowanie sztywności*. „Obiekty inżynierskie”, 3 (2009), s. 31–37.
- [2] Bellés P.M., Maurizi M.J., di Luca D.H.: *Vibration of stepped beams on non-uniform elastic foundations*. “Journal of Sound and Vibration”, 196(1) (1994), pp.127–128.
- [3] Jang S.K., Bert C.W.: *Free vibration of stepped beams: exact and numerical solutions*. “Journal of Sound and Vibration”, 130(2)(1994), pp.42-346.
- [4] Obara P.: *Metoda przemieszczeń w analizie konstrukcji prętowych*. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2011.
- [5] Potrzeszcz-Sut B., Dudzik A.: *Influence of connections stiffness on critical load capacity and natural vibration frequency of bar structures*, Proc. of 10th European conference of young researchers and scientists. University of Žilina, Slovak Republic, Transcom 2013.
- [6] Rahman, M.A., Chowdhuri, A.K.: *Modelling of an imperfect column having variable cross-sections and non-symmetric responses in tension and compression*. International Journal of Applied Mechanics and Engineering, Vol. 17 2 (2012), pp. 439-457.
- [7] Timoshenko S.P., Gere J.M.A.: *Teoria stateczności sprężystej*. Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1963.
- [8] Zamojska I. Kukła S.: *Zastosowanie metody funkcji Greena w analizie drgań belek o zmiennym przekroju poprzecznym z elementami dyskretnymi*. Prace Naukowe Instytutu Matematyki i Informatyki Politechniki Częstochowskiej, 1(1)(2002), s.85–92.
- [9] Zamojska I. Kukła S.: *Drgania swobodne belki o zmiennym przekroju poprzecznym obciążonej siłą osiową*. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, 20 (2003), s.456–462.

Paulina Obara  
Ewa Nowak  
Katarzyna Nowak

## Wpływ sprężystości podparcia na wartości własne w słupach o skokowo zmiennej sztywności

### 1. Wprowadzenie

Zagadnienia stateczności i drgań harmonicznym belek należą do klasycznych problemów mechaniki konstrukcji. Liczne prace poświęcone są analizie belek i słupów o zmiennym przekroju poprzecznym. Począwszy od podstawowej pozycji [1], w której został

wyprowadzony wzór na siłę krytyczną dla swobodnie podpartego słupa o zmiennym przekroju poprzecznym, a skończywszy na współczesnych rozważaniach [2, 3, 4, 5, 6]. W pracach tych analizowano wpływ zmiany przekrojów segmentów oraz obciążenia siłą osiową na drgania własne belki. Rozpatrywane były konstrukcje

dwu- i wielosegmentowe, a przeprowadzane analizy miały zarówno charakter dokładny, jak i przybliżony.

W rozważaniach inżynierskich podczas przeprowadzanych analiz istotne znaczenie ma uwzględnienie sztywności zamocowania elementów konstrukcji [7, 8]. Przedmiotem pracy jest oszacowanie wpływu sztywności zamocowania na obciążenia krytyczne i częstości drgań własnych słupów niepryzmatycznych. Zaproponowane w pracy podejście ma charakter ścisły i umożliwia oszacowanie wartości własnych dla dowolnych sztywności zamocowania. Do obliczeń wykorzystano program Mathematica. Przedstawione wyniki dotyczą słupa składającego się z dwóch segmentów, przy czym metodę tę można zastosować do analizy słupów wielosegmentowych.

## 2. Sformułowanie problemu

Przedmiotem rozważań jest, wykonany z izotropowego, liniowo sprężystego materiału, słupek o zmiennym skokowo przekroju poprzecznym. Założono, że segmenty słupa ( $i = 1, 2$ ) są obciążone siłami osiowymi  $S_i$  (rys. 1a) i przyjęto następujące charakterystyki:  $E$  – moduł Younga,  $J_i$  – moment bezwładności,  $l_i$  – długość,  $\mu_i$  – masa równomiernie rozłożona na jednostkę długości. W analizie przyjęto sprężyste zamocowanie słupa, uwzględniając zarówno sztywność obrotową  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ , jak i sztywność liniową:  $\tilde{k}_3, \tilde{k}_4$  (rys. 1b).

Dla tak sformułowanego zadania przeprowadzono analizę drgań harmonicznym z uwzględnieniem sił osiowych, przy zachowaniu rzeczywistego rozkładu pola masowego. W takim przypadku matematycznym modelem procesu jest równanie (1), w którym wyrazy macierzy sztywności dynamicznej  $\mathbf{K}(\sigma_i, \lambda_i)$  zależą od bezwymiarowych parametrów (2) opisujących odpowiednio intensywność siły osiowej  $N_i$  oraz częstość drgań własnych  $\omega$ . Wyrazy te wyznaczamy w kolejnych etapach jednostkowych, w których nadajemy wprowadzonym więzom (rys. 2b) jednostkowe przemieszczenia. Analizę prowadzimy stosując wzory transformacyjne poprzecznych drgań harmonicznym z uwzględnieniem sił osiowych [9]. Niezerowe rozwiązania równania (1) odpowiadają zerowaniu się wyznacznika podstawowego macierzy sztywności (3). Warunek (3) prowadzi do wyznaczenia: obciążeń krytycznych ( $\lambda_i = 0$ ), częstości drgań własnych ( $\sigma_i = 0$ ) oraz zależności częstości drgań od sił ściskających dla dowolnych wartości sztywności zamocowania, w tym zamocowania: sztywno-sztywnego (C-C), sztywno-przegubowego (C-P), sztywno-„łyżwowego” (C-S), wspornikowego (C-F), przegubowego

(P-P) i przegubowo-„łyżwowego” (P-S) (rys. 3). Analiza przeprowadzona została w bazie bezwymiarowych parametrów opisujących charakterystyki słupa, tj. stosunek: sztywności, mas, sił osiowych i długości segmentów (4) oraz sposób podparcia słupa (5).

### 2.1. Analiza stateczności

Przeprowadzając analizę stateczności początkowej możemy wyznaczyć krytyczne wartości obciążenia oraz obszary bezpieczne na płaszczyźnie parametrów  $S_1$  i  $S_2$  (wartości sił, dla których słupek znajduje się w równowadze statecznej) w funkcji parametru sztywności zamocowania  $k_i$ . Analizę można przeprowadzać dla dowolnych charakterystyk geometrycznych segmentów. Przykładowo na rysunku 4 przedstawiono jak zmienia się wartość obciążenia krytycznego  $S_1 [EJ_1/l_1^2]$  w zależności od stosunku długości segmentów  $\xi$  dla różnych wartości sztywności podparcia  $k_1$ . Rozpatrzone zostały trzy przypadki:  $s = 1$  ( $S_2 = 0$ ),  $s = 2$  ( $S_2 = S_1$ ),  $s = 3$  ( $S_2 = 2S_1$ ), przy założeniu, że stosunek momentów bezwładności  $\kappa$  wynosi 2.

### 2.2. Analiza dynamiczna

Analiza dynamiczna prowadzi do wyznaczenia częstości drgań własnych  $\omega$  w funkcji parametru sztywności zamocowania  $k_i$ . W pracy sporządzono wykresy zależności parametru  $\lambda_1$  od stosunku długości segmentów  $\xi$  dla zmieniających się sztywności zamocowania:  $k_1$  (rys. 5a),  $k_2$  (rys. 6a),  $k_3$  (rys. 7a),  $k_4$  (rys. 8a). Przedstawiono wyniki dla przypadku:  $m = 2$ ,  $\kappa = 2$ . Jak widać wraz ze wzrostem parametru  $\xi - \lambda_1$  maleje. Na rysunkach 5b, 6b, 7b oraz 8b pokazano zależność  $\omega_1(\xi)$  dla zmieniających się sztywności zamocowania  $k_i$  (częstość jest wyrażona w  $[EJ_1/\mu_1 l^4]$ ).

## 3. Przykład

W rozdziale tym przeprowadzono analizę stateczności i analizę dynamiczną dla przykładowego słupa stalowego o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym. Przyjęto następujące dane materiałowe i geometryczne:  $E = 210$  GPa,  $l_1 = 4,45$  m,  $J_1 = 3300$  cm<sup>4</sup>,  $\mu_1 = 63,2$  kg/m,  $l_2 = 7,4$  m,  $J_2 = 1$  20000 cm<sup>4</sup>,  $\mu_2 = 169$  kg/m. Dla przyjętych danych otrzymano wartości bezwymiarowych parametrów:  $\xi = 0,62$ ,  $\kappa = 36,4$ ,  $m = 2,67$ , które określają odpowiednio stosunek długości, sztywności i mas segmentów.

Na rysunku 9 przedstawiono obszary bezpieczne na płaszczyźnie  $S_1$  i  $S_2$  w zależności od zmieniającej się sztywności zamocowania  $k_4$ , natomiast rysunek 10 ilustruje wpływ sztywności zamocowania  $k_1$  na wartości pierwszej częstości drgań własnych.

## 4. Wnioski

Przedstawione w pracy podejście umożliwia:

- wyznaczanie obciążeń krytycznych,
- określanie obszarów bezpiecznych,
- wyznaczanie częstości drgań własnych,

dla dowolnej sprężystości podparcia oraz charakterystyk geometrycznych słupa o skokowo zmiennej sztywności.

Z przeprowadzonych analiz wynika, że sprężystość podparcia w znaczący sposób wpływa na siły krytyczne, obszary bezpieczne oraz częstości drgań własnych.

Określenie wpływu sztywności zamocowania na częstości drgań własnych może zostać wykorzystane do zadania odwrotnego, tzn. na podstawie pomiaru drgań swobodnych w słupach o zmiennej sztywności możemy skontrolować sztywność jego połączenia.