



Stanisław KONATOWSKI, Piotr KANIEWSKI

OCENA WPLYWU ROZKŁADU ZAKŁÓCEŃ STANU NA DOKŁADNOŚĆ ESTYMACJI WYBRANYCH ALGORYTMÓW NIELINIOWEJ FILTRACJI W SYSTEMACH POZYCJONUJĄCYCH

Streszczenie

W artykule opisane zostały algorytmy filtracji nieliniowej (rozszerzona Kalmana, bezśladowa Kalmana, cząstkowa, cząstkowa wykorzystująca filtrację rozszerzoną Kalmana oraz bezśladowa filtracja cząstkowa) stosowane w systemach pozycjonujących. Zaprezentowane zostały wyniki badań symulacyjnych porównujących jakość estymacji analizowanych rodzajów filtrów nieliniowych dla różnych nieliniowości oraz rozkładów prawdopodobieństwa zakłóceń stanu: Gaussa, Rayleigha, Studenta, i Gamma.

WSTĘP

Do estymacji położenia w systemach pozycjonujących z algorytmami nieliniowej filtracji stosuje się rozszerzony filtr Kalmana EKF (*Extended Kalman Filter*). W filtrze tym dowolny rozkład prawdopodobieństwa zakłóceń wektora stanu i odpowiednio ich gęstość są aproksymowane przez zmienne losowe o rozkładzie Gaussa. Takie podejście gwarantuje jednak małą precyzję estymacji położenia [1, 4-8]. Bezśladowy filtr Kalmana UKF (*Unscented Kalman Filter*) nie aproksymuje nieliniowych procesów lecz aproksymuje rozkłady zmiennych losowych stanów. Rozkłady opisuje gaussowska zmienna losowa określona przez ważone punkty sigma, charakteryzujące prawdziwą wartość średnią i kowariancję zmiennej losowej [2-4, 8]. Kolejną strategią rozwiązania problemu filtracji nieliniowej jest użycie sekwencyjnych metod Monte Carlo [1]. Jest to filtracja cząstkowa PF (*Particle Filtering*) wykorzystująca sekwencyjne próbkowanie istotności – odwzorowanie dużej liczby punktów (cząstek) i związanych z nimi wag z gęstości prawdopodobieństwa.

W artykule badano dokładność estymacji położenia dla trzech filtrów: rozszerzonego filtru Kalmana EKF i bezśladowego filtru Kalmana UKF oraz filtru cząstkowego PF.

1. IDEA FILTRACJI KALMANA

Każdy proces filtracji można rozważać jako problem sekwencyjnej estymacji stanów systemu na podstawie obserwacji, które są zależne bezpośrednio od stanów aktualnych, a pośrednio od poprzednich. Po drugie, stan bieżący jest zależny od stanów poprzednich. Te uwarunkowania przedstawia się w postaci dwóch modeli stanu i obserwacji [1, 2, 6, 8]

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}), \quad \mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k), \quad (1)$$

gdzie: wektor \mathbf{x}_k jest aktualnym stanem, wektor \mathbf{z}_k stanowi obserwację, \mathbf{u}_k stanowi znane wejście, wektory \mathbf{w}_k i \mathbf{v}_k są odpowiednio zakłóceniami stanu i pomiarów.

Jeśli model stanu i model obserwacji są liniowe, wówczas minimalny błąd estymatora stanu może być zapewniony przez kowariancyjny filtr Kalmana [1]. W innym przypadku, tj. nieliniowej filtracji, zalecanym rozwiązaniem jest zastosowanie rozszerzonego filtru Kalmana (EKF – *Extended Kalman*). Jednakże filtr ten jest wiarygodny tylko w przypadku systemów prawie liniowych. Ograniczenia te zostały pominięte poprzez zastosowanie przekształcenia bezśladowego, na bazie którego opracowano bezśladowy filtr Kalmana (UKF – *Unscented Kalman Filter*) [1, 3, 8].

Ogólnie proces filtracji Kalmana [1, 4] składa się z dwóch etapów: przewidywania i korekcji. Stan układu jest przewidywany z wykorzystaniem bieżących pomiarów, natomiast podczas drugiego etapu jest on korygowany wiedzą o modelu obserwacji. Przewidywanie, czyli określanie stanu *a priori* $\mathbf{x}^-(t)$, odbywa się bez uwzględnienia szumów

$$d\mathbf{x}^-(t)/dt = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}^-(t). \quad (2)$$

Po rozwinięciu wektora stanu w szereg Taylora otrzymuje się zależność, która jest liniową kombinacją $\mathbf{x}^-(t_0)$ [2]

$$\mathbf{x}^-(t) = \Phi(t_0)\mathbf{x}^-(t_0), \quad (3)$$

gdzie $\Phi(t_0)$ jest macierzą stanu o wymiarze $n \times n$ charakteryzującą dynamikę wektora stanu.

Przewidywany wektor stanu oraz przewidywana macierz kowariancji błędów filtracji w czasie t_k opisane są następującymi zależnościami:

$$\mathbf{x}^-(t_k) = \Phi(t_{k-1})\mathbf{x}^-(t_{k-1}), \quad \mathbf{P}^-(t_k) = \Phi(t_{k-1})\mathbf{P}^-(t_{k-1})\Phi(t_{k-1})^T + \mathbf{Q}. \quad (4)$$

W drugim etapie filtracji Kalmana zwanym korekcja, wektor stanu jest korygowany poprzez obserwacje w czasie t_k

$$\mathbf{x}^+(t_k) = \mathbf{x}^-(t_k) + \Delta\mathbf{x}(t_k), \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{x}^+(t_k)$ jest wartością *a posteriori* (korygowaną po aktualizacji), a macierz kowariancji błędów filtracji przyjmuje wtedy postać

$$\mathbf{P}^+(t_k) = \mathbf{P}^-(t_k) + \Delta\mathbf{P}(t_k). \quad (6)$$

Kryterium optymalności filtru Kalmana jest minimalna wartość błędu średniokwadratowego [1-3]

$$\Delta\mathbf{P}(t_k) = E[\Delta\mathbf{x}(t_k)\Delta\mathbf{x}(t_k)^T]. \quad (7)$$

Na podstawie twierdzenia Kalmana [1, 4, 7] ocena optymalna jest opisana zależnością

$$\mathbf{x}^+(t_k) = \mathbf{x}^-(t_k) + \mathbf{K}(t_k) [\mathbf{z}(t_k) - \mathbf{z}^-(t_k)], \quad (8)$$

gdzie: $\mathbf{z}^-(t_k) = \mathbf{H}(t_k) \mathbf{x}^-(t_k)$, $\mathbf{K}(t_k)$ jest macierzą wzmocnień Kalmana o wymiarach $n \times m$, a różnica $\mathbf{z}(t_k) - \mathbf{z}^-(t_k)$ jest procesem innowacji.

Macierz wzmocnień Kalmana, minimalizująca błędy estymacji średniokwadratowej, ma postać

$$\mathbf{K}(t_k) = \mathbf{P}^-(t_k) \mathbf{H}(t_k)^T [\mathbf{H}(t_k) \mathbf{P}^-(t_k) \mathbf{H}(t_k)^T + \mathbf{R}(t_k)]^{-1}. \quad (9)$$

Mając dane wzmocnienie Kalmana można obliczyć macierz kowariancji optymalnej estymacji (*a posteriori*)

$$\mathbf{P}^+(t_k) = \mathbf{P}^-(t_k) - \mathbf{K}(t_k) \mathbf{H}(t_k) \mathbf{P}^-(t_k) = \mathbf{P}^-(t_k) [\mathbf{I} - \mathbf{K}(t_k) \mathbf{H}(t_k)]. \quad (10)$$

1.1 Rozszerzony Filtr Kalmana

Dla rozszerzonego filtru Kalmana (EKF) rozkład prawdopodobieństwa wektora stanu i wszystkie odpowiednie gęstości zakłóceń są aproksymowane przez zmienne losowe o rozkładzie Gaussa, a następnie przenoszone przez zlinearyzowany system nieliniowy. Postępowanie takie może powodować duże błędy przy wyznaczaniu wartości średniej i kowariancji przekształconej gaussowskiej zmiennej losowej. Może więc prowadzić do działania nieoptymalnego lub nawet rozbieżności filtru [2, 5].

W trakcie przewidywania algorytm EKF wymaga wyznaczenia nieliniowego wektora stanu dyskretnego systemu dynamicznego

$$d\mathbf{x}_k^-/dt_k = f(\mathbf{x}_k^-). \quad (11)$$

Używając tylko liniowych członów rozwinięcia nieliniowej funkcji f w szereg Taylora można przedstawić macierz stanu jako

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k^-} \quad (12)$$

Następnie należy obliczyć macierz kowariancji błędów filtracji \mathbf{P}_k^-

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{\Phi}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{\Phi}_{k-1}^T + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{Q}(t) dt. \quad (12)$$

Na etapie korekcji używając tylko liniowych członów rozwinięcia w szereg Taylora nieliniowej funkcji h można przedstawić macierz pomiarową jako

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k^-} \quad (14)$$

Macierz ta jest wykorzystywana do opisu pomiaru przewidywanego

$$\mathbf{z}_k^- = h(\mathbf{x}_k^-) \quad (15)$$

1.2 Bezśladowy Filtr Kalmana

Algorytm bezśladowej filtracji Kalmana (UKF) został opracowany z powodu niewystarczającej efektywności filtru EKF, którego dokładność opisują jedynie wyrazy pierwszego rzędu rozwinięcia w szereg Taylora. Algorytm UKF nie aproksymuje nieliniowych procesów, lecz aproksymuje rozkłady zmiennych losowych stanów. W tym przypadku rozkład opisuje gaussowska zmienna losowa, która jest określana za pomocą minimalnego zbioru deterministycznie wybranych ważonych punktów sigma. Dla każdej nieliniowości punkty te opisują prawdziwą wartość średnią i kowariancję zmiennej losowej z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu rozwinięcia w szereg Taylora. Istotą algorytmu jest przekształcenie bezśladowe, które przekształca zbiór punktów sigma przez nieliniową funkcję. Na podstawie tych punktów obliczane są ich parametry statystyczne, a na ich podstawie estymaty przekształconej wartości średniej i kowariancji [3].

1.3 Filtr cząstkowy

Filtry Kalmana są optymalne jedynie dla gaussowskiej aproksymacji, dlatego warto zwrócić uwagę na inny rodzaj filtracji – filtrację cząstkową [1, 5-6], która nie wymaga spełnienia tego założenia. Filtry cząstkowe (PF – *Particle Filters*) wykonują sekwencyjną estymację Monte Carlo (SMC) opartą na sekwencyjnym próbkowaniu istotności, czyli odwzorowaniu dużej liczby punktów (cząstek) i związanych z nimi wag z gęstości prawdopodobieństwa [8]. Od lat sześćdziesiątych trwały badania nad tymi metodami, jednak były one niedoceniane. Powodem tego były małe możliwości obliczeniowe a także fakt, że sekwencyjne próbkowanie istotności pogarsza się wraz z upływem czasu. Głównym powodem szerszego rozwoju SMC było wprowadzenie powtórnego próbkowania [1], co w połączeniu z lepszymi możliwościami obliczeniowymi spowodowało, że filtry cząstkowe stały się użyteczne.

2. BADANIA SYMULACYJNE

Badania miały na celu porównanie dokładności estymacji i czasu wykonywania nieliniowych algorytmów: rozszerzonego i bezśladowego filtru Kalmana oraz filtru cząstkowego. Badania przeprowadzono dla obserwacji zawierającej różne stopnie nieliniowości. Model stanu, jednakowy dla wszystkich obserwacji był zakłócany addytywnym wektorem \mathbf{w}_k , posiadał postać [6, 8]

$$\mathbf{x}_k = 1 + \sin(\omega\pi k) + 0,5 \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \quad (16)$$

Wektor pomiarowy opisany był następującymi zależnościami dla trzech przedziałów czasu

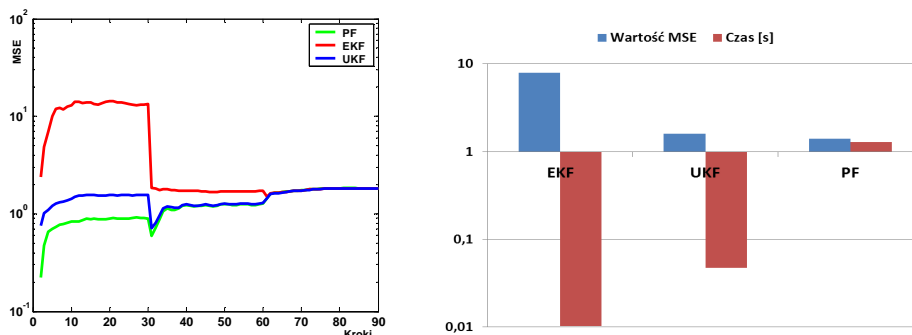
$$\mathbf{z}_k = \begin{cases} 0,2 \left(\mathbf{x}_k^5 + \mathbf{x}_k^2 \right) + \mathbf{v}_k & \text{dla } k \leq 30 \\ 0,5 \mathbf{x}_k^2 + \mathbf{v}_k & \text{dla } 30 < k \leq 60 \\ 0,5 \mathbf{x}_k - 2 + \mathbf{v}_k & \text{dla } 60 < k \leq 90 \end{cases}, \quad (17)$$

Do badań przyjęto następujące dane początkowe: $\omega = 0,4$, szum \mathbf{v}_k o parametrach $N(0, 5)$ oraz szum \mathbf{w}_k o różnych rozkładach prawdopodobieństwa. W bezśladowym filtrze Kalmana założono wartości parametrów skalujących: $\alpha = 1$, $\kappa = 1$ i $\beta = 0$ [3]. W estymacji wektora

stanu filtr cząstkowy badano dla $N=200$ cząstek. Algorytmy zostały zrealizowane w środowisku Matlab dla 90 kroków czasowych i były powtarzane sto razy.

3.1 Wyniki badań dla zakłóceń stanu o rozkładzie Gaussa

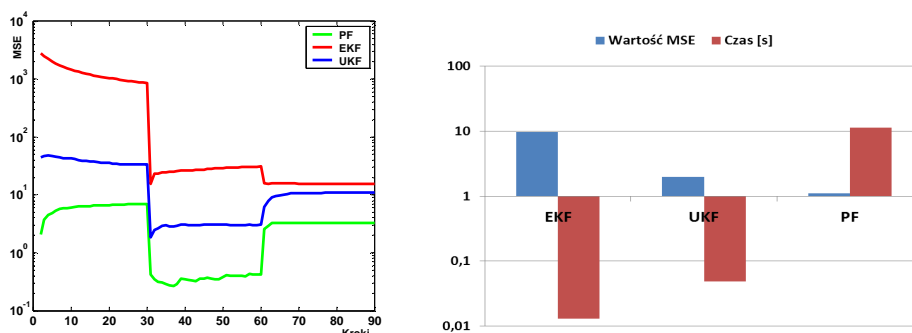
W badaniach wykorzystano biały szum gaussowski o parametrach $\mu=0$ i $\sigma^2=3$. Potwierdziły one przewagę bezśladowego filtru Kalmana nad filtrem rozszerzonym (rys. 1). Pokazały także, że filtr cząstkowy nie poprawia istotnie dokładności w porównaniu do filtracji bezśladowej. Natomiast jego obliczenia są bardzo czasochłonne i stanowią mniej niż 1% czasu wykonywania algorytmu EKF i tylko 4% czasu realizacji algorytmu UKF. Na rysunek 1 przedstawiono, oddzielnie dla trzech analizowanych funkcji pomiarowych, wartości błędów średniokwadratowych MSE. Dla silnych nieliniowości – funkcja z potęgą pięć – rozszerzony filtr Kalmana estymuje wektor stanu najgorzej, a najlepiej czyni to filtr cząstkowy. W przypadku zmniejszenia stopnia nieliniowości filtry UKF i PF zachowują się podobnie, natomiast filtr EKF poprawił jakość swego działania o rząd wielkości. Dla liniowej funkcji pomiarowej badane filtry zachowują się identycznie.



Rys. 1. Zestawienie własności filtrów dla szumu o rozkładzie Gaussa ($\sigma^2=3$)

3.2 Wyniki badań dla zakłóceń stanu o rozkładzie Rayleigh'a

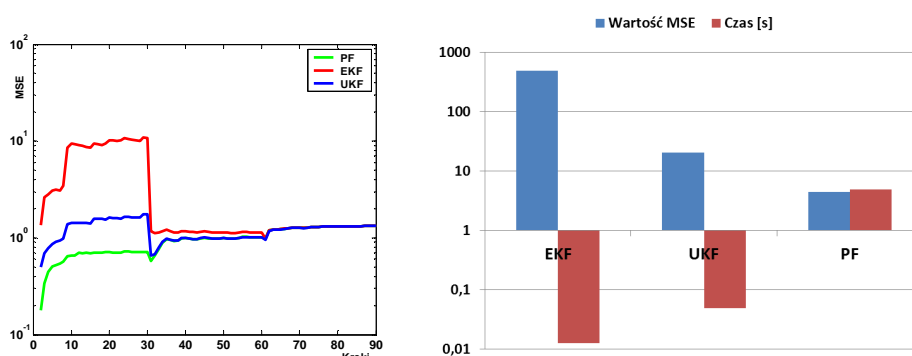
W kolejnym wariancie zastosowano szum o rozkładzie Rayleigh'a o parametrze skali $b=2$ czyli: $\mu=2,5066$ i $\sigma^2=1,7168$. Dla tego niegaussowskiego szumu (rys. 2) widać wyraźnie, że oba filtry Kalmana przestają działać prawidłowo osiągając znaczne wartości błędów MSE. Wartość błędu MSE dla algorytmu filtru cząstkowego jest dużo mniejsza (nawet dwa rzędy wielkości). Jednakże czas jego realizacji jest 100-krotnie dłuższy niż dla filtru UKF i 400-krotnie dłuższy niż dla filtru EKF. Wraz ze zmniejszaniem się wartości potęgi funkcji pomiarowej poprawiają się o rząd wielkości wartości błędów MSE dla wszystkich filtrów. Badane filtry UKF i PF pogarszają efektywność estymacji dla liniowej funkcji pomiarowej, a filtr rozszerzony poprawia ją na nieakceptowalnym poziomie.



Rys. 2. Zestawienie własności filtrów dla szumu o rozkładzie Rayleigh'a ($b=2$)

3.3 Wyniki badań dla zakłóceń stanu o rozkładzie Studenta

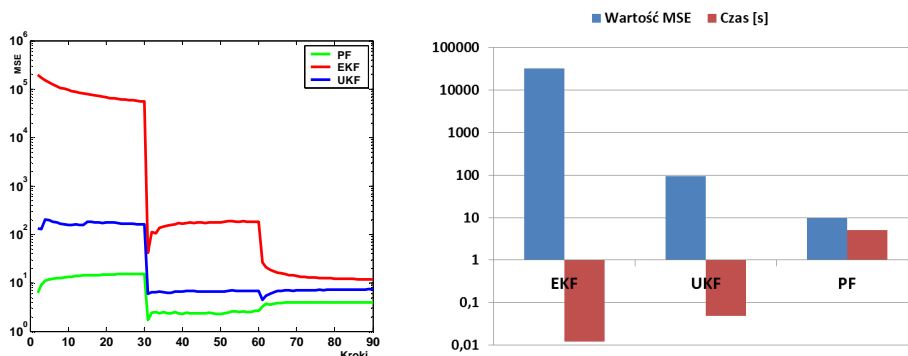
Do oceny efektywności filtracji wykorzystano także szum o rozkładzie Studenta o pięciu stopniach swobody ($\nu = 5$) czyli o parametrach: $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 5/3$. Generalnie dla tego typu szumu działanie filtrów jest podobne jak dla szumu o rozkładzie Gaussa. Dla drugiej i trzeciej funkcji pomiarowej różnice pomiędzy dokładnością poszczególnych filtrów są niewielkie. Natomiast znacznie wzrósł czas obliczeń w przypadku filtru cząstkowego (aż do kilkunastu sekund). Filtry Kalmana potrzebują na wykonanie algorytmów poniżej 0,1 sekundy (oznacza to, że filtr UKF jest ponad 200 razy szybszy, a EKF aż 900 razy niż filtr PF). Dla liniowej funkcji pomiarowej widać, że wyniki estymacji otrzymywane dla filtrów Kalmana i filtru cząstkowego są porównywalne. Przy silnych nieliniowościach widać przewagę filtru cząstkowego i pogorszenie efektywności estymacji dla pozostałych (szczególnie rozszerzonego).



Rys. 3. Zestawienie własności filtrów dla szumu o rozkładzie Studenta ($\nu = 5$)

3.4 Wyniki badań dla zakłóceń stanu o rozkładzie Gamma

Przebadano także wpływ szumu o rozkładzie Gamma o parametrze kształtu $a = 2$ i skali $b = 3$ czyli: $\mu = 6$ i $\sigma^2 = 18$ na jakość estymacji. W przypadku wystąpienia tego szumu można zaobserwować znaczną przewagę filtracji cząstkowej nad badanymi algorytmami Kalmana (rys. 4). Błędy MSE dla filtrów Kalmana dla silnej nieliniowości przyjmują duże i niedopuszczalne wartości w przypadku estymacji stanu. Filtr cząstkowy, pomimo różnych stopni nieliniowości i niegaussowskich szumów, estymuje wektor stanu właściwie z efektywnością zbliżoną do przypadku z szumami gaussowskimi. Czas jego realizacji jest dłuższy ponad 400-krotnie niż w przypadku filtru EKF i 200-krotnie dłuższy w stosunku do filtru UKF. Jednakże wartości te są dwukrotnie mniejsze niż dla algorytmów z szumami o rozkładzie Studenta. Dla liniowej funkcji pomiarowej filtr PF jest najlepszy.



Rys. 4. Zestawienie własności filtrów dla szumu o rozkładzie Gamma ($a = 2, b = 3$)

WNIOSKI

Podczas projektowania algorytmów filtracji do pozycjonowania pojazdów zarówno model stanu jak i model pomiarowy mogą być nieliniowe, a szумы mogą przyjmować różne postaci. Stąd istotne jest znalezienie sposobu na wybór najlepszego algorytmu. Na podstawie zaprezentowanych wyników badań symulacyjnych trudno jest jednoznacznie określić typ filtracji zapewniający najlepsze efekty estymacji.

I tak w przypadku występowania szumów o rozkładzie Gaussa, pomimo wielu zalet filtru cząstkowego, najlepszym rozwiązaniem wydaje się stosowanie filtrów Kalmana, a szczególnie bezśladowego filtru Kalmana. Podobnie sytuacja przedstawia się w przypadku występowania szumów o rozkładzie zbliżonym do rozkładu Gaussa – rozkładu Studenta. Jednak w tym wariancie warto rozpatrzyć zastosowanie filtru cząstkowego. Jest on zalecany w celu osiągania dużych precyzji, pomimo długiego czasu realizacji (odczuwalne dla silnych nieliniowości).

Natomiast gdy występujące szумы mają rozkład prawdopodobieństwa znacznie odbiegający od Gaussa (Rayleigh'a lub Gamma) należy stosować filtr cząstkowy. Tylko ten typ filtracji eliminuje duże rozbieżności otrzymanych wyników, pomimo długiego czasu wykonywania obliczeń.

Problematyka projektowania algorytmów filtrów nieliniowych jest złożona i wymaga indywidualnej analizy w zależności od charakteru nieliniowości i postaci zakłóceń stanu.

EVALUATION OF INFLUENCE OF STATE DISTURBANCE DISTRIBUTION ON ACCURACY OF SELECTED NONLINEAR FILTERS IN POSITIONING SYSTEMS

Abstract

The paper describes several types of nonlinear filtering algorithms, widely used in positioning systems (Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter, particle filter, EKF approximation for particle filter and unscented particle filter). Numerous simulation results, which are to compare the quality of analyzed nonlinear filters for different nonlinearities and distributions (Gaussian, Rayleigh, Student, Gamma) are shown.

BIBLIOGRAFIA

1. Arulampalam S., Gordon N., Ristic B.: *Beyond the Kalman Filter. Particle Filters for tracking applications*. Artech House, 2004.
2. Gordon N. J., Salmond D. J., Smith A. F. M.: *Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation*. IEEE Proceedings-f, vol. 140, no. 2, April 1993.
3. Julier S., Uhlmann, J. K.: *Unscented Filtering and Nonlinear Estimation*. Proceedings of the IEEE, vol. 92, no. 3, March 2004.
4. Kaniewski P.: *Struktury, modele i algorytmy w zintegrowanych systemach pozycjonujących i nawigacyjnych*, Wyd. WAT, 2010.
5. Konatowski S.: *Algorytm filtracji cząstkowej nieliniowego systemu dynamicznego*, Przegląd Elektrotechniczny, Nr 9/2010, str. 272-277.
6. Konatowski S., Kaczmarek B.: *Efektywność estymacji położenia w algorytmach filtracji nieliniowej*, Przegląd Elektrotechniczny, Nr 3/2009, str. 15-21.
7. Konatowski S., Sosnowski B.: *Ocena dokładności procesu estymacji przez wybrane filtry nieliniowe*, Przegląd Elektrotechniczny, Nr 09a/2011, str.101-106.

8. Pudlak B.: *Zastosowanie filtracji nieliniowej do estymacji położenia*, WAT, 2006.

Autorzy:

KONATOWSKI Stanisław - *Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Radioelektroniki*

KANIEWSKI Piotr - *Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Radioelektroniki*