

## PLAN EKSPERYMENTU IDENTYFIKACJI MODELU NAPIĘCIA OBCIĄŻONEGO AKUMULATORA KWASOWEGO

### Streszczenie

W artykule przedstawiono elementy teorii eksperymentu, a także podano zakres jej stosowania z krótkim opisem poszczególnych zadań. Przedstawiono cele planowania doświadczeń oraz metody ich realizacji. Scharakteryzowano uniwersalny obiekt badań oraz wybrane plany doświadczeń stosowanych w technice umożliwiające osiągnięcie zamierzonego celu przy minimalnym nakładzie pracy. Omówiono podstawowe kryteria planów eksperymentu. W drugiej części przedstawiono plan eksperymentu prowadzący do wyznaczenia współczynników liniowego równania opisującego związku między napięciem obciążonego akumulatora a czynnikami mającymi na nie wpływ.

### WSTĘP

Eksperyment to celowe oddziaływanie na obiekt badań i obserwacja jego zachowania w celu wnioskowania o jego właściwościach. Poznanie właściwości obiektu badań lub jego zachowania pod wpływem wymuszeń wiąże się z przeprowadzeniem wielu, czasem kosztownych oraz pracochłonnych doświadczeń. Wynika to z zastosowanej aparatury, przyjętej metodyki wykonywania pomiarów oraz budowy samego obiektu obserwacji. Ilość wykonywanych pomiarów uzależniona jest również od liczby zmiennych niezależnych wpływających na obiekt badań oraz poziomów wartości, jakie te zmienne przyjmują. Aby ograniczyć liczbę pomiarów, a przy tym uzyskać jak najwięcej informacji potrzebnych do opisu właściwości obiektu wykorzystuje się teorię eksperymentu. Umożliwia ona zaplanowanie doświadczeń, a następnie wykonywanie ich w odpowiedniej kolejności wynikającej z przyjętego planu. Swym zakresem obejmuje ona takie zagadnienia jak:

- matematyczne modelowanie obiektów badań;
- planowanie eksperymentów;
- przeprowadzenie pomiarów (doświadczeń);
- analizę otrzymanych wyników badań.

Zasadniczym celem planowania doświadczeń w technice jest:

- identyfikacja struktury oraz wyznaczenie parametrów modelu;
- określenie istotności współczynników modelu;
- optymalizacja przyjętego modelu.

W badaniach doświadczalnych najczęściej wykorzystuje się strukturę liniową modelu, rzadziej logarytmiczną lub wykładniczą. Przy tym, podczas wyznaczania parametrów modelu dąży się do minimalizacji jego niedokładności w stosunku do obiektu rzeczywistego. Do wyznaczenia współczynników modelu wykorzystywana jest najczęściej metoda najmniejszych kwadratów.

Analizując model obiektu obserwacji należy określić istotność wpływu danej zmiennej niezależnej na zmienną zależną. Wykonuje się to przy wykorzystaniu statystyk, wśród których najczęściej stosowaną jest statystyka Fishera-Snedecora, która po obliczeniu liczby stopni swobody pozwala wyznaczyć wartość krytyczną, a następnie porównać ją ze statystyką wyznaczoną na podstawie wyników pomiarów. O istotności poszczególnych współczynników (zmiennych niezależnych) decyduje wynik porównania wartości krytycznej statystyki z obliczoną na podstawie pomiarów empirycznych. Mniejsza wartość krytyczna statystyki, w stosunku do wartości wyznaczonej z pomiarów, informuje o istotności wpływu zmiennej niezależnej na wartość zmiennej zależnej.

Optymalizacja ma na celu wybranie najlepszego rozwiązania postawionego problemu z uwzględnieniem ograniczeń wynikających z przyjętych kryteriów. Kryteria optymalizacji mogą być różne, zależnie od rodzaju badań oraz przyjętego modelu obiektu.

Celem artykułu jest przedstawienie planowania eksperymentu oraz wybranych planów doświadczeń podczas realizacji badań związanych z identyfikacją zależności między zmienną niezależną (wymuszeniem) a zmienną zależną (wynikiem). Ponadto w artykule zaprezentowano przykład planu prowadzącego do otrzymania modelu matematycznego opisującego zależności między napięciem na zaciskach obciążonego akumulatora i wielkościami mającymi wpływ na jego wartość.

### 1. WYBRANE PLANY EKSPERYMENTÓW STOSOWANYCH W TECHNICIE

Badanie, to realizowane według ściśle ustalonego planu, rozpoznawanie cech obiektów [1]. Znalezienie modelu, który dokładnie wyjaśnia zachowanie badanego obiektu pod wpływem wymuszeń jest bardzo trudne, wynika to z oddziaływania zakłóceń, których charakter zmienności zazwyczaj jest losowy i niemożliwy do rozpoznania oraz eliminacji. W związku z tym matematyczny model opracowany na podstawie badań doświadczalnych jest przybliżeniem obiektu rzeczywistego. Dąży się do tego, aby przybliżenie to było jak najlepsze.

Niezależnie od planu eksperymentu wybranego do realizacji badań, przyjęty model musi spełniać podstawowe kryteria [4]:

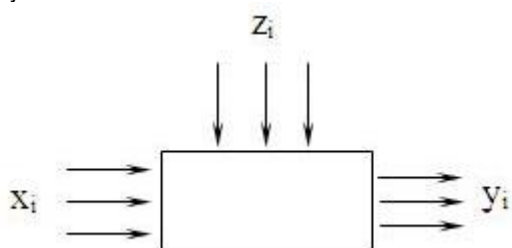
- *informatywności* – dostarczenia przez plan jak największej ilości informacji niezbędnej do osiągnięcia założonego celu badań;
- *efektywności* – ograniczenia kosztów i czasu badań poprzez ograniczenie liczby wykonywanych pomiarów – wadą tego kryterium jest to, że poprzez zmniejszenie liczby wykonywanych pomiarów zmniejsza się możliwość dokładnego ustalenia funkcji obiektu badań;
- *realizowalności* – ustalenia, czy wybrany plan eksperymentu jest możliwy do przeprowadzenia na stanowisku badawczym oraz, czy obiekt badań będzie istniał przy założonym zbiorze punktów pomiarowych.

Planowanie eksperymentu podzielone jest na kilka etapów, które zostaną przedstawione w dalszej części artykułu.

#### 1.1. Charakterystyka obiektu badań

Obiekt badań jest charakteryzowany poprzez zmienne niezależne (wejściowe)  $x_i$ , czyli zbiór parametrów wpływających na jego właściwości, zmienne zależne  $y_i$ , czyli wielkości wyjściowe (wyniki oddziaływań wielkości wejściowych i zakłócających), wielkości stałe

– wpływają na działanie układu, lecz ich wartości są niezmiennie w czasie. Dlatego w dalszych rozważaniach mogą one zostać pominięte. Wielkości zakłócające  $z_i$  – są wynikiem oddziaływania czynników losowych na obiekt badań i niedokładności metod oraz środków pomiarowych. Uniwersalny model obiektu badań przedstawia rysunek 1.



**Rys. 1.** Uniwersalny model obiektu badań:  $x_i$  – zmienne niezależne,  $y_i$  – zmienne zależne,  $z_i$  – zmienne zakłócające.

Obiekt badań klasyfikować można ze względu na czas oraz liczbę zmiennych go określających. Jeżeli za kryterium klasyfikacji przyjmie się czas, wówczas wyróżnić można obiekty badań:

- statyczne – w tego typu obiektach czas nie wpływa na właściwości obiektu,
- dynamiczne – czas wpływa na właściwości obiektu.

W zależności od liczby zmiennych (czynników) charakteryzujących obiekt można wyróżnić:

- jednoczynnikowe (jedno wejście i wyjście),
- wieloczynnikowe (wiele wejść i wiele wyjść).

## 1.2. Wybór (utworzenie) planu eksperymentu

Planem eksperymentu nazywa się zbiór układów (pojedynczych doświadczeń) wartości wielkości wejściowych, ustalonych według przyjętych reguł wynikających z teorii eksperymentu, dla których przy pomocy właściwych obiektowi badań metod oraz środków pomiarowych wyznacza się zbiory wartości wielkości wyjściowych [3].

Wybrany lub utworzony plan musi spełniać podstawowe kryteria dotyczące planów oraz jak najlepiej aproksymować rzeczywisty obiekt badań. Istnieje wiele planów doświadczeń, które można wykorzystać podczas realizacji eksperymentów, jednak najważniejszym kryterium ich podziału jest założony cel badań. W związku z tym kryterium wyróżnia się plany prowadzące do:

- opracowania struktury modelu obiektu i wyznaczenia parametrów tego modelu,
- sprawdzenia istotności zmiennych niezależnych wpływających na właściwości modelu,
- optymalizacji przyjętego rozwiązania.

Jeżeli, jako kryterium klasyfikacji planów przyjąć czas, wówczas plany dzielą się na [3]:

- statyczne, w których wszystkie wielkości charakteryzujące obiekt badań są niezależne od czasu,
- dynamiczne, w których przynajmniej jedna wielkość charakteryzująca obiekt jest zależna od czasu.

Plan doświadczeń można klasyfikować również na podstawie kolejności wykonywania doświadczeń oraz wartości poziomów przyjmowanych przez zmienne niezależne, wówczas wyróżnić można plan:

- randomizowany,
- zdeterminowany,

Plan randomizowany przyjmuje losową kolejność wykonywania pomiarów, a wartości zmiennych niezależnych mają z góry ustalone wartości na poszczególnych poziomach przy dowolnie przyjętej liczbie poziomów. Plany te wykorzystywane są zazwyczaj do weryfikacji istotności wpływu zmiennych niezależnych na zmienną zależną.

W przeciwieństwie do planu randomizowanego, w planie zdeterminowanym nie obowiązuje losowa kolejność pomiarów, a wartości zmiennych niezależnych muszą być przyjmowane na ściśle określonych poziomach zmienności oraz pomiary są realizowane według ściśle założonego planu. Wśród tych planów wyróżnić można plan *kompletny*, w którym wykonuje się wszystkie doświadczenia wynikające z planu oraz *selekcyjny (ułankowy)* – wykonywane są tylko wybrane doświadczenia ustalone w drodze analizy właściwości obiektu. Plany te wykorzystuje się do identyfikacji struktury modelu oraz wyznaczenia współczynników modelu.

W zależności od liczby poziomów, jakie przyjmują poszczególne zmienne niezależne obiektu badań, można wyróżnić następujące typy planów:

- dwupoziomowe,
- trójpoziomowe,
- wielopoziomowe.

W planie dwupoziomowym wielkości charakteryzujące obiekt przyjmują dwa poziomy wartości, zazwyczaj maksymalną – (+1) i minimalną – (–1). Łączna liczba niezbędnych do wykonania pomiarów w tym planie wynosi  $2^n$ , gdzie  $n$  – liczba zmiennych wejściowych charakteryzujących obiekt badań. Plany te umożliwiają uzyskanie liniowego modelu opisującego właściwości obiektu badań. Jeżeli podczas realizacji badań wykonane będą wszystkie pomiary wynikające z liczby zmiennych oraz poziomów, jakie przyjmują, to plan taki będzie nosił nazwę *planu dwupoziomowego kompletnego* lub *planu dwupoziomowego całkowitego*. Wadą tego typu planów jest to, że nie mogą być stosowane dla wielu zmiennych wejściowych, gdyż liczba pomiarów rośnie wraz ze wzrostem liczby zmiennych niezależnych, a przeprowadzenie wszystkich pomiarów jest niemożliwe, chociażby ze względu na ich dużą liczbę. W związku z tym, plany dwupoziomowe można realizować w sposób selekcyjny – tzw. plany *ułankowe* lub *częściowe*. Stanowią one jedynie część planów dwupoziomowych kompletnych, co znacznie skraca czas realizacji planu spowodowany liczbą pomiarów niezbędnych do wykonania.

W planie trójpoziomowym wszystkie zmienne wejściowe przyjmują trzy poziomy  $x_i = [-1, 0, +1]$ , a uzyskany model matematyczny badanego zjawiska przyjmuje postać wielomianu drugiego stopnia. Liczba pomiarów jest tu obliczana z zależności  $3^n$ , gdzie  $n$  – liczba czynników wejściowych opisujących obiekt badań. Wadą tego typu modeli jest to, że bardzo szybko rośnie tu liczba doświadczeń niezbędnych do zrealizowania, a w związku z tym, plan ten nie spełnia warunku ekonomiczności i ustalenie przy jego pomocy struktury modelu jest bardzo czasochłonne i skomplikowane.

Realizacja doświadczeń według planów wielopoziomowych umożliwia opis obiektu badań za pomocą wielomianów pierwszego i drugiego stopnia. Wśród tych planów można wyróżnić plan:

- ortogonalny,
- rotabilny.

Plan ortogonalny wykorzystywany jest do identyfikacji modelu matematycznego opisującego związku między zmiennymi, może zostać wykorzystany zarówno dla modeli liniowych jak i nieliniowych, a funkcja opisująca zależności przyjmuje najczęściej postać wielomianów drugiego stopnia. Plany te mogą być tworzone zarówno jako kompletne jak i ułankowe. Plany ortogonalne, do

wyznaczenia wielomianu drugiego stopnia wymagają zwiększenia poziomów wartości wielkości wejściowych do minimum 3, które zawierają się w przedziale  $(-\alpha, \dots, 0, \dots, +\alpha)$ , przy czym  $\alpha$  stanowi tzw. ramię gwiazdne planu. Wartość bezwzględna współczynnika  $\alpha$  musi być większa lub równa 1. Jest to cecha charakterystyczna planu ortogonalnego, w którym poziomy czynników badanych stanowią kompozycję programu dwupoziomowego z dodatkowymi wartościami (poziomami) tych zmiennych. Układ poziomów badanych zmiennych podzielony jest na trzy części, a wartości są odpowiednio zakodowane. Pierwsza część układu tzw. „jądro planu”, w którym czynniki przyjmują dwie wartości (poziomy) oznaczone symbolem „-1” i „+1”. Druga część układu to „centrum planu”, w którym badane zmienne przyjmują jeden, oznaczony symbolem „0”, poziom oraz układ tzw. „punktów gwiazdnych”, w którym badane zmienne przyjmują dwa poziomy oznaczone symbolem „- $\alpha$ ” oraz „+ $\alpha$ ”. Liczbę układów planu ortogonalnego całkowitego oblicza się sumując poszczególne składowe układu planu, dla których można zapisać:  $I_u = 2^i + 1 + 2i$ , gdzie:  $2^i$  – liczba układów jądra planu, 1 – liczba układów centrum planu,  $2i$  – liczba układów punktów gwiazdnych. Plan tego typu uzależniony jest od wartości punktów gwiazdnych oraz liczby układów z nim związanych. Dlatego też należy dobrać je w taki sposób, żeby spełniony był warunek ortogonalności. Spełnienie tego warunku powoduje, że możliwe jest znalezienie funkcji nieliniowej opisującej (aproxymującej) zależności między zmiennymi w postaci wielomianu drugiego stopnia oraz badanie może być zrealizowane przy ograniczonej liczbie pomiarów. Ponadto zapewnia niezależność oceny współczynników wielomianu aproxymującego (każdy współczynnik jest obliczany z niezależnego równania), a także ułatwia obliczenia prowadzące do wyznaczenia wartości współczynników funkcji przybliżającej. Wadą planów ortogonalnych jest niedokładność funkcji aproxymującej związki między rozpatrywanymi zmiennymi, której miarą jest wariancja lub odchylenie standardowe zależne od wartości wielkości wejściowych.

Plany rotatabilne zakładają stałą wartość niedokładności modelu dla wszystkich punktów leżących w przestrzeni wielkości wejściowych. Miarą położenia punktu w przestrzeni jest promień  $\rho$  kuli współśrodkowej z układem osi czynników badanych. Warunek rotatabilności można zapewnić dobierając odpowiednie wartości ramienia gwiazdnego  $\alpha$ , którego wartość jest różna od wartości ramienia gwiazdnego stosowanego w planach ortogonalnych. Ponadto musi być zachowana odpowiednia ilość pomiarów w centrum programu. W zależności od liczby pomiarów (układów) w centrum planu można wyróżnić dwa rodzaje planów rotatabilnych: rotatabilno-uniformalny oraz rotatabilno-ortogonalny, dla których wartość ramienia gwiazdnego jest równa dla obu typów planu. Plan rotatabilno-uniformalny zakłada stałość wariancji w środku układu ( $\rho = 0$ ) oraz na powierzchni kuli o promieniu granicznym  $\rho_{gr}$ , natomiast w przedziale  $0 < \rho < \rho_{gr}$  jej wartość nieznacznie się zmienia. Plan rotatabilno-ortogonalny zapewnia jednoczesne spełnienie kryterium ortogonalności oraz rotatabilności. Ich cechą charakterystyczną jest taka sama wartość ramienia gwiazdnego jak w przypadku planów rotatabilnych, lecz różna liczba układów (pomiarów) w centrum planu.

Plany optymalne powstały w związku z dążeniem do uzyskania jak największej liczby istotnych dla badacza informacji przy ciągłym zmniejszaniu liczby realizowanych pomiarów. W tym celu wprowadzono szereg kryteriów optymalności. Nazwy poszczególnych kryteriów stanowią jednocześnie nazwę planów optymalizacji. Wprowadzenie planowania optymalnego spowodowało pojawienie się nowych elementów w procesie planowania optymalnego: kryteria optymalności stanowiące miarę statystycznej oceny funkcji obiektu oraz pojęcie planu ciągłego.

W zależności od przyjętego kryterium optymalności wyróżnić można następujące plany optymalne [1, 3, 4]:

- *A-optymalne*, w których jako kryterium przyjmuje się minimalizację średniej wariancji ocen parametrów funkcji obiektu,
- *D-optymalne*, w których jako kryterium przyjmuje się minimalizację uogólnionej wariancji ocen parametrów funkcji obiektu,
- *G-optymalne*, w których jako kryterium przyjmuje się minimalizację maksymalnej wartości wariancji ocen parametrów funkcji obiektu,
- *E-optymalne*, w których jako kryterium przyjmuje się minimum maksymalnej wariancji oceny poszczególnych parametrów funkcji obiektu.

### 1.3. Realizacja pomiarów i analiza otrzymanych wyników doświadczeń

W oparciu o sporządzony plan doświadczenia (eksperymentu) przeprowadza się pomiary zgodnie z zawartą w planie tablicą eksperymentu. Z uwagi na dokładność przyrządów pomiarowych użytych w doświadczeniu oraz zastosowanej metody pomiarowej, wyniki pomiarów równoległych mogą się nieznacznie różnić względem siebie. Wyznaczenie niedokładności pomiarów możliwe jest tylko w przypadku kilkukrotnego powtarzania tego samego doświadczenia, a jako miary niedokładności wyników pomiarów można zastosować średnią arytmetyczną, jako *miarę położenia*, oraz odchylenie standardowe, jako *miarę rozproszenia* [1]. Wykonanie tylko jednego powtórzenia każdego doświadczenia powoduje, że liczba stopni swobody niezbędna do wyznaczenia miary rozproszenia równa się zero. Przy jednorazowym pomiarze wartości wyjściowej niemożliwe staje się także zbadanie istotności modelu opisującego rzeczywisty obiekt.

Analiza wyników pozwala na osiągnięcie założonego celu planu. Jeżeli celem planu było ustalenie struktury modelu matematycznego, wówczas dąży się do wyznaczenia współczynników modelu opisujących zależności w sposób liniowy lub wielomianem 2-go stopnia. Podczas wyznaczania parametrów modelu najczęściej korzysta się z metody najmniejszych kwadratów. Wyznaczone w ten sposób współczynniki modelu zapewniają minimalizację sumy kwadratów odchyłeń modelu od wartości rzeczywistej. Metoda najmniejszych kwadratów jest wykorzystywana jedynie do identyfikacji modeli liniowych oraz wielomianów drugiego rzędu. Stosowanie tej metody dla wielomianów wyższych rzędów może spowodować duże odchylenia modelu matematycznego od rzeczywistych zachowań obiektu badań w pełnym zakresie zmienności zmiennych niezależnych. Z tego względu, do wyznaczania struktury obiektu badań wykorzystać można również funkcje potęgowe lub logarytmiczne. Adekwatność wyznaczonych współczynników modelu sprawdza się za pomocą testu *t-Studenta*.

Jeżeli celem badań doświadczalnych była ocena adekwatności modelu aproxymującego, wówczas ocenę funkcji można przeprowadzić za pomocą testu istotności Fishera-Snedecora, który weryfikuje hipotezę adekwatności modelu aproxymującego. Wymaga to wyznaczenia wariancji odchyłeń modelu od wartości rzeczywistych oraz wariancji niedokładności pomiarów zmiennych niezależnych. Stosunek tych wariancji daje wartość statystyki *F*, którą porównuje się z wartością krytyczną wyznaczoną z tablic na podstawie poziomu ufności oraz liczby stopni swobody. Jeżeli wartość statystyki *F* jest mniejsza od wartości krytycznej wówczas brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy, a model uznaje się za adekwatny. W przeciwnym razie zachodzi konieczność powtórnego wyznaczenia funkcji aproxymującej o innej postaci.

Adekwatność współczynników (parametrów) modelu określana jest zazwyczaj za pomocą testu *t-Studenta*. Ocena przebiega podobnie jak w przypadku adekwatności modelu: wartość współczyn-

nika określającego zmienną niezależną porównuje się z wartością krytyczną wyznaczoną z tablic na podstawie liczby stopni swobody oraz poziomu istotności. Jeżeli wartość współczynnika przewyższa wartość krytyczną wyznaczoną na podstawie liczby stopni swobody i poziomu istotności, wówczas współczynnik uznaje się za adekwatny.

Optymalizacja modelu przybliżającego polega głównie na znalezieniu najlepszego, przy wszystkich możliwych ograniczeniach, modelu opisującego zależności między badanymi zmiennymi. Do najczęściej stosowanych metod optymalizacji wykorzystywanych w zagadnieniach technicznych należą: metody gradientowe oraz bezgradientowe. Optymalizacja modelu związana jest ze znalezieniem ekstremum funkcji w przyjętym przedziale zmienności poszczególnych zmiennych niezależnych.

## 2. PLAN DOŚWIADCZENIA WIELOCZYNNIKOWEGO DLA NAPIĘCIA AKUMULATORA

Celem planu jest opracowanie struktury liniowego modelu matematycznego opisującego zależności między napięciem obciążonego akumulatora (zmienna zależna) oraz wybranymi wielkościami fizycznymi mającymi na nie wpływ (zmiennie niezależne): temperatura otoczenia (elektrolitu), stan akumulatora, natężenie prądu obciążenia oraz pojemność znamionowa akumulatora. Do osiągnięcia założonego celu wykorzystano *eksperyment statyczny dwupoziomowy zdeterminowany kompletny*.

W planie zakłada się, że czynniki wejściowe – zmiennie niezależne przyjmują dwa poziomy wartości: **górnny** oznaczony jako „+1” i **dolny** oznaczony jako „-1”. Całkowita liczba doświadczeń dla planowanego eksperymentu dla czterech zmiennych niezależnych wynosi  $N = 2^4 = 16$ .

Do przeprowadzenia niezbędnych obliczeń prowadzących do uzyskania liniowego modelu matematycznego charakteryzującego związku między zmiennymi konieczne jest założenie poziomów zmienności dla poszczególnych czynników oraz odpowiednie oznaczenie zmiennych niezależnych, co ułatwi dalszą analizę. I tak przyjmuje się oznaczenia dla:

- temperatury elektrolitu  $T$  [°C] –  $x_1$ ,
- stanu akumulatora  $k$  –  $x_2$ ,
- natężenia prądu obciążenia  $I$  [A] –  $x_3$ ,
- pojemności znamionowej  $Q$  [Ah] –  $x_4$ .

Przyjęte przez poszczególne zmiennie poziomy wartości określają przedziały, w zakresie których przyjmują one wartości zawierające się w przedziale  $[x_{\max} \div x_{\min}]$ . Aby możliwe było wykorzystanie dowolnej wartości wielkości wejściowej z przedziału  $[x_{\max} \div x_{\min}]$  do opracowania modelu konieczne jest zakodowanie wielkości wejściowych. Kodowanie polega na przekształceniu dowolnej wartości wielkości wejściowej na wartość kodowaną (unormowaną), która zawiera się w przedziale ograniczonym przez poziomy zmiennych wejściowych z zakresu  $[-1 \div +1]$ . W celu zakodowania poszczególnych zmiennych należy wykonać odpowiednie operacje matematyczne, które polegają na wyznaczeniu przedziału jednostki zmienności dla poszczególnych wielkości – wartości jednostkowej zmiany czynnika wejściowego, wyznaczenia momentów centralnych – obliczenia średnich arytmetycznych dla poszczególnych zmiennych oraz ich kodowania [4].

Poszczególne etapy kodowania zmiennych oraz planowania eksperymentu przedstawiono poniżej.

### 2.1. Obliczenie jednostki zmienności czynników

Obliczenie jednostek zmienności polega na wyznaczeniu wartości jednostkowej zmiany zmiennej niezależnej. Wartość ta wraz z wyznaczonymi momentami centralnymi w postaci średniej arytmetycznej wykorzystana jest do zakodowania zmiennych.

Jednostka zmienności określana jest z wyrażenia (1), przy czym dla planów wielopoziomowych (ortogonalnych i rotabilnych) w mianowniku równania (1) będzie znajdowała się wartość odpowiadająca wartości ramienia gwiazdowego  $\alpha$ . Aby możliwe było opracowanie modelu opisującego obiekt badań konieczne jest wyznaczenie jednostek zmienności dla wszystkich zmiennych przyjętych do eksperymentu. Wartość  $x_{i \max}$  oraz  $x_{i \min}$  w równaniu (1) odpowiada maksymalnej i minimalnej wartości zmiennej niezależnej o numerze  $i$ , tj.  $x_i$  w przyjętym przedziale zmienności.

$$\Delta x_i = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{2}; \quad (1)$$

### 2.2. Obliczenie wartości centralnych zmiennych niezależnych oraz kodowanie zmiennych

Wartości centralne to średnie arytmetyczne poszczególnych zmiennych niezależnych, do wyliczenia których przyjmuje się maksymalną i minimalną wartość z przedziału zmienności czynnika wejściowego.

$$x_{i0} = \frac{x_{i \max} + x_{i \min}}{2}; \quad (2)$$

Kodowanie zmiennych niezależnych powoduje przekształcenie wartości wielkości wejściowych na bezwymiarowe liczby zawierające się w przedziale  $[-1 \div +1]$ . Postępowanie to ma na celu uniezależnienie planu od rzeczywistych wartości oraz sensu fizycznego zmiennych niezależnych opisujących obiekt badań i zastępuje je wartościami bezwymiarowymi. Powoduje to, że metody planowania eksperymentu stają się metodami uniwersalnymi, niezależnymi od czynników opisujących dane zjawisko i mogą być wykorzystywane w różnych dyscyplinach naukowych [4].

$$x_{ik} = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}; \quad (3)$$

Poszczególne składowe wyrażenia (3) oznaczają:  
 $x_{ik}$  – zakodowana wartość zmiennej niezależnej,  
 $x_i$  – zmienna niezależna podlegająca kodowaniu,  
 $x_{i0}$  – wartość centralna, wyznaczona za pomocą równania (2),  
 $\Delta x_i$  – jednostka zmienności zmiennej niezależnej podlegającej kodowaniu.

Kodowaniu podlegają wszystkie zmiennie opisujące obiekt badań, dlatego także konieczne jest zakodowanie zmiennej zależnej, którą w tym wypadku jest napięcie na zaciskach obciążonego akumulatora:  $U$  [V].

### 2.3. Tablica planu

Po przeprowadzeniu kodowania niezbędne jest utworzenie tablicy planu – zbioru doświadczeń, według którego będą realizowane pomiary. Liczba doświadczeń wynika z ilości zmiennych opisujących obiekt badań oraz liczby poziomów wartości, jakie te zmiennie przyjmują. Zbiór doświadczeń planu przedstawia tabela 1. Pomiary realizowane są według wartości umieszczonych w wierszach tabeli 1 pomijając wartość  $x_0$ , która stanowi wyraz wolny liniowego modelu opisującego obiekt badań i nie bierze udziału w pomiarach. Kolejne cztery kolumny reprezentują zmiennie niezależne, a więc odpowiednio: temperaturę elektrolitu, stan akumulatora, natężenie prądu obciążenia oraz pojemność znamionową akumulatora. Pojedyncze doświadczenie wynikające z tabeli 1 według [4] nazywane jest także jako *układ pomiaru* i definiowane jako zbiór wartości zmiennych niezależnych utworzonych przy zachowaniu warunku, że do zbioru tego należy tylko jedna wartość każdej zmiennej, zawierającej się w przedziale  $[x_{i \max} \div x_{i \min}]$ , a jednocześnie uwzględnione zostały wszystkie zmiennie niezależne opisujące obiekt badań.

$$G_{kr} = G(0,05; u_1; u_2)$$

W planie zakłada się, że liczba doświadczeń wynosi 16. Ponadto, ze względu na niedokładność pomiarów wskazane jest, aby każde doświadczenie zostało powtórzone minimum 3 razy, a wyniki wpisano do tabeli planu. Takie założenie jest niezbędne do wyznaczenia miary rozproszenia wyników pomiarów, którą stanowi odchylenie standardowe, i oceny istotności zmiennych niezależnych oraz adekwatności modelu matematycznego opisującego badany obiekt. W macierzy planu umieszczono również kolumnę, która zawiera wartości wariancji poszczególnych doświadczeń wyznaczonych z zależności (4) [2].

$$D^2(\mathbf{y})_i = \frac{\sum_{j=1}^r (y_j - y_{\text{śred}})^2}{r-1} \quad (4)$$

gdzie:

- $D^2(\mathbf{y})_i$  – wariancja błędów pomiaru  $i$ -tego doświadczenia;
- $y_j$  –  $j$ -ty wynik pomiaru w danym doświadczeniu,
- $y_{\text{śred}}$  – średnia wartość napięcia w doświadczeniu,
- $r$  – liczba powtórzeń każdego doświadczenia.

Taki układ tablicy jest pomocny w późniejszej analizie wyników pomiarów oraz wyznaczaniu struktury modelu [2].

W planie zakłada się, że poszczególne doświadczenia zawarte w tabeli 1 powinny być wykonywane losowo.

#### 2.4. Obliczenie współczynników liniowego równania regresji

Liniowe równanie regresji opisujące związki między zmiennymi dla prezentowanego planu przyjmuje postać zależności (5):

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{x}_3 + \mathbf{a}_4 \mathbf{x}_4; [\mathbf{V}] \quad (5)$$

Wyznaczenie współczynników równania regresji jest realizowane za pomocą następujących zależności [2]:

- wyraz wolny:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{0i} \cdot y_{\text{śred}} \quad (6)$$

- współczynniki  $a_1 \div a_4$ :

$$\mathbf{a}_{1 \div 4} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1 \div 4i} \cdot y_{\text{śred}} \quad (7)$$

#### 2.5. Ocena powtarzalności pomiarów

Jeżeli każde doświadczenie było powtarzane kilkakrotnie należy sprawdzić powtarzalność wyników pomiarów. W tym celu można posłużyć się kryterium Cochra, które weryfikuje hipotezę o powtarzalności wariancji – porównuje wariancje wyników pomiarów. W pierwszej kolejności należy obliczyć wartość współczynnika Cochra  $G$  z wyrażenia (8) [2]:

$$G = \frac{D^2(\mathbf{y})_{i \max}}{\sum_{i=1}^N D^2(\mathbf{y})_i} \quad (8)$$

- obliczenie liczby stopni swobody;
- $u_1 = N = 16$ ; jest równy liczbie doświadczeń planu;
- $u_2 = r - 1$ ; (jeżeli pomiar (doświadczenie) będzie powtarzany 3 razy wówczas  $u_2 = 2$ );
- wyznaczenie wartości krytycznej współczynnika  $G$  z tablic statystyki Cochra.

Do wyznaczenia wartości krytycznej przyjmuje się poziom istotności równy 0,05.

Jeżeli wartość współczynnika  $G$  wyliczona z wyrażenia (8) jest mniejsza od wartości krytycznej  $G_{kr}$  wówczas uznaje się, że doświadczenia były wykonywane z zachowaniem odpowiedniej powtarzalności.

#### 2.6. Sprawdzenie istotności współczynników równania regresji

Sprawdzenie to wykonuje się z wykorzystaniem rozkładu  $t$ -studenta. W pierwszej kolejności z zależności (10) [2] należy wyznaczyć wartość współczynnika testowego  $t_i$  dla każdego wyznaczonego z równania (6) lub (7) współczynnika. Wartość wariancji  $D^2(\mathbf{y})$  wyznacza się z zależności (9) [2].

$$D^2(\mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D^2(\mathbf{y})_i \quad (9)$$

$$t_i = \frac{|a_i|}{\sqrt{\frac{D^2(\mathbf{y})}{N \cdot r}}} \quad (10)$$

Następnie należy wyznaczyć wartość krytyczną współczynnika  $t_{kr}$  z rozkładu  $t$ -studenta, w tym celu konieczne jest obliczenie liczby stopni swobody oraz przyjęcie wartości poziomu istotności  $\alpha = 0,05$ .

$$u = N(r - 1),$$

Wartość krytyczną współczynnika  $t_{kr}$  wyznacza się z tablic lub za pomocą arkusza kalkulacyjnego wykorzystując założony poziom istotności i obliczoną wartość liczby stopni swobody.

$$t_{kr} = t(\alpha; u) = t(0,05; u)$$

Oceniając istotność poszczególnych zmiennych porównuje się ich współczynniki testowe wyznaczone z zależności (10) z wartością krytyczną  $t_{kr}$ . Jeżeli wartość współczynnika testowego  $t_i$  przypisanego do danej zmiennej jest większa od wartości krytycznej wyznaczonej z tablic rozkładu  $t$ -studenta, wówczas współczynnik oraz zmienną, jaką określa uznaje się za istotną w opracowanym modelu. W przeciwnym razie zmienna reprezentowana przez współczynnik testowy nie ma wpływu na obiekt badań i zostaje odrzucona w dalszych rozważaniach [2].

Istotność poszczególnych współczynników można również stwierdzić na podstawie wartości krytycznej współczynników równania wyznaczonych z zależności (11) i porównaniu ich z wartością współczynników reprezentujących poszczególne zmienne niezależne w równaniu (5) [2].

$$a_{kr} = t_{(\alpha;v)} \cdot \sqrt{\frac{D^2(\mathbf{y})}{N \cdot r}} \quad (11)$$

gdzie:

$D^2(\mathbf{y})$  – wariancja błędów pomiarów

Jeżeli wartość bezwzględna badanego współczynnika, wyznaczona z zależności (6) lub (7) przewyższa wartość krytyczną wyznaczoną z zależności (11), wówczas uznaje się go za istotny i współczynnik (zmienna niezależna) jest analizowany w dalszych rozważaniach. Jeżeli wartość współczynnika równania regresji jest mniejsza od wartości krytycznej, wówczas nie jest on istotny w rozważanym eksperymencie, a zmienna niezależna, którą reprezentuje jest pomijana dalszych działaniach.

Po sprawdzeniu istotności współczynników należy zapisać zakodowane równanie regresji uwzględniając istotność poszczególnych współczynników i zmiennych przez nie reprezentowanych.

## 2.7. Ocena adekwatności równania regresji

Aby przeprowadzić ocenę adekwatności równania należy, uwzględniając macierzę planu, wyznaczyć wartości zmiennej zależnej  $y$  przewidywane na podstawie równania (5) po uwzględnieniu istotności zmiennych niezależnych. W równaniu tym za  $x_1 \div x_4$  należy podstawić wartość  $+1$  lub  $-1$  w zależności od macierzy planu. Do oceny adekwatności niezbędne jest wyznaczenie wariancji adekwatności, którą oblicza się z zależności (12) [2]:

$$D_{ad}^2(y) = \frac{r \cdot \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_{\text{śred}})^2}{N - w - 1} \quad (12)$$

gdzie:

$w$  – liczba wyrazów w równaniu (5) po opuszczeniu członów nieistotnych i wyrazu wolnego,

$\hat{y}_i$  – wartość  $y$  przewidywana na podstawie równania (5) po opuszczeniu zmiennych nieistotnych.

Następnie wyznaczyć należy wartość statystyki  $F$  z zależności (13) [2]:

$$F = \frac{D_{ad}^2(y)}{D^2(y)} \quad (13)$$

Wartość statystyki  $F$  wyznaczonej z zależności (13) należy przyrównać do wartości krytycznej wyznaczonej z tablic matematycznych lub za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

Dla wyznaczenia wartości krytycznej statystyki  $F$  niezbędna jest znajomość liczby stopni swobody dla licznika i mianownika wyrażenia (13) zdefiniowanych odpowiednio wg (14) i (15) [2, 3]:

$$v_1 = N - w - 1 \quad (14)$$

$$v_2 = N(r - 1) \quad (15)$$

Wartość krytyczna statystyki  $F$  na podstawie rozkładu Fishera-Snedecora jest przyjmowana jako:

$$F_{kr} = F_{(0,05; v_1; v_2)}$$

Jeżeli wartość statystyki  $F$  wyznaczonej z zależności (13) jest mniejsza od wartości krytycznej otrzymanej z tablic wówczas liniowy

model matematyczny uznaje się za adekwatny. Po stwierdzeniu adekwatności modelu, ostatnią czynnością jest odkodowanie równania i zapis w postaci funkcji liniowej uwzględniającej wszystkie istotne zmienne niezależne.

$$U = a_0 + a_i \cdot \frac{x_i - x_{io}}{\Delta x_i} + \dots + a_n \cdot \frac{x_n - x_{no}}{\Delta x_n}; [V] \quad (16)$$

Po uporządkowaniu wyrazów równania (16) otrzymuje się szukany liniowy model opisujący zależności między zmiennymi.

## PODSUMOWANIE

Istnieje wiele rodzajów planów eksperymentów, które prowadzą do realizacji założonego celu badań. Wybór odpowiedniego uzależniony jest od charakteru zmiennych opisujących obiekt badań, rodzaju związków między zmiennymi, a także od eksperymentatora.

Przedstawione postępowanie przy identyfikacji liniowego modelu zależności między zmiennymi zostanie zrealizowane podczas badań doświadczalnych prowadzonych w Laboratorium Eksploatacji Pojazdów WAT, które mają na celu opracowanie zależności opisującej wpływ poszczególnych zmiennych na napięcie mierzone podczas obciążania akumulatora. Następnie, zależność ta zostanie wykorzystana podczas opracowywania metody diagnostycznej oceny stanu elektrycznego układu rozruchowego silnika spalinowego, szczególnie w aspekcie wyznaczania wartości ciśnienia sprężania na podstawie sygnałów rozruchu.

## BIBLIOGRAFIA

1. Kacprzyński B., *Planowanie eksperymentów. Podstawy matematyczne*. Wydawnictwo WNT, Warszawa 1974.
2. Korzyński M., *Metodyka eksperymentu. Planowanie, realizacja i statystyczne opracowanie wyników eksperymentów technologicznych*. Wydawnictwo WNT, Warszawa 2013.
3. Polański Z., *Planowanie doświadczeń w technice*. PWN, Warszawa 1984.
4. Polański Z., *Współczesne metody badań doświadczalnych*. Wydawnictwo „Wiedza Powszechna”, Warszawa 1978.

Tab. 1. Matryca eksperymentu

L.p.	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_{\text{śred}}$	$D^2(y)_i$
1	+1	+1	+1	+1	+1					
2	+1	+1	+1	+1	-1					
3	+1	+1	+1	-1	+1					
4	+1	+1	+1	-1	-1					
5	+1	+1	-1	+1	+1					
6	+1	+1	-1	+1	-1					
7	+1	+1	-1	-1	+1					
8	+1	+1	-1	-1	-1					
9	+1	-1	+1	+1	+1					
10	+1	-1	+1	+1	-1					
11	+1	-1	+1	-1	+1					
12	+1	-1	+1	-1	-1					
13	+1	-1	-1	+1	+1					
14	+1	-1	-1	+1	-1					
15	+1	-1	-1	-1	+1					
16	+1	-1	-1	-1	-1					

## EXPERIMENT PLAN FOR THE IDENTIFICATION OF VOLTAGE MODEL ACID BATTERY

### *Abstract*

*The paper presents fundamentals of experiment theory, and also gives the scope of its using with the short description of each task. There is presented the purpose of experiments design and method of its achievement. There is characterized universal object of research and selected plans used in the techniques of experiences to achieve intendment purpose with minimum workload. There are discussed the basic criteria of experiences plans. The second part presents a plan of the experiment leading to determine the coefficients of linear equation describing the relationship between the battery voltage and factors affecting it.*

Autorzy:

mgr inż. **Grzegorz Dyga** - Wojskowa Akademia Techniczna im. Jarosława Dąbrowskiego, Wydział Mechaniczny: 00-908 Warszawa: ul. Gen. S. Kaliskiego 2. Tel 261 837 102, email: grzegorz.dyga@wat.edu.pl

dr hab. inż. **Józef Pszczółkowski**, prof. WAT - Wojskowa Akademia Techniczna im. Jarosława Dąbrowskiego, Wydział Mechaniczny: 00-908 Warszawa: ul. Gen. S. Kaliskiego 2. Tel 261 837 206, email: jozef.pszczolkowski@wat.edu.pl