

**Sławomir Adam SORKO**

Politechnika Białostocka, WBiIS, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok  
E-mail: s.sorko@pb.edu.pl

## **Modelowanie oscylacyjnego przepływu cieczy przez przewody prostoosiowe**

### **1 Wprowadzenie**

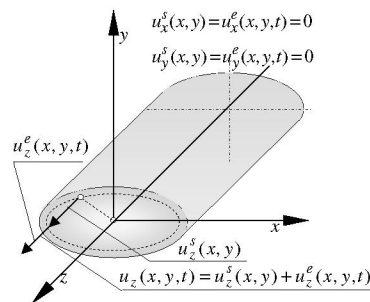
Zjawisko przepływów oscylacyjnych jest istotnym zagadnieniem dotyczącym eksploatacji systemów i instalacji przepływowych, sieci przesyłowych cieczy i gazów, przepływów w urządzeniach hydraulicznych, w układach hydraulicznego zasilania maszyn i urządzeń oraz kwestii mikroprzepływów w zastosowaniach technicznych i biologicznych.

Oscylacyjny ruch płynu w przewodach może być wywołany przez pulsacje ciśnienia generowane w układzie zasilania lub przez oscylacyjny ruch ścianek (przewodu). W wielu przypadkach oscylacyjny ruch płynu w przewodach jest zjawiskiem niepożądanym, generującym efekt "uderzenia hydraulicznego" i efekty kawitacji w płynie, jednocześnie znajduje ono szereg zastosowań technicznych w urządzeniach ciepłowniczych do intensyfikacji wymiany ciepła, w technologii do agregowania substancji płynnych i w szeregu praktycznych zagadnień mikrobiologicznych.

Przedmiotem opracowania jest wyznaczenie pola prędkości w laminarnym przepływie cieczy lepkiej w przewodzie prostoosiowym o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego z udziałem wzdłużnego ruchu oscylacyjnego przewodu o zadanej amplitudzie i częstotliwości drgań wzdłużnych.

### **2 Sformułowanie zagadnienia**

Zagadnienie laminarnego, jednokierunkowego przepływu cieczy lepkiej z udziałem ruchu oscylacyjnego brzegu materialnego ograniczającego przepływ można traktować jako superpozycję ustalonego jednokierunkowego ruchu cieczy i ruchu wzbudzonego zaburzeniem na brzegu wynikającym z lepkiej natury cieczy  $\mathbf{u}=\mathbf{u}^s+\mathbf{u}^e$ .



*Rys. 1 Jednokierunkowy przepływ przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego*

*Fig. 1. Unidirectional flow through a pipe of an arbitrary cross-section shape*

Jednokierunkowy laminarny, ustalony przepływ lepkiego płynu newtonowskiego w prostoosiowym przewodzie jest opisany równaniem Stokesa względem prędkości  $u_z^s(x, y)$  z warunkiem brzegowym zakładającym zerową wartość składowej prędkości stycznej na sztywnej i nieprzepuszczalnej granicy materialnej ( $L$ ) (warunek braku poślizgu cieczy na granicy materialnej) [1]:

$$\nabla^2 u_z^s = -\Delta P, \text{ gdzie: } \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = -\Delta P \quad ; \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1)$$

z warunkiem brzegowym:

$$u_z^s \Big|_L = 0. \quad (1a)$$

Jednokierunkowy laminarny, niustalony przepływ lepkiego płynu newtonowskiego w prostoosiowym przewodzie względem prędkości  $u_z^e(x, y, t)$  przy zaniedbaniu gradientu ciśnienia i sił masowych spełnia równanie dyfuzji [2]:

$$\frac{\partial u_z^e}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_z^e \quad (2)$$

z warunkiem brzegowym:

$$u_z^e \Big|_L = U_z^e(t), \quad (2a)$$

gdzie  $U_z^e(t)$  jest prędkością oscylacyjnego ruchu ścianki. W równaniach (1) i (2)  $\mu$  i  $\nu = \mu/\rho$  oznaczają odpowiednio lepkość dynamiczną i kinematyczną cieczy.

## 2.1 Wyznaczenie ustalonego przepływu jednokierunkowego generowanego gradientem ciśnienia

Prędkość jednokierunkowego ruchu  $u_z^s \equiv u_z^s(x, y)$  opisanego równaniem (1) z warunkiem brzegowym (1a) można uważać za sumę dwóch składowych: składowej  $\bar{u}_z^s \equiv \bar{u}_z^s(x, y)$  spełniającej równanie Laplace'a  $\nabla^2 \bar{u}_z^s = 0$  i składowej  $\tilde{u}_z^s \equiv \tilde{u}_z^s(x, y)$  spełniającej równanie Poissona  $\nabla^2 \tilde{u}_z^s = -\Delta P \nu$ , gdzie  $\nu \equiv \nu(x, y)$  jest dowolną funkcją argumentów  $(x, y)$  spełniającą równanie Poissona  $\nabla^2 \nu = 1$  w obszarze ( $\Lambda$ ).

Całkowe sformułowanie przedstawionego wyżej zagadnienia przepływowego dla opisanego równaniem Poissona (1) z warunkiem brzegowym (1a) w obszarze ( $\Lambda$ ) ograniczonym brzegiem ( $L$ ) ma postać:

$$\chi(\mathbf{p}) u_z^s(\mathbf{p}) + \int_L g_z^s(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \int_L u_z^s(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \Delta P \iint_{\Lambda} G(\mathbf{p}, \nu) d\Lambda_{\nu}, \quad (3)$$

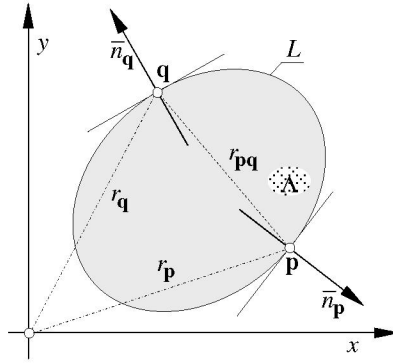
gdzie:  $g_z^s(\mathbf{q}) = \frac{\partial u_z^s(\mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}}$ ,  $\mathbf{p}(x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}})$ ,  $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$  są odpowiednio punktem ustalonym

i punktem bieżącym całkowania, a funkcja  $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  jest rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right), \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = \sqrt{(\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2 + (\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2} \quad (3^1)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{y\mathbf{q}} - \delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{x\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2} \quad (3^2)$$

gdzie:  $\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (x_{\mathbf{p}} - x_{\mathbf{q}})$ ;  $\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (y_{\mathbf{p}} - y_{\mathbf{q}})$ ,  $n_{\mathbf{q}} = [n_{x\mathbf{q}}, n_{y\mathbf{q}}] = \left[ \frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}, \frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}} \right]$  jest wektorem normalnym do brzegu ( $L$ )  $n_{\mathbf{q}} \perp L$  w punkcie  $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$ , stała  $\chi(\mathbf{p})$  przyjmuje odpowiednio wartości: we wnętrzu obszaru  $\chi(\mathbf{p}) = 1$ ,  $\mathbf{p} \in \Lambda$  oraz  $\chi(\mathbf{p}) = 1/2$ ,  $\mathbf{p} \in L$  na gładkiej części brzegu ( $L$ ).



Rys. 2. Szkic do rozważań zagadnień brzegowych w sformułowaniu całkowym

Fig. 2. Sketch for considerations of the integral formulation of the boundary problems

Transformując w równaniu (2) całkę powierzchniową do całki brzegowej, wykorzystując warunek brzegowy (1a), otrzymuje się brzegowe równanie całkowe względem niewiadomej funkcji  $g_z^s(\mathbf{q})$  na brzegu ( $L$ ) [3]:

$$\int_L g_z^s(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = \Delta P \left[ -\frac{1}{2} v(\mathbf{p}) + \int_L v(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} \right] \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in L \quad (4)$$

gdzie funkcja  $v(\mathbf{q}) = r(\mathbf{q})^2/4$  spełniająca równanie Poissona  $\nabla^2 v(\mathbf{q}) = 1$ ;  $\mathbf{q} \in L$  jest promieniem wodzącym punktu ( $\mathbf{q}$ ) w przyjętym układzie współrzędnych.

Całka po prawej stronie równania z uwagi na osobliwość jądra całkowego  $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  na brzegu ( $L$ ) jest rozumiana w sensie wartości głównej Cauchy'ego.

Po wyznaczeniu wartości funkcji  $g_z^s(\mathbf{p})$  na brzegu obszaru ( $L$ ) prędkość  $u_z^s(\mathbf{p})$  w obszarze ( $\Lambda$ ) wyznacza się z zależności:

$$u_z^s(\mathbf{v}) = - \int_L g_z^s(\mathbf{q}) G(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \Delta P \int_L v(\mathbf{q}) E(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{v}) \in \Lambda ; (\mathbf{q}) \in L \quad (5)$$

## 2.2 Wyznaczenie nieustalonego przepływu jednokierunkowego generowanego pulsacyjnym ruchem przewodu

Wzdłużny, oscylacyjny ruch przewodu generuje z powodu lepkości cieczy oscylacyjny ruch cieczy propagujący się w strumieniu cieczy od ścianki przewodu ku jego osi, przyjmując zatem, że prędkość periodycznego ruchu materialnego brzegu ograniczającego przepływ można opisać zależnością  $U_z^e(t) = \bar{U} \exp(-i\omega t)$ , gdzie  $\bar{U}$  jest amplitudą tego ruchu, to wzbudzoną w przewodzie prędkość ruchu cieczy można opisać analogiczną zależnością  $u_z^e(x, y, t) = \bar{u}_z^e \exp(-i\omega t)$ , gdzie  $\bar{u}_z^e \equiv \bar{u}_z^e(x, y)$  jest amplitudą prędkości wzbudzonej, a  $\omega$  częstotliwością ruchu. Przyjęcie powyższych ustaleń sprowadza zagadnienie obliczeniowe opisane równaniem (2) z warunkiem brzegowym (2a) do zespolonego, jednorodnego równania Helmholtza [4]:

$$\nabla^2 \bar{u}_z^e + k^2 \bar{u}_z^e = 0 \quad , \quad k = \sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}} \quad (6)$$

względem argumentu rzeczywistego  $\bar{u}_z^e$  z warunkiem brzegowym:

$$\bar{u}_z^e \Big|_L = \bar{U} \quad , \quad (6a)$$

gdzie  $\bar{U}$  jest amplitudą ruchu oscylacyjnego przewodu.

Całkowe sformułowanie zagadnienia opisanego równaniem Helmholtza (6) w obszarze ( $\Lambda$ ) ograniczonym brzegiem ( $L$ ) ma postać:

$$\chi(\mathbf{p}) \bar{u}_z^e(\mathbf{p}) = - \int_L \bar{g}_z^e(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \int_L \bar{u}_z^e(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} \quad , \quad (7)$$

gdzie:  $\bar{g}_z^e(\mathbf{q}) = \frac{\partial \bar{u}_z^e(\mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}}$ , a funkcje Greena  $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  i  $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  są odpowiednio równe:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\pi} [\ker(\kappa r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}) + i \operatorname{kei}(\kappa r_{\mathbf{p}\mathbf{q}})] \quad (7^1)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}} = -\frac{i}{4} H_1^{(1)}(\kappa r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}) \quad (7^2)$$

przy czym:  $\kappa = \sqrt{\omega/\nu}$ ,  $r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$ . funkcje  $H_0^{(1)}(\cdot)$  i  $H_1^{(1)}(\cdot)$  są sferycznymi funkcjami Hankela pierwszego rodzaju, odpowiednio rzędu zero i rzędu jeden, a funkcje  $\ker(\cdot)$ ,  $\operatorname{kei}(\cdot)$  są funkcjami Kelvina.

Wykorzystując warunek brzegowy (1a), otrzymuje się brzegowe równanie całkowe względem niewiadomej funkcji  $\bar{g}_z^e(\mathbf{q})$  na brzegu ( $L$ ):

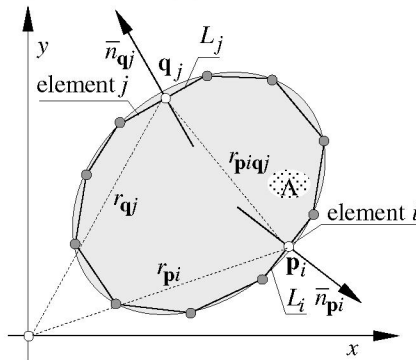
$$\int_L \bar{g}_z^e(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \bar{U} \left[ -\frac{1}{2} + \int_L E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} \right] \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in L \quad (8)$$

Po wyznaczeniu wartości funkcji  $\bar{g}_z^e(\mathbf{v})$  na brzegu obszaru ( $L$ ) prędkość  $\bar{u}_z^e(\mathbf{v})$  w obszarze ( $\Lambda$ ) wyznacza się z zależności:

$$\bar{u}_z^e(\mathbf{v}) = - \int_L \bar{g}_z^e(\mathbf{q}) G(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \bar{U} \int_L E(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} \quad (\mathbf{v} \in \Lambda; \mathbf{q} \in L) \quad (9)$$

### 2.3 Rozwiązanie numeryczne

Najprostszym sposobem dyskretyzacji równań całkowych (4) i (8) jest podział zamkniętego brzegu ( $L$ ) ograniczającego jednopójny obszar ( $\Lambda$ )  $J$ -elementami liniowymi  $[\Delta L_j]_{j=1}^J$  (gdzie  $\sum_{j=1}^J \Delta L_j \approx L$ ), na których gęstość poszukiwanej funkcji przyjmuje się stałą w obrębie elementu [5].



Rys. 3. Dyskretyzacja linii brzegowej w numerycznym rozwiązaniu równań całkowych  
Fig. 3. Discretization of the solid boundary for numerical solution of the boundary integral equations

Przyjęta formuła dyskretyzacji zagadnienia prowadzi do układów algebraicznych równań liniowych.

(1) względem niewiadomej funkcji  $[g_z^s(\mathbf{q}_j)]_{j=1}^J$  w punktach kolokacji  $[\mathbf{q}_j]_{j=1}^J$  :

$$\sum_{j=1}^J g_z^s(\mathbf{q}_j) G^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \Delta P \left[ \frac{1}{2} v(\mathbf{p}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J v(\mathbf{q}_j) E^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \right], \quad (10)$$

gdzie:

$$G^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \ln \left( \frac{1}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}} \right) dL_j, \quad (10a)$$

$$E^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left( \frac{\delta x_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j} n_{y \mathbf{q}_j} + \delta y_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j} n_{x \mathbf{q}_j}}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}^2} \right) dL_j \quad (10b)$$

oraz:

$$v(\mathbf{q}_j) = \frac{n_{0j}^2}{4} = \frac{1}{4} \left[ (\delta x_{0 \mathbf{q}_j})^2 + (\delta y_{0 \mathbf{q}_j})^2 \right]. \quad (10c)$$

Po wyznaczeniu wartości funkcji  $\left[ g_z^s(\mathbf{q}_j) \right]_{j=1}^J$  na brzegu ( $L$ ) prędkość  $\left[ u_z^s(\mathbf{v}_k) \right]_{k=1}^K$  w obszarze ( $\Lambda$ ) wyznacza się z zależności:

$$u_z^s(\mathbf{v}_k) = - \sum_{j=1}^J \left[ g_z^e(\mathbf{q}_j) G^*(\mathbf{v}_k, \mathbf{q}_j) - \Delta P v(\mathbf{q}_j) E^*(\mathbf{v}_k, \mathbf{q}_j) \right]. \quad (11)$$

(2) względem niewiadomej funkcji  $\left[ \bar{g}_z^e(\mathbf{q}_j) \right]_{j=1}^J$  w punktach kolokacji  $\left[ \mathbf{q}_j \right]_{j=1}^J$ :

$$\sum_{j=1}^J \bar{g}_z^e(\mathbf{q}_j) G^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \bar{U} \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J E^*(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \right]. \quad (12)$$

Po wyznaczeniu wartości funkcji  $\left[ \bar{g}_z^e(\mathbf{q}_j) \right]_{j=1}^J$  na brzegu ( $L$ ) prędkość  $\left[ \bar{u}_z^e(\mathbf{v}_k) \right]_{k=1}^K$  w obszarze ( $\Lambda$ ) wyznacza się z zależności:

$$\bar{u}_z^e(\mathbf{v}_k) = - \sum_{j=1}^J \left[ \bar{g}_z^e(\mathbf{q}_j) G^*(\mathbf{v}_k, \mathbf{q}_j) - \bar{U} E^*(\mathbf{v}_k, \mathbf{q}_j) \right]. \quad (13)$$

### 3 Weryfikacja modelu obliczeniowego

Dogodnym modelem do weryfikacji sformułowanego wyżej zagadnienia przepływowego jest przepływ laminarny cieczy lepkiej w prostoosiowym przewodzie o kołowym kształcie przekroju poprzecznego opisany równaniem Hagena-Poiseulle'a. Profil prędkości rozważanego przepływu w przewodzie o promieniu  $R$  jest opisany zależnością [6]:

$$u_z(r) = \frac{\Delta P}{4} (R^2 - r^2), \quad u_{zmax} \equiv u_z(r=0) = \frac{\Delta P R^2}{4}, \quad (14)$$

$$u_{z\infty} = \frac{u_{zmax}}{2} = \frac{\Delta P R^2}{8},$$

gdzie:

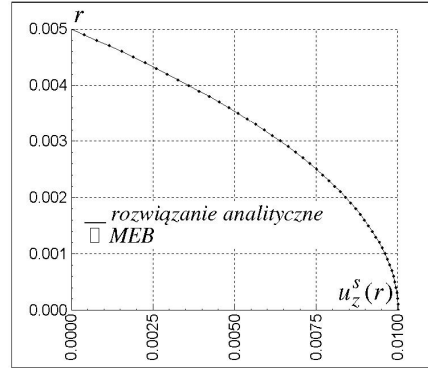
$$\Delta P = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p_{1-2}}{\Delta z_{1-2}}, \quad \text{przy czym } \Delta p_{1-2} \text{ oznacza spadek ciśnienia} \left| \Delta P = \frac{8u_{z\infty}}{R^2} \right. \quad (14^1)$$

Obliczenia profilu prędkości przy użyciu metody elementów brzegowych w przewodzie o promieniu  $R = 0.005 \text{ m}$  zrealizowano, przybliżając linię brzegową  $J=180$  elementami

liniowymi  $L_j$  o łącznej długości  $\Sigma L_j = 0.031414 m$ , generując przy tym błąd względny przybliżenia linii brzegowej  $\delta_L = 0.01\%$ .

W rozwiązaniu analitycznym i numerycznym założono laminarny przepływ cieczy (gęstość  $\rho = 800.0 kg/m^3$ ; lepkość dynamiczna  $\mu = 0.03 kg/(m \cdot s)$  (olej transform.) w temperaturze  $15^\circ C$ ) przy wymuszeniu  $\Delta P = 1600.0 (m \cdot s)^{-1}$ , uzyskując przy tym dokładność numerycznego wyznaczenia profilu prędkości z błędem  $\delta_u < 0.03\%$ , gdzie względny błąd rozwiązania zdefiniowano jako  $\delta_f = 100 * (f^a - f^n) / f^a$  [%], przy czym  $f^a$  i  $f^n$  oznaczają odpowiednio wartości analityczne i numeryczne rozpatrywanej funkcji w zadanych punktach obszaru.

Na rysunku 4 przedstawiono porównanie profilu prędkości laminarnego przepływu ustalonego ( $Re=0.05$ ) cieczy o wyżej opisanych własnościach fizycznych i zadanim wyżej wymuszeniu różnicą ciśnienia na długości przewodu, wyznaczonego metodą elementów brzegowych z rozwiązaniem analitycznym opisanym równaniem (14).



Rys. 4. Profil prędkości przepływu generowanego gradientem ciśnienia w przewodzie o przekroju kołowym

Fig. 4. Profile of the velocity generated by the pressure gradient of the flow through pipe of circular cross-section

W przypadku ruchu osiowo-symetrycznego równanie różniczkowe (2) względem prędkości  $u_z^e \equiv u_z^e(r)$  z warunkiem brzegowym (2a) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial u_z^e}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_z^e = \nu \left( \frac{\partial^2 u_z^e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^e}{\partial r} \right) \quad (15)$$

z warunkiem brzegowym:

$$u_z^e(R, t) = U_z^e(t) . \quad (15a)$$

Stosowne przekształcenia wynikające z okresowości warunku brzegowego po przyjęciu  $u_z^e = \bar{u}_z^e \exp(-i\omega t)$  prowadzą do równania:

$$\frac{d^2 \bar{u}_z^e}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{u}_z^e}{dr} + k^2 \bar{u}_z^e = 0 \quad (16)$$

będącego jednorodnym równaniem Bessela z warunkiem brzegowym:

$$\bar{u}_z^e(R) = \bar{U} \quad , \quad (16a)$$

którego rozwiązanie szczególne można przedstawić w postaci funkcji Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0  $J_0(kr)$  (gdzie  $k^2 = i\omega t/\nu$ ) [7]

$$u_z^e(r,t) = \Re \left( \frac{J_0\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}} r\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}} R\right)} \bar{U} \exp(-i\omega t) \right) \quad , \quad (17)$$

gdzie:

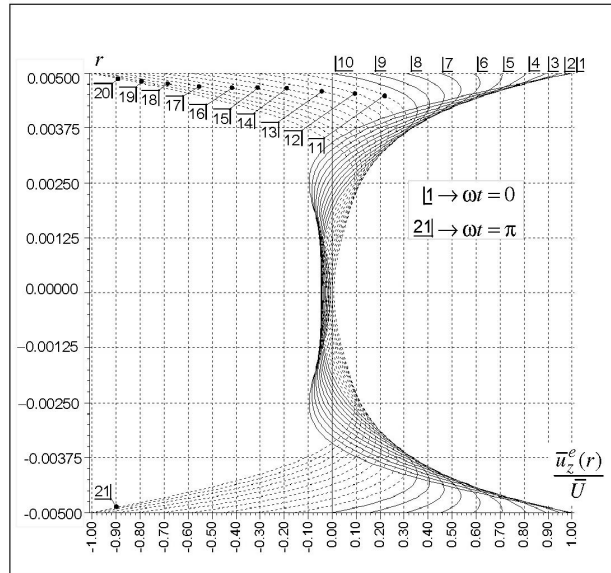
$$J_0\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}} r\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-i\omega}{\nu}} r\right)^{2n} \quad . \quad (17*)$$

Rozwiązaniem fizycznym opisującym profil prędkości w ruchu oscylacyjnym opisanym równaniem (16) z warunkiem brzegowym (16a) jest część rzeczywista wyrażenia (17).

Obliczenia wykonano, przyjmując periodyczny ruch cieczy o wyżej opisanych parametrach fizycznych z częstotliwością kołową  $\omega = 60 \text{ Hz}$  i amplitudą  $\bar{U} = 0.001 \text{ m}$ .

Na rysunku 5 przedstawiono profil prędkości generowanej periodycznym ruchem ścianki przewodu o przekroju kołowym przy opisanych wyżej parametrach fizycznych, geometrycznych i właściwościach ruchu, w fazach jednego cyklu ruchu wzdłużnego przewodu przy wymuszeniu  $\bar{U} \cos(\pi\omega t)$   $0 \leq \omega t \leq 1$ .





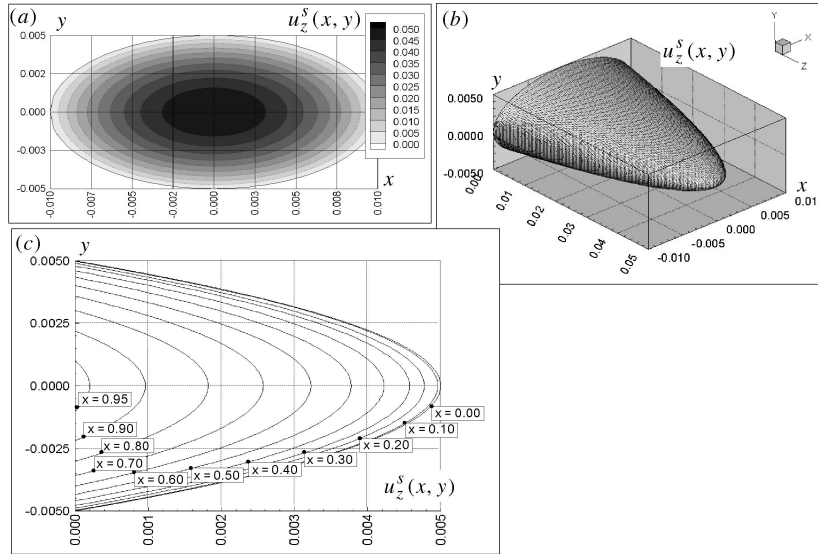
Rys. 5. Profil prędkości przepływu oscylacyjnego generowanego periodycznym ruchem wzdłużnym przewodu o przekroju kołowym

Fig. 5. Profile of the velocity of the oscillating flow generated by periodic longitudinal motion of the circular cross-section pipe

W przypadku zagadnienia testowego opisanego wyżej algorytmu obliczeniowego i programu obliczeniowego do jego numerycznej realizacji o dokładności obliczeń stanowi dokładność wyznaczenia funkcji specjalnych, które są z reguły pewnymi skończonymi przybliżeniami. Ponieważ funkcję Bessela o argumentie zespolonym  $J_0(\kappa r i^{-1/2})$  można wyrazić przez kombinację funkcji Kelvina o argumentie rzeczywistym  $ber(\kappa r)$ ,  $bei(\kappa r)$ ,  $ker(\kappa r)$ ,  $kei(\kappa r)$  [7], w analizowanym przypadku obliczenia prowadzące do wyznaczenia wartości prędkości ruchu cieczy wzbudzonego oscylacyjnym ruchem przewodu  $\bar{u}_z^e(r)$  przy użyciu metody brzegowych równań całkowych (równ. (8) i (9)) i związkiem analitycznym (równ. (17)) można wyznaczyć przy jednakowym błędzie obliczeń. W prezentowanym zagadnieniu testowym wartości  $\bar{u}_z^e(r)$  przy podanych wyżej własnościach fizycznych cieczy, parametrach ruchu przewodu i przybliżeniu obwodu przewodu  $J=180$  elementami wyznaczono z błędem  $\delta_u < 0.1\%$ .

#### 4 Przykład obliczeniowy

Niżej zaprezentowano przykład zastosowania przedstawionego algorytmu obliczeniowego wyznaczania ruchu cieczy lepkiej, w tym pola prędkości i pola prędkości generowanej gradientem ciśnienia wzdłuż osi przewodu i pola prędkości wzbudzonej oscylacyjnym ruchem przewodu, w prostoosiowym przewodzie o przekroju eliptycznym o wymiarach  $a = 2.0\text{ mm}$ ,  $b = 1.0\text{ mm}$ .

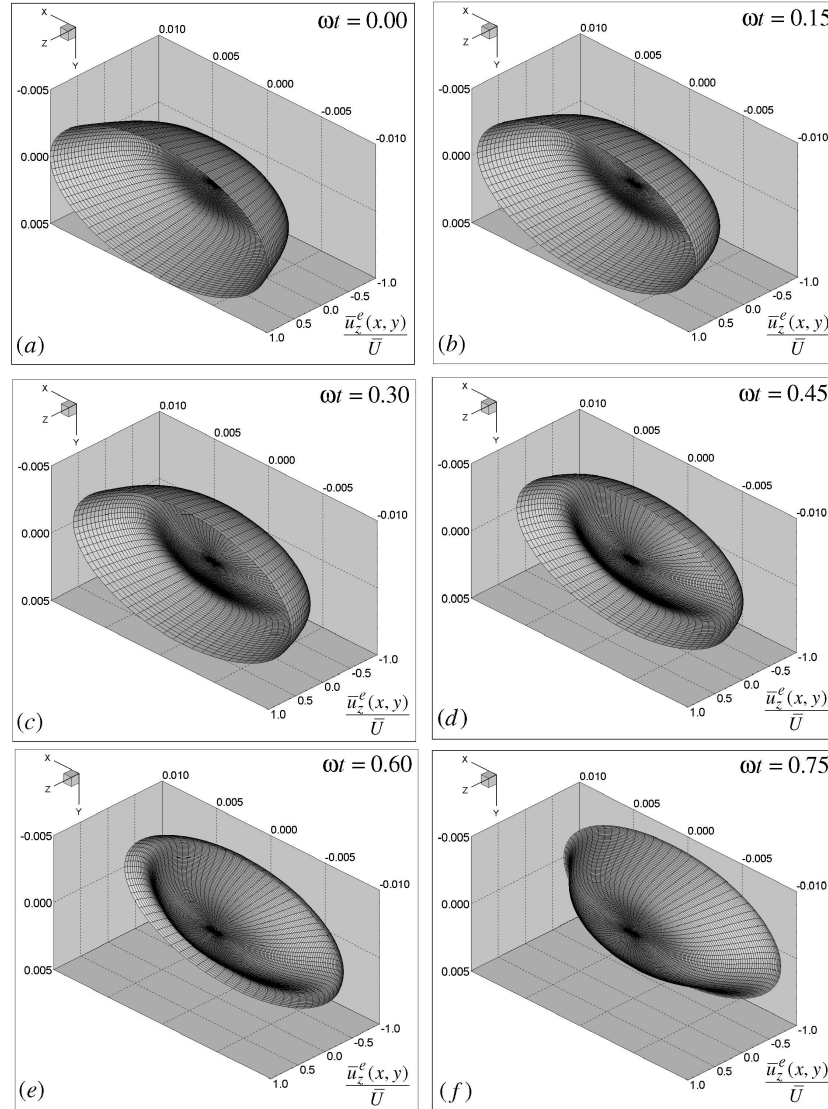


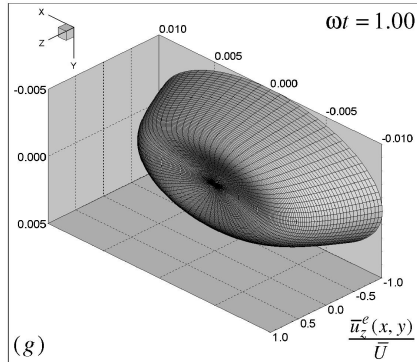
Rys. 6. Profil prędkości przepływu generowanego gradientem ciśnienia w przewodzie o przekroju eliptycznym: a) warstwowy profil prędkości; b) przestrzenny widok pola prędkości; c) wykres prędkości w przekrojach poprzecznych  $x=\text{const}$

Fig. 6. Profile of the velocity generated by the pressure gradient of the flow through pipe of elliptic cross-section: a) contour-line profile of velocity; b) three-dimensional sketch of the velocity; c) graph of velocity at longitudinal view  $x=\text{const}$

Na rysunku 6 przedstawiono wykresy prędkości wzbudzonej wzdłużnym gradientem ciśnienia w przewodzie  $\Delta P=1600.0 (m \cdot s)^{-1}$  w laminarnym przepływie cieczy (gęstość  $\rho=800.0 kg/m^3$ ; lepkość dynamiczna  $\mu=0.03 kg/(m \cdot s)$  (olej transform.) w temperaturze  $15 ^\circ C$ ).

Na rysunku 7 wykresy prędkości wzbudzonej wzdłużnym ruchem przewodu z częstotliwością kołową  $\omega=60 Hz$  i amplitudą  $\bar{U}=0.001 m$ , w wybranych fazach ruchu.





Rys. 7. Profile prędkości przepływu generowanego ruchem oscylacyjnym przewodu o przekroju eliptycznym

Fig. 7. Profiles of the fluid velocity generated by longitudinal oscillations of the pipe of elliptic cross-section

## 5 Podsumowanie

W opracowaniu przedstawiono algorytm wyznaczania złożonego ruchu cieczy lepkiej w jednokierunkowym przepływie laminarnym przez przewody o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego z udziałem ruchu generowanego drganiami wzdłużnymi przewodu. Rozwiązania zagadnienia przepływowego dokonano przez dekompozycję przepływu na przepływ podstawowy cieczy w przewodzie wymuszony gradientem ciśnienia wzdłuż osi przewodu oraz przepływu o charakterze ruchu oscylacyjnego cieczy wzbudzonego drganiami wzdłużnymi przewodu ze stałą częstotliwością ruchu. Składowe prędkości przepływu wyznaczono przy użyciu metody brzegowych równań całkowych, pozwalającą w przypadku złożonych kształtów przewodów na stosunkowo prosty matematyczny opis zagadnień przepływowych i jego numeryczną realizację. Wyznaczenie pola prędkości jako sumy opisanych wyżej składowych umożliwia wyznaczenie pola ciśnienia w przekroju poprzecznym przewodu. Określenie prędkości i ciśnienia w polu przepływu umożliwia zaawansowane modelowanie przepływów, w tym określenie możliwości wystąpienia kawitacji, zjawisk dyspergacji cieczy wieloskładnikowych o złożonej strukturze i innych osobliwych własności przepływów oscylacyjnych [8].

Prezentowany wyżej algorytm wyznaczania laminarnego ruchu cieczy lepkiej w przewodach prostoosiowych o złożonych kształtach przekroju poprzecznego, w złożonych warunkach przepływowych z nałożeniem na właściwy przepływ efektów drgań przewodów, lub okresowych zmian ciśnienia (to zagadnienie jest przedmiotem odrębnego opracowania) jest użytecznym modelem do komputerowej symulacji i numerycznego rozwiązywania wielu zagadnień inżynierskich w zakresie przepływów w złożonych geometrycznie strukturach oraz zagadnień dotyczących konstrukcji zaawansowanych wymienników ciepła.

Obliczenia zagadnień przepływowych w zakresie przepływów newtonowskich cieczy lepkich są realizowane w Centrum Komputerowych Sieci Rozległych Politechniki Białostockiej na wieloprocesorowej maszynie wirtualnej (16xXSEON 2,4GHz, 16 GB

RAM) przy wykorzystaniu oprogramowania sporządzonego w Politechnice Białostockiej (programy sporządzone przez autorów opracowania w języku programowania FORTRAN, modyfikowane i kompilowane w systemie maszyny wirtualnej)

#### Literatura

1. Batchelor G. K.: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Univ. Press, 1967
2. Landau L.D., Lifshitz E.M.: *Fluid Mechanics*. Butterworth-Heinemann Ltd, 1987
3. Pozrikidis C.: *A Practical Guide to Boundary element method with the software Library BEMLIB*. Chapman & Hall / CRC, 2002
4. Kythe P.: *An Introduction to Boundary Element Methods*. CRC, 1985
5. Wrobel L.C.: *The Boundary Element Method Vol. I Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2002
6. Spurk J.H.: *T1. Fluid Mechanics, T2 Fluid Mechanics Problems and Solutions*, Springer, 1997
7. McLachlan N.W.: *Bessel Functions for Engineers*. Clarendon Press, Oxford, 1955
8. Çarpınlioğlu M.O., Gündoğdu M.I.: A critical review on pulsatile pipe flow studies directing towards future research topics, *Flow Measurement and Instrumentation*, 12, 2011

#### Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono algorytm rozwiązania zagadnienia przepływowego, laminarnego ruchu cieczy w prostosiowym przewodzie o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego w warunkach oscylacyjnego ruchu wzdłużnego przewodu. Przedstawiono matematyczny opis problemu przy użyciu metody brzegowych równań całkowych. Zaprezentowano rozwiązanie zagadnienia testowego wykazujące poprawność modelu matematycznego i algorytmu obliczeniowego. Przedstawiono przykład wyznaczenia pola prędkości przepływu przez prostoosiowy przewód o przekroju eliptycznym.

**Słowa kluczowe:** przepływ Stokesa, przepływ oscylacyjny, drgania wzdłużne przewodu, metoda elementów brzegowych

## Mathematical modelling of oscillatory pipe flows

### Summary

In the elaboration was presented the algorithm of solution of the problem of laminar viscous flow through straight pipe of an arbitrary cross-section under conditions of the oscillatory movement of the pipe in longitudinal direction. The mathematical description and solution of the problem was formulated by using integral equations method. One presented solution of the test-problem demonstrative the correctness of the mathematical model and the computational algorithm. The example of the solution of the flow generated by the pressure gradient and the oscillations of the tube of an elliptic cross-section shape was presented.

**Keywords:** Stokes flow, oscillatory flows, longitudinal pipe vibrations, boundary element method

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014 Katedry Ciepłownictwa Politechniki Białostockiej.