

Andriy Czaban, Marek Lis, Politechnika Częstochowska, Częstochowa
Jarosław Sosnowski, Politechnika Częstochowska, Częstochowa, REVICO, Płock*
Witaliy Lewoniuk, Lwowski Narodowy Uniwersytet Rolniczy, Lwów**

MODEL MATEMATYCZNY DWUPRZEWODOWEJ LINII ZASILANIA Z WYKORZYSTANIEM MODYFIKOWANEJ ZASADY HAMILTONA

MATHEMATICAL MODEL OF THE DOUBLE CONDUCTOR POWER LINE USING A MODIFIED HAMILTON'S PRINCIPLE

Streszczenie: W pracy, na podstawie uogólnionej interdyscyplinarnej metody wykorzystującej modyfikację zasady Hamiltona z uwzględnieniem rozszerzenia funkcji Lagrange'a sformułowano model matematyczny układu elektroenergetycznego, który składa się z dwuprzewodowej linii zasilania (linia Lechera o parametrach rozłożonych) i obciążenia o charakterze czynno-indukcyjnym. Na podstawie sformułowanego modelu przeprowadzono obliczenia numeryczne. Wyniki symulacji komputerowych przedstawiono w postaci graficznej.

Abstract: In the paper a mathematical model of an electric power system is presented. The system consists of double-circuit power line (Lecher's line with distributed parameters) and active-inductive load circuit. The model was formulated on the basis of the generalized interdisciplinary method using the modified Hamilton's principle with extended Lagrange's function. Numerical calculations based on the formulated model have been made and results of computer simulations as graphs are presented in the paper.

Słowa kluczowe: zasada Hamiltona-Ostrogradskiego, Euler-Lagrange'a system, zespół elektryczny
Keywords: Hamilton-Ostrogradsky's principle, Euler-Lagrange's system, electrical set

1. Wstęp

Modelowanie matematyczne skomplikowanych układów elektrotechnicznych jest bardzo aktualnym problemem technicznym. Wykorzystanie teorii modelowania pozwala w istotny sposób uprościć analizę różnego rodzaju obiektów, bez konieczności stosowania kosztownych eksperymentów badawczych. Aby sformułować model matematyczny badanych obiektów potrzeba wykorzystywać podstawowe prawa fizyki stosowanej odpowiedniej dziedziny nauki. W tym przypadku zastosowano teorię elektrodynamiki [4, 6].

W modelowaniu matematycznym do formułowania modeli zazwyczaj wykorzystuje się dwa podejścia: klasyczne lub wariacyjne. Każda z wymienionych metod ma swoje zalety i wady [1, 2, 6].

W pracy zaproponowano dla sformułowania modelu matematycznego opisującego procesy nieustalone w linii Lechera wykorzystanie zmodyfikowanej wariacyjnej zasady Hamiltona [1].

2. Model matematyczny układu

Rozszerzona funkcja Lagrange'a dla układów dysypatywnych przyjmuje postać [1, 2]:

$$L^* = \tilde{T}^* - P^* + \Phi^* - D^*, \quad (1)$$

gdzie: L^* – zmodyfikowana funkcja Lagrange'a, \tilde{T}^* – energia (koenergia) kinetyczna, P^* – energia potencjalna, Φ^* – energia uogólnionych sił dyssypacyjnych, D^* – energia zewnętrznych sił niepotencjalnych.

Analizę matematyczną badanego obiektu przeprowadzono dla układu o parametrach rozłożonych (jednowymiarowe przestrzenie) [3, 6]. W takim przypadku elementy zmodyfikowanego lagrangianu rozpatrywane są nie jako funkcje energetyczne (1), a jako odpowiadające im gęstości liniowe. W takim przypadku funkcjonał działania wg Hamiltona przyjmie postać [1]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L^* + \int_l L_l dl \right) dt, \quad I = \int_l L_l dl, \quad (2)$$

gdzie: S – funkcjonał działania wg Hamiltona, L_l – gęstość zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a, I – funkcjonał energetyczny.

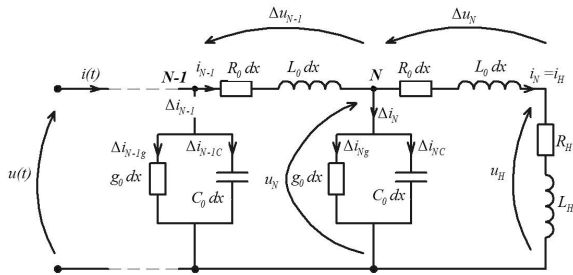
Składniki gęstości zmodyfikowanej funkcji Lagrange'a [1] opisują zależności:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} \equiv T_l = \frac{L_0 i^2}{2}, \quad \frac{\partial P^*}{\partial x} \equiv P_l = \frac{1}{2C_0} Q_x^2, \quad (3)$$

$$Q_x \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad Q_t \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} = i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} &\equiv \Phi_l = \Phi_{I3} - \Phi_{IB} = \\ &= \int_0^l \left(\frac{R_0}{2} Q_t^2 - \frac{g_0}{2C_0^2} Q_x^2 \right) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie: $i(x,t)$ – prąd w linii, R_0, g_0, C_0, L_0 – parametry linii, Φ_{R3} – zewnętrzna dyssypacja energii, Φ_{RB} – wewnętrzna, $Q(x,t)$ – ładunek linii.



Rys. 1. Układ elektroenergetyczny końcówki obciążonej linii Lachera

Uwzględniając wyrażenia (3) i (4) funkcjonal energetyczny przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} I = \int_l \left\{ \frac{L_0}{2} Q_t^2 - \frac{1}{2C_0} Q_x^2 + \right. \\ \left. + \int_0^l \left(\frac{R_0}{2} Q_t^2 - \frac{g_0}{2C_0^2} Q_x^2 \right) d\tau \right\} dl \end{aligned} \quad (5)$$

Następnie wyznaczono wariację funkcjonalu (5) i przyrównano ją do zera.

$$\begin{aligned} \int_l \left\{ \left(L_0 Q_t + R_0 \int_0^l Q_t |_{t=\tau} d\tau \right) \delta Q_t - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{C_0} Q_x + \frac{g_0}{C_0^2} \int_0^l Q_x |_{t=\tau} d\tau \right) \delta Q_x \right\} dl = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Rozwiązując zależność (6) można zapisać:

$$\begin{aligned} \delta I = \int_l \left\{ \frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{g_0}{C_0^2} \int_0^l \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} |_{t=\tau} d\tau - L_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \right. \\ \left. - R_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial t} |_{t=\tau} d\tau \right\} \delta Q dl + \Omega = 0, \quad \Omega = \Omega_t + \Omega_x \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie Ω_t, Ω_x – warunki brzegowe do funkcjonalu (5).

Wariacja funkcjonalu może być równa zero tylko w przypadku równości zero całki oraz równości zero funkcji warunków brzegowych funkcjonalu: Ω . Ponieważ δQ nigdy nie może być równa zero, to ostatecznie: dla równości zero wariacji (7) niezbędne jest aby równe zero było wyrażenie podcałkowe – równania Eulera [1]

$$\frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{g_0}{C_0^2} \int_0^l \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} d\tau - L_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - R_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

Do zależności (8) wyrażenie stacjonarnych powiązań [1, 3, 6] przyjmuje postać (9)

$$-\frac{1}{C_0} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia

$$\int_0^l \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} |_{t=\tau} d\tau = \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial t} |_{t=\tau} d\tau = Q \quad (10)$$

zapisano ostatecznie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \\ + (R_0 C_0 + g_0 L_0) \frac{\partial Q}{\partial t} + g_0 R_0 Q \end{aligned} \quad (11)$$

Równanie linii zapisane jest dla funkcji ładunku linii. Dla przypadku ogólnego równanie to przyjmuje postać [1],

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + (R_0 C_0 + g_0 L_0) \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \\ + g_0 R_0 \lambda \quad \lambda = Q, u, i \end{aligned} \quad (12)$$

Energetyczne funkcje zasilania oraz obciążenia linii uwzględniono w warunkach brzegowych do równania (12).

Doświadczenie pokazuje, że dla najbardziej optymalnego opisu procesów fizycznych w linii należy jako uogólnionych funkcji wykorzystać napięcie linii tzn. $\lambda = u(x,t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = (C_0 L_0)^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v - g_0 R_0 u \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = v \end{aligned} \quad (13)$$

Najważniejszym problemem rozwiązywania równania (13) jest wyznaczenia warunków początkowych $v(x,t)|_{t=t_0}$ oraz brzegowych $u(x,t)|_{x=0}$ i $u(x,t)|_{x=l}$. Co do pierwszych, to problem nie jest skomplikowany. Wyznaczono je z poprzednich badań (do komutacji). Podobnie można wyznaczyć napięcie na początku linii $u(x,t)|_{x=0}$ jeżeli nie wynika ono z danych początkowych zadania. Natomiast głównym problemem jest znalezienie warunków brzegowych na końcu linii $u(x,t)|_{x=l}$.

Na podstawie (11) uwzględniając, że $Q_x(x,t) = C_0 u(x,t)$ można zapisać:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_0 i(x,t) + L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (14)$$

Równania (13), (14) w układzie dyskretnym przyjmują postać:

$$\frac{dv_j}{dt} = (C_0 L_0)^{-1} \left(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{(\Delta x)^2} - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_j - g_0 R_0 u_j \right) \quad (15)$$

$$u_1 = u(x,t)|_{x=0}, \quad u_N = u(x,t)|_{x=l}$$

$$-\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = R_0 i_j + L_0 \frac{di_j}{dt} \quad (16)$$

$$\frac{du_j}{dt} = v_j, \quad j = 2, \dots, N-1 \quad (17)$$

Uwzględniając rys.1 szereg stacjonarnych powiązań, stosujący prawa Kirchhoffa, przyjmuje postać [3];

$$u_H = R_H i_H + L_H \frac{di_H}{dt}, \quad i_H \equiv i_N \quad (18)$$

$$u_N = \Delta u_N + u_H \Rightarrow u_H = u_N - \Delta u_N \quad (19)$$

$$\Delta u_N = R_0 \Delta x i_N + L_0 \Delta x \frac{di_N}{dt} \quad (20)$$

Skąd, otrzymano:

$$\frac{di_N}{dt} = \frac{1}{L_H + L_0 \Delta x} \left[u_N - (R_0 \Delta x + R_H) i_N \right] \quad (21)$$

Zależności (15), (16) dla N -go węzła dyskretyzacji można zapisać w postaci:

$$\frac{dv_N}{dt} = \frac{1}{C_0 L_0} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} (u_{N-1} - 2u_N + u_{N+1}) - \right.$$

$$\left. - (g_0 L_0 + C_0 R_0) v_N - g_0 R_0 u_N \right] \quad (22)$$

$$-\frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2\Delta x} = R_0 i_N + L_0 \frac{di_N}{dt} \quad (23)$$

gdzie u_{N+1} – napięcie fikcyjnego węzła dyskretyzacji:

$$u_{N+1} = -2\Delta x \left(R_0 i_N + \frac{L_0}{L_H + L_0 \Delta x} \left[u_N - (R_0 \Delta x + R_H) i_N \right] \right) + u_{N-1} \quad (24)$$

Uwzględniając zależności (23) i (24) można zapisać równania długiej linii dla N -tego węzła jako:

$$\frac{dv_N}{dt} = -\frac{g_0 L_0 + C_0 R_0}{C_0 L_0} v_N + \frac{2}{C_0 L_0 (\Delta x)^2} u_{N-1} - \frac{1}{C_0} \left[\frac{2}{L_0 (\Delta x)^2} + \frac{g_0 R_0}{L_0} + \frac{2}{\Delta x (L_H + L_0 \Delta x)} \right] u_N + \frac{2}{C_0} \left[\frac{R_0 \Delta x + R_H}{\Delta x (L_H + L_0 \Delta x)} - \frac{R_0}{L_0 \Delta x} \right] i_N \quad (25)$$

$$\frac{du_N}{dt} = v_N \quad (26)$$

Ważną funkcjonalną zależnością interesującą ewentualnych użytkowników jest wyznaczenie prądu w elementach linii. Obliczyć go można w następujący sposób:

$$-\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = R_0 i_j + L_0 \frac{di_j}{dt} \quad (27)$$

Skąd otrzymano:

$$\frac{di_j}{dt} = \frac{1}{L_0 \Delta x} (u_j - u_{j+1}) - \frac{R_0}{L_0} i_j, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (28)$$

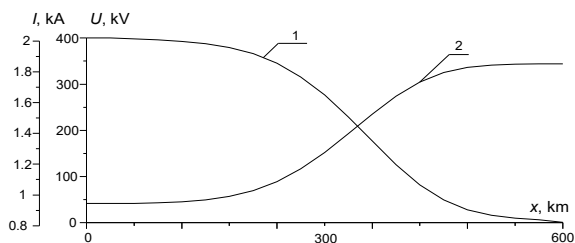
Wspólnemu całkowaniu podlega układ równań różniczkowych: (15), (17), (21), (25), (26), (28) z uwzględnieniem wyrażeń: (18) – (20).

3. Wyniki symulacji komputerowej

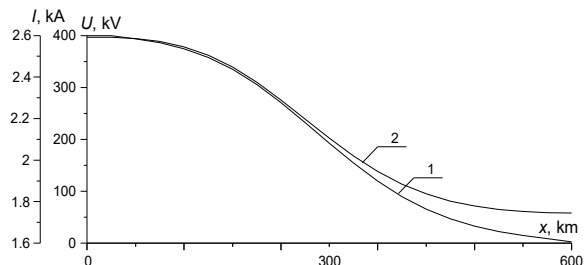
Do obliczeń symulacyjnych wykorzystano linię o parametrach: $R_0 = 0,86 \cdot 10^{-1} \Omega / \text{km}$, $L_0 = 0,134 \cdot 10^{-2} \text{ H} / \text{km}$, $C_0 = 0,85 \cdot 10^{-8} \text{ F} / \text{km}$, $g_0 = 0,375 \cdot 10^{-7} \text{ Sm} / \text{km}$. Długość linii $l = 600 \text{ km}$. Parametry gałęzi obciążenia: $R_H = 60 \Omega$, $L_H = 10 \text{ mH}$. Linia została zasilona stałym napięciem $u(x,t)|_{x=0} = 400 \text{ kV}$.

Analizie poddano linię dla dwóch przypadków obliczeniowych: pierwszy - linia pracuje w stanie zwarcia na jej końcu oraz drugi - przy pracy linii pod obciążeniem przyjętym wskaźnikowo. Podczas dyskretyzowania równań z przestrzennymi pochodnymi krok został przyjęty na poziomie $\Delta x = l / 20 = 30$ km. Obliczenia symulacyjne przeprowadzono z wykorzystaniem metody Gira (niejawnych, drugiego rzędu).

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono przestrzenny rozkład funkcji napięcia oraz prądu w chwili czasu $t = 0,003$ s i $t = 0,005$ s dla pierwszego przypadku obliczeniowego. Na wymienionych rysunkach bardzo dobrze widać skomplikowane procesy falowe w linii Lachera w stanie zwarcia na końcu układu. Na początku linia została zasilana napięciem przemiennym o stałej wartości, a w końcu linii to napięcie jest równym zero (stan zwarcia). Innymi słowami funkcja napięcia przez pole elektromagnetyczne linii zanika. Widać to na obu rysunkach. Bardzo ciekawa sytuacja zachodzi w funkcji prądu. Na rysunku 2 prąd na początku linii jest równym około 1 kA, a w jej końcu około 1,85 kA. To na rysunku 3 sytuacja nieco inna. Na początku linii prąd jest równym około 2 kA, a w jej końcu około 1,75 kA.

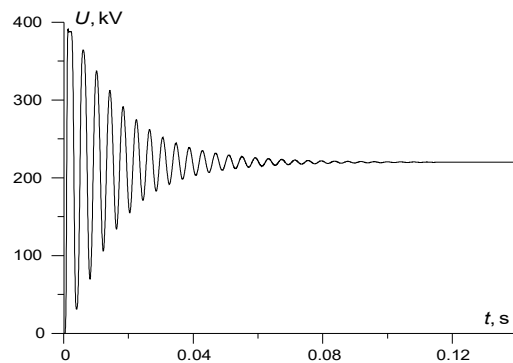


Rys. 2. Przestrzenny rozkład funkcji napięcia (1) i prądu (2) w czasie $t = 0,003$ s dla pierwszego przypadku obliczeniowego



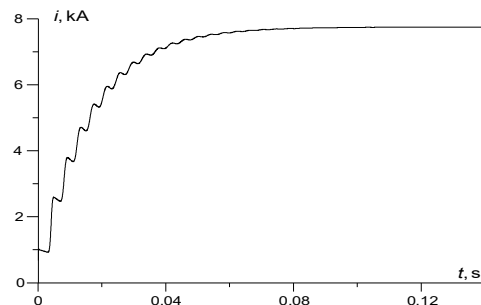
Rys. 3. Przestrzenny rozkład funkcji napięcia (1) i prądu (2) w czasie $t = 0,005$ s dla pierwszego przypadku obliczeniowego

Na rysunku 4 przedstawiono przejściową funkcję napięcia w środkowym punkcie linii dla pierwszego przypadku obliczeniowego.



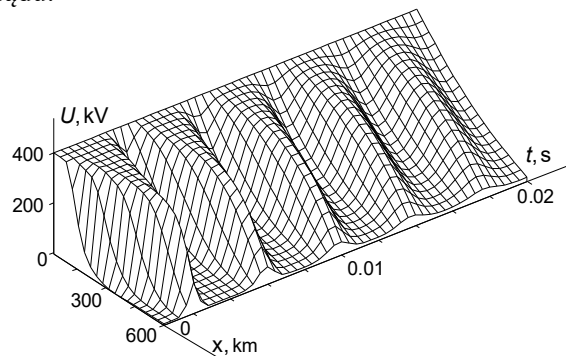
Rys. 4. Przejściowa funkcja napięcia w środkowym punkcie linii dla pierwszego przypadku obliczeniowego

Właśnie środek linii występuje jako punkt zmiany falowych procesów w układzie. Widać tutaj prawie maksymalną amplitudę oscylacji funkcji napięcia (ale nie prądu).

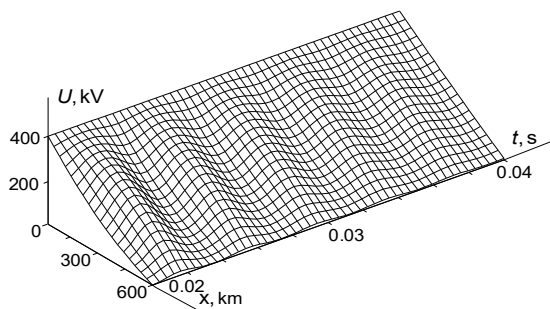


Rys. 5. Przejściowa funkcja prądu w pierwszym odcinku dyskretyzowania linii zasilania dla pierwszego przypadku obliczeniowego

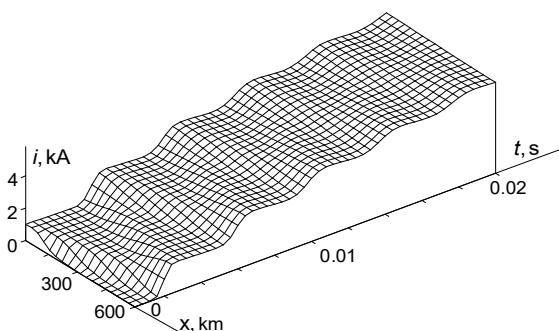
Rysunek 5 przedstawia przejściową funkcję prądu w pierwszym dyskretnym odcinku linii (na jej początku) dla pierwszego przypadku obliczeniowego. Widać na nim falowe procesy prowadzące do oscylacji w przebiegu czasowym prądu.



Rys. 6. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji napięcia w zakresie $t \in [0; 0,02]$ s dla pierwszego przypadku obliczeniowego



Rys. 7. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji napięcia w zakresie $t \in [0, 0,02; 0,04]$ s dla pierwszego przypadku obliczeniowego

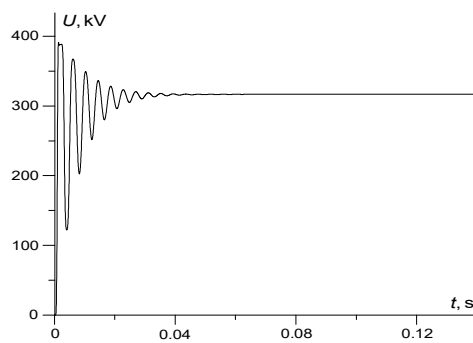


Rys. 8. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji prądu w zakresie $t \in [0; 0,02]$ s dla pierwszego przypadku obliczeniowego

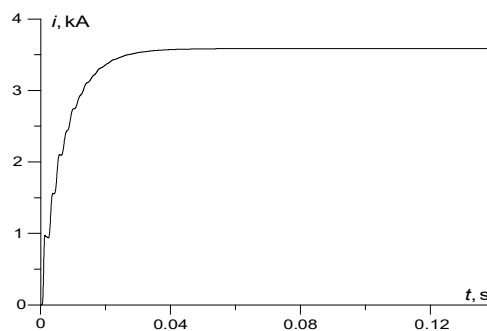
Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono czasowo-przestrzenny rozkład funkcji napięcia w zakresie $t \in [0; 0,04]$ s. Przedstawione rysunki dają najwięcej informacji o stanach fali elektromagnetycznej w dowolnym punkcie linii. Analizując rysunki 2(1), 3(1) oraz 4 z rysunkami 5, 6 to można zauważyć całkowitą zależność procesów fizycznych w układzie.

Na rysunku 8 pokazano czasowo-przestrzenny rozkład funkcji prądu w zakresie $t \in [0; 0,02]$ s.

Warto tutaj zaakcentować nieco inny charakter przebiegu funkcji prądu w porównaniu do przebiegu funkcji napięcia. Jeżeli dla napięcia amplituda nie zmienia w środku linii, to dla funkcji prądu sytuacja wygląda inaczej. Środek linii jest punktem przegięcia funkcji (druga pochodna jest równa zero). Innymi słowami, funkcja napięcia w środku linii oscyluje z maksymalną amplitudą i minimalną na brzegach linii. Natomiast dla funkcji prądu, odwrotnie – minimalna oscylacja w środku linii, a maksymalna – na jej brzegach. Uzasadnienie fizyczne tego polega na przestrzennej prostopadłości wektorów pól elektrycznego (napięcie) oraz magnetycznego (prąd), co widać na poprzednich rysunkach 2 – 5, a także dodatkowo na rysunkach 10 – 12.



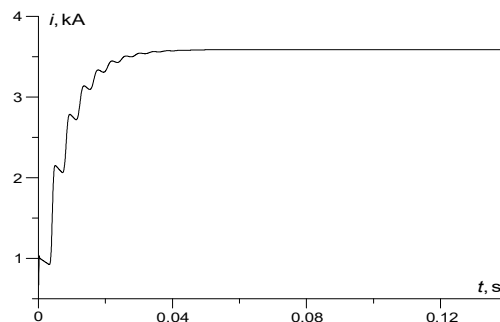
Rys. 9. Przejściowa funkcja napięcia w środkowym punkcie linii dla drugiego przypadku obliczeniowego



Rys. 10. Przejściowa funkcja prądu w środkowym jednostkowym odcinku linii dla drugiego przypadku obliczeniowego

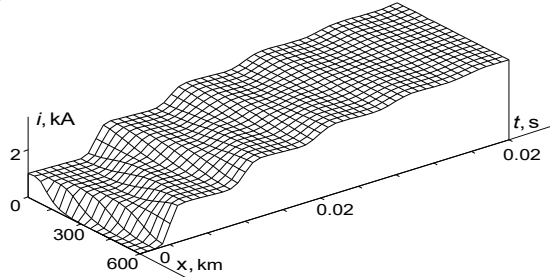
Na rysunku 9 przedstawiono przejściową funkcję napięcia w środkowym punkcie linii dla drugiego przypadku obliczeniowego. Analizując razem rysunki 4 i 9 można wnioskować o zmniejszeniu czasu zanikania fali, co jest zależne od dyssypacyjnych procesów, powiązanych z rezystancją obciążenia.

Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono przejściowe funkcje prądu w środkowym odcinku linii oraz w gałęzi obciążania (koniec linii). Widać tutaj zjawisko opisane powyżej: oscylacja prądu w środku linii wielokrotnie mniejsza, aniżeli na jej brzegach.

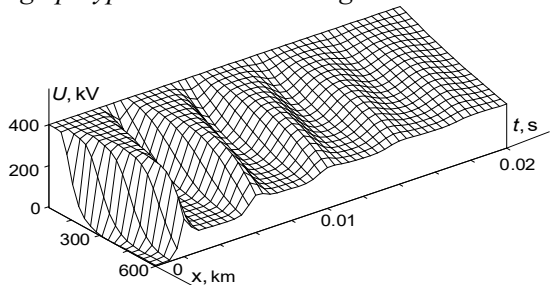


Rys. 11. Przejściowa funkcja prądu w gałęzi obciążenia linii zasilania dla drugiego przypadku obliczeniowego

Rysunek 12 przedstawia czasowo-przestrzenny rozkład funkcji prądu w zakresie $t \in [0; 0,02]$ s. Także tutaj widać dość istotny wpływ energii rozpraszania w porównaniu ze stanem zwarcia rys. 8.



Rys. 12. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji prądu w zakresie czasowy $t \in [0; 0,02]$ s dla drugiego przypadku obliczeniowego



Rys. 13. Czasowo-przestrzenny rozkład funkcji napięcia w zakresie $t \in [0; 0,02]$ s dla drugiego przypadku obliczeniowego

Na rysunku 13 przedstawiono czasowo-przestrzenny rozkład funkcji napięcia w zakresie $t \in [0; 0,02]$ s. Wszystkie rozpatrywane powyżej procesy są tutaj widoczne, a mianowicie: zmniejszenia czasu zaniku fali, maksymalne oscylacje w środku linii, wzrost napięcia na gałęzi obciążenia.

4. Wnioski

Modyfikacja zasady Hamiltona, drogą rozszerzenia funkcji Lagrange'a daje możliwość formułowania modeli matematycznych praktycznie dowolnych układów dynamicznych, a także w układach o parametrach rozłożonych. W takim przypadku należy uwzględnić nie funkcje energetyczne układu, a ich odpowiednie gęstości. Obliczenia warunków brzegowych na końcu linii, na podstawie praw elektrodynamiki, dają możliwość obliczeń numerycznych dyskretyzowanych równań stanu elektroenergetycznego niejawnymi metodami (Gira drugiego rzędu).

Na podstawie wyników symulacji komputerowej można wyciągnąć następujące wnioski:

- funkcja przebiegu czasowego napięcia ma oscylacje o maksymalnej amplitudzie w środkowej części linii, natomiast funkcja prądu ma oscylacje z maksymalną amplitudą na brzegach linii,

- przestrzenne rozkłady zależności funkcyjnych linii zasilania (rysunki 2, 3) potwierdzają zasady fizyczne elektrodynamiki stosowanej co do procesów falowych w długich liniach zasilania,

- przedstawione czasowo-przestrzenne rozkłady funkcji napięcia i prądu dają najbardziej adekwatną informację o falowych procesach w obciążonej linii oraz w jej stanie zwarcia.

- aktywne obciążenia w końcowej gałęzi linii istotnie tłumią oscylacyjne procesy w długiej linii.

5. Literatura

- [1]. Czaban A.: Zasada Hamiltona-Ostrogradskiego w układach elektromechanicznych. – Lwów: W-wo T. Soroki 2015. – 464 s. (w języku ukraińskim).
- [2]. Lis M.: Modelowanie matematyczne procesów nieustalonych w elektrycznych układach napędowych o złożonej transmisji ruchu. Częstochowa. – W-wo Politechniki Częstochowskiej, 2013. – 258 s.
- [3]. Nejman L., Demirczian K.: Zasady teoretyczne elektrotechniki. (w 2 tomach) Leningrad, Energoizdat, 1981. t. 1 – 536 s., t. 2 – 415 s.
- [4]. Rusek A.: Stany dynamiczne układów napędowych z silnikami indukcyjnymi specjalnego wykorzystania. Monografia. W-wo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2012.
- [5]. Simoni K.: Theoretische elektrotechnik. – Berlin, 1956.
- [6]. White D.C., Woodson H.H.: Electromagnetic Energy Conversion, New-York, John Wiley & Sons, Inc, 1958.

Autorzy

Andriy Czaban prof. nadzw. dr hab. inż.

Politechnika Częstochowska

Wydział Elektryczny, al. Armii Krajowej 17

e-mail: atchaban@gmail.com

Marek Lis prof. nadzw. dr hab. inż., Zakład Ma-

szyn i Napędów Elektrycznych Instytut Elek-

trotechniki Przemysłowej Wydziału Elektrycz-

nego Politechniki Częstochowskiej

e-mail: lism@el.pcz.czyst.pl

Jarosław Sosnowski mgr inż., doktorant Instytut

Elektrotechniki Przemysłowej Wydziału Elek-

trycznego Politechniki Częstochowskiej

Witaliy Lewoniuk mgr inż.

Lwowski Narodowy Uniwersytet Rolniczy

e-mail: atchaban@gmail.com