

Mariusz Poński

ANALIZA ODPOWIEDZI UKŁADÓW KONSTRUKCYJNYCH NA WYMUSZENIE W POSTACI SIŁY O DOWOLNYM PRZEBIEGU CZASOWYM

Wprowadzenie

Coraz większe ograniczenia czasowe podczas wykonywania projektów obiektów przemysłowych oraz wymagania inwestorów co do możliwości modyfikacji lub rozbudowania układów stawiają przed projektantem nowe wyzwanie - konieczność stosowania konstrukcji wrażliwych na oddziaływania dynamiczne, jakimi są konstrukcje stalowe. To zadanie wymaga stosowania złożonych metod numerycznych, nie zawsze dostatecznie dobrze zweryfikowanych dla złożonych układów konstrukcyjnych, co może pociągać za sobą powstawanie niedopuszczalnych błędów i w konsekwencji awarii lub zniszczenia układu.

Na rynku dostępnych jest wiele programów umożliwiających analizę konstrukcji, w tym analizę dynamiczną. Jednym z najczęściej wykorzystywanych w polskich biurach konstrukcyjnych jest program Autodesk Robot Structural Analysis (ARSA) [1], łączący w sobie narzędzie do analizy statycznej, dynamicznej, wybozeniowej, modalnej i wielu innych oraz modułu służącego kompleksowemu wymiarowaniu konstrukcji na podstawie obowiązujących norm krajowych. Mimo wielu zalet program zawiera również szereg wad oraz częstokroć błędów wpływających na poprawność wyników. Jako przykład można przytoczyć rozważania dotyczące analizy modalnej przedstawione w pracy [2].

W niniejszej pracy dokonano porównania wyników przebiegu drgań prostego układu w postaci pręta wspornikowego dla modelu analitycznego oraz numerycznego. Zaprezentowano dwa przykłady obliczeniowe, pierwszy z wymuszeniem funkcją harmoniczną, drugi z funkcją impulsową.

1. Analityczne oraz numeryczne metody całkowania równań ruchu

Równanie ruchu masy m można zapisać w postaci

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (1)$$

Rozwiązanie równania w przypadku wymuszenia siłą harmoniczną $P(t) = P_0 \sin(pt)$ przedstawiono w pracy [3] przez zastosowanie rachunku operatorów Mikusińskiego:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) \quad (2)$$

gdzie poszczególne człony w równaniu (2) wynoszą

$$q_1(t) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{(1 - \beta^2) \sin(pt) - 2\xi \cos(pt) \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right) \quad (3)$$

$$q_2(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(\frac{P_0}{k} \frac{\beta v_0 + \xi p q_0}{p \sqrt{1 - \xi^2}} \right) \sin(\omega_d t) \quad (4)$$

$$q_3(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(\frac{P_0}{k} \left(\frac{2\xi^2 + \beta^3 - \beta}{\sqrt{1 - \xi^2} \left((1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2 \right)} \right) \right) \sin(\omega_d t) \quad (5)$$

$$q_4(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(\frac{P_0}{k} \left(\frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} + q_0 \right) \cos(\omega_d t) \right) \quad (6)$$

w których k oznacza sztywność układu, $\beta = \frac{p}{\omega_0}$, p to częstość drgań wymuszających, ω_0 to częstość drgań własnych, $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$, ξ - liczba tłumienia, t - czas, v_0 - prędkość początkowa, q_0 - przemieszczenie początkowe.

W przypadku wymuszenia dowolną funkcją czasu, całkę ogólną równania (1) można przedstawić w postaci [4]

$$q(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(\frac{v_0 + \xi\omega_0 q_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + q_0 \cos(\omega_d t) \right) + \int_0^t P(\tau) \frac{1}{\omega_d m} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau \quad (7)$$

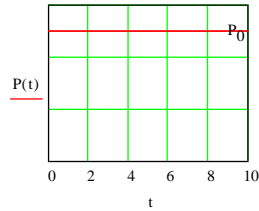
Drugi człon prawej strony równania (7) nosi nazwę całki Duhamela i w zależności od postaci impulsu $P(\tau)$ można ją obliczyć analitycznie lub numerycznie.

Przykładowe formy impulsu przedstawiono na rysunku 1 [5].

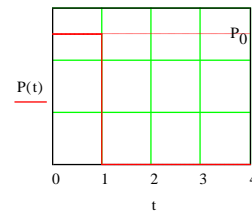
Równanie (1) może być również rozwiązane za pomocą metod numerycznych. Spośród wielu istniejących można wymienić metodę Eulera, metodę różnic skończo-

nych, metody Rungego-Kutty, metodę Newmarka, metodę dekompozycji modalnej oraz metodę Hilbera-Hughesa-Taylora (HHT). Trzy ostatnie zostały zaimplementowane w programie ARSA. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na sposób definiowania tłumienia dla poszczególnych metod. W metodzie dekompozycji modalnej należy wprowadzić liczbę tłumienia dla każdej postaci drgań. W metodzie Newmarka oraz HHT określa się współczynniki proporcjonalności dla macierzy tłumienia (tłumienie Rayleigha), zależne od częstości kołowej oraz liczby tłumienia.

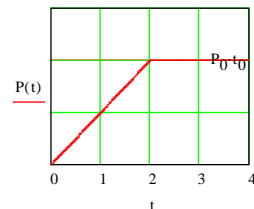
$$P(t) := P_0$$



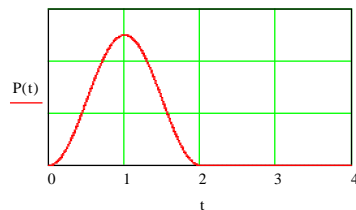
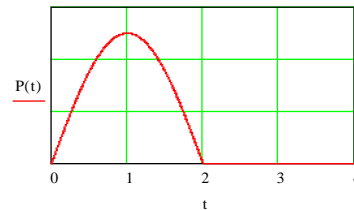
$$P(t) := \begin{cases} P_0 & \text{if } t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$P(t) := \begin{cases} P_0 \cdot t & \text{if } t \leq t_0 \\ P_0 \cdot t_0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$P(t) := \begin{cases} P_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{t_0}\right) & \text{if } t \leq t_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$P(t) := \begin{cases} \frac{P_0}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{t_0}\right)\right) & \text{if } t \leq t_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Rys. 1. Przykłady postaci impulsów

Ze względu na ograniczoną objętość pracy zrezygnowano z omawiania ww. metod. Zainteresowanych czytelników autor odsyła do obszernej literatury [1, 6-8].

2. Analiza numeryczna

Obiektem analizy jest prosty układ w postaci pręta wspornikowego. We wszystkich przykładach przyjęto następujące dane materiałowe oraz geometryczne:

Moduł Younga: $E = 205,0 \text{ GPa}$

Długość pręta: $L = 2,0 \text{ m}$

Profil pręta: IPE 100

Przyśpieszenie ziemskie: $g = 9,807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Prędkość początkowa: $v_0 = 0,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Wychylenie początkowe: $q_0 = 0,0 \text{ m}$

Liczba tłumienia: $\xi = 0,079$

Poniższe przykłady rozpatrują tylko układ o jednym dynamicznym stopniu swobody. Na podstawie wniosków przedstawionych w pracy [2] można stwierdzić, że wyniki uzyskane dla układów o większej liczbie dynamicznych stopni swobody nie będą zgodne z rozwiązaniem analitycznym, jeżeli rozpatrywany kierunek ruchu układu nie będzie odpowiadał pierwszej postaci drgań. Może się tak zdarzyć w przypadku, gdy drugi maksymalny relatywny procent udziału mas odpowiada dalszej postaci drgań.

2.1. Przykład 1 - wymuszenie siłą harmoniczną

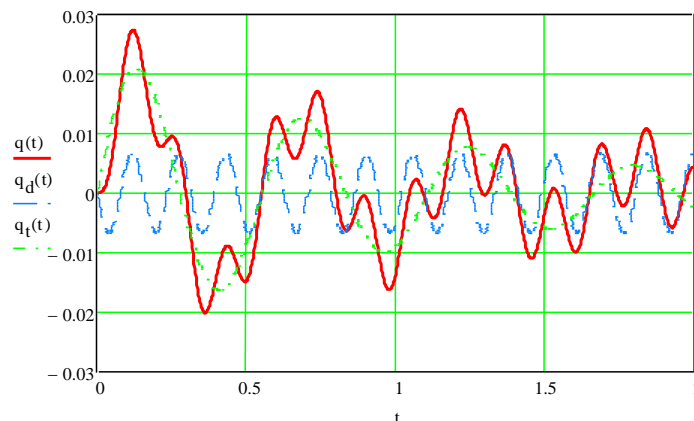
Układ obciążono siłą harmoniczną w postaci $P(t) = P_0 \sin(pt)$.

Do obliczeń przyjęto następujące parametry:

Częstość drgań wymuszających: $p = 40,0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

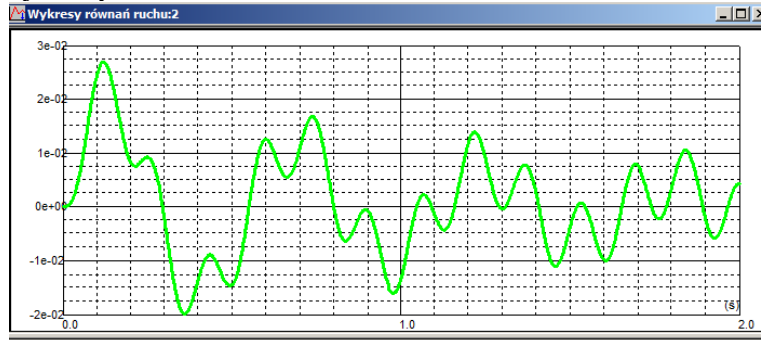
Siła wymuszająca: $P_0 = 10,0 \text{ kN}$

Na rysunku 2 przedstawiono przebieg wychylenia końca wspornika w czasie wyznaczonym z wykorzystaniem rozwiązania (2) (linia ciągła), z wyróżnieniem członu drgań nieustalonych ($q_t(t)$), oraz ustalonych ($q_d(t)$).



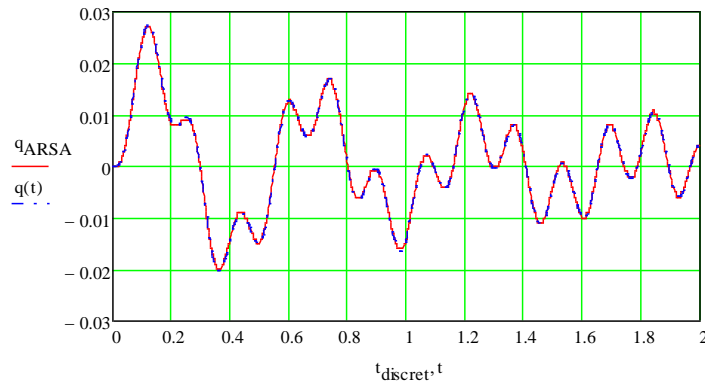
Rys. 2. Funkcja wychylenia końca wspornika od czasu - rozwiązanie analityczne

Analizie poddano wartości funkcji w przedziale czasowym $t \in \langle 0, 2 \rangle$ sekundy. Na rysunku 3 przedstawiono wydruk z programu ARSA, a następnie zestawiono obie funkcje na rysunku 4.

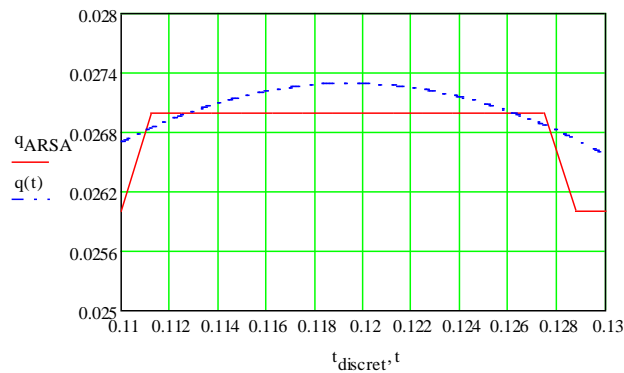


Rys. 3. Funkcja wychYLENIA końca wspornika od czasu - rozwiązanie ARSA

Przeprowadzona analiza wykazała bardzo dobrą zbieżność wyników, co pokazuje rysunek 4.

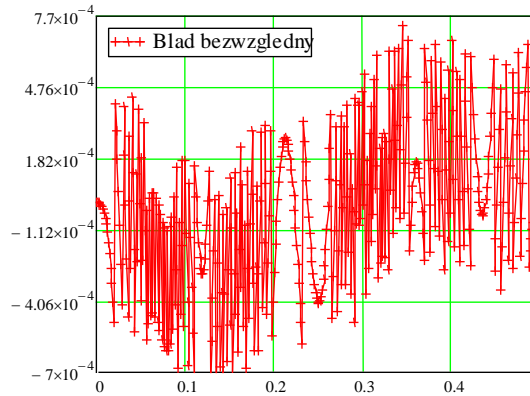


Rys. 4. Porównanie wyników otrzymanych drogą analityczną oraz numeryczną

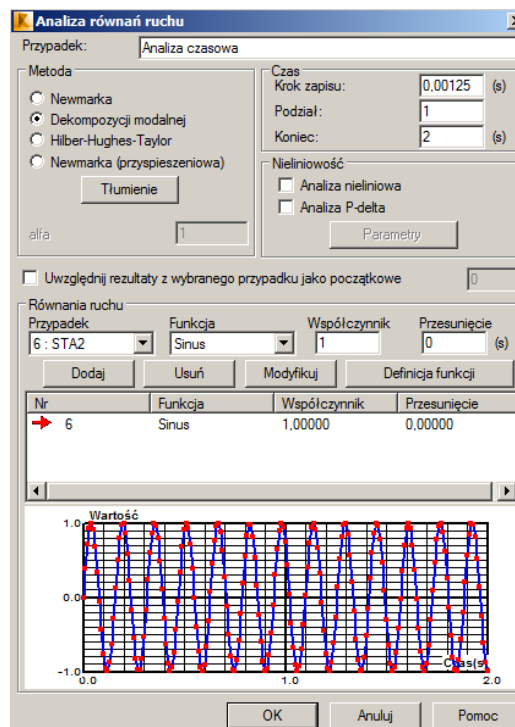


Rys. 5. Błąd generowany przez dyskretyzację funkcji wymuszającej

Porównanie wartości obrazuje powstanie typowego błędu dyskretyzacji (rys. 5), funkcji wymuszającej. Błąd ten zostaje zminimalizowany przy dobraniu dostatecznie małego kroku zapisu w programie ARSA. Na rysunku 6 przedstawiono ekstremalne różnice analizowanych funkcji.



Rys. 6. Funkcja błędu bezwzględnego - przedział z ekstremami

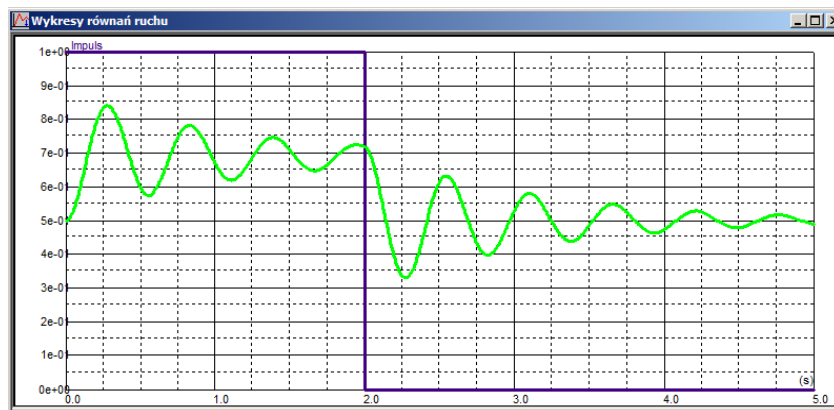


Rys. 7. Postać funkcji wymuszającej wprowadzonej do programu ARSA

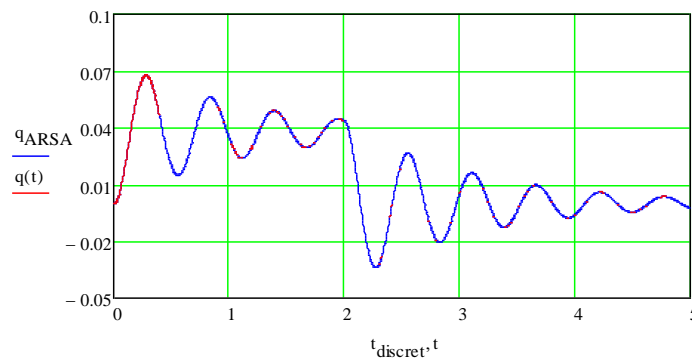
Uzyskanie dobrej zbieżności wiąże się z przyjęciem małego kroku zapisu, co w przypadku np. konstrukcji powłokowych wymagających gęstego podziału siatki elementów skończonych prowadzi do czasochłonnych obliczeń. Ponadto pliki obliczeniowe generowane przez program mogą osiągać rozmiar nawet kilkunastu gigabajtów. Na rysunku 7 przedstawiono okno programu z wprowadzoną funkcją wymuszającą.

2.2. Przykład 2 - wymuszenie siłą impulsową

Układ obciążono siłą impulsową (impuls prostokątny - rys. 8) $P(\tau) = 5,0 \text{ kN}$, w przedziale $t \in \langle 0, 2 \rangle$ oraz $P(\tau) = 0,0 \text{ kN}$ w przedziale $t \in \langle 2, 5 \rangle$. Na rysunku przedstawiono wydruk z programu ARSA. Przeprowadzona analiza wykazała doskonałą zbieżność wyników ze względu na przyjęcie bardzo małego kroku czasowego (1000 kroków zapisu). Zestawienie wyników obliczeń analitycznych oraz numerycznych zobrazowano na rysunku 9.

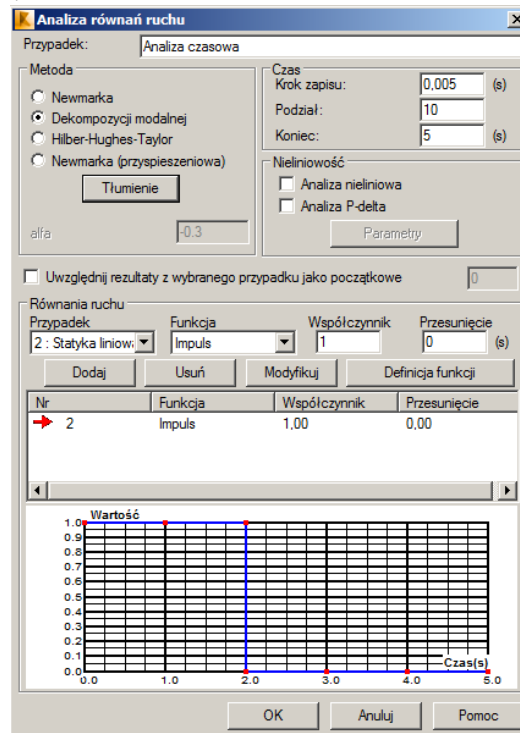


Rys. 8. Funkcja wychYLENIA końca wspornika od czasu oraz postać impulsu - rozwiązanie ARSA



Rys. 9. Porównanie wyników otrzymanych drogą analityczną oraz numeryczną

Na rysunku 10, podobnie jak w przykładzie 1, przedstawiono okno programu ARSA z wprowadzoną funkcją wymuszającą oraz parametrami użytymi do obliczeń numerycznych.



Rys. 10. Postać impulsu wprowadzonego do programu ARSA

Podsumowanie

Przeprowadzona analiza wykazała bardzo dobrą zbieżność wyników dokonanych analitycznie oraz za pomocą programu do obliczeń numerycznych metodą elementów skończonych Autodesk Robot Structural Analysis. Przyczyną powstawania błędów okazał się sposób dyskretyzacji funkcji wejściowej, co można zminimalizować przez przyjęcie odpowiednio małego kroku zapisu.

Literatura

- [1] Autodesk Robot Structural Analysis - Podręcznik użytkownika.
- [2] Kubicki K., Drgania własne układów ramowych i ich modelowanie w programie Autodesk Robot Structural Analysis, ZN Politechniki Częstochowskiej 2012 nr 168, Budownictwo 18, 88-96.
- [3] Poński M., Zastosowanie rachunku operatorów Mikusińskiego w pewnych zagadnieniach dynamiki konstrukcji, ZN Politechniki Częstochowskiej 2012 nr 168, Budownictwo 18, 211-217.
- [4] Chmielewski T., Zembaty Z., Podstawy dynamiki budowli, Arkady, Warszawa 1998.
- [5] Lipiński J., Fundamenty pod maszyny, Arkady, Warszawa 1985.

- [6] Lewandowski R., *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2006.
- [7] Lewandowski R., *Redukcja drgań konstrukcji budowlanych*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2014.
- [8] Bathe J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1982.

Streszczenie

W pracy przedstawiono porównanie wyników obliczeń analitycznych oraz numerycznych przebiegu drgań prostej konstrukcji prętowej. Do obliczeń numerycznych wykorzystano program Autodesk Robot Structural Analysis.

Response analysis of structural systems excited by force with any time function

Abstract

In the paper comparison of analytical and numerical time history calculations of a simple bar structure was presented. Autodesk Robot Structural Analysis for the numerical calculations was used.