

OPTYMALNA LOKALIZACJA STATYCZNYCH URZĄDZEŃ MONITORUJĄCYCH RUCH W MIEŚCIE¹

Renata Żochowska

dr inż., Politechnika Śląska, ul. Krasińskiego 8, 40-019
Katowice, tel.: +48 32 603 4121, e-mail: renata.zochowska@polsl.pl

Aleksander Sobota

dr inż., Politechnika Śląska, ul. Krasińskiego 8, 40-019
Katowice, tel.: +48 32 603 4121, e-mail: aleksander.sobota@polsl.pl

Grzegorz Karoń

dr inż., Politechnika Śląska, ul. Krasińskiego 8, 40-019
Katowice, tel.: +48 32 603 4159, e-mail: grzegorz.karon@polsl.pl

***Streszczenie.** Zastosowanie nowoczesnych technologii w analizach ruchu drogowego pozwala na uzyskanie coraz bardziej dokładnego odwzorowania przemieszczeń w sieci transportowej. Jest to szczególnie istotne w zarządzaniu i sterowaniu ruchem, gdzie podejmowanie szybkich decyzji w warunkach występowania różnego rodzaju zdarzeń (np. wypadki i kolizje drogowe, awarie urządzeń technicznych zlokalizowanych w pasie drogowym, itp.) wpływa na jakość funkcjonowania całego systemu transportowego miasta. Uzyskanie wiarygodnych wyników warunkowane jest zarówno odpowiednim doбором parametrów charakteryzujących ruch, jak i właściwą lokalizacją urządzeń rejestrujących te parametry. Oczwistym jest, że najlepsze wyniki otrzymuje się w przypadku zamontowania takich urządzeń w każdym miejscu, gdzie następuje rozptył potoków ruchu. Rozwiązanie to jednak wiąże się ze znacznymi nakładami finansowymi. W związku z tym często poszukuje się takich miejsc w sieci, w których monitorowanie ruchu przyniosłoby najlepsze wyniki z punktu widzenia dokładności odwzorowania ruchu przy jednoczesnej minimalizacji kosztów.*

***Słowa kluczowe:** optymalna lokalizacja punktów pomiarowych, macierz O-D, rozłożenie potoków ruchu w sieci transportowej*

1. Wprowadzenie

Optymalizacja rozmieszczenia punktów pomiarowych w sieci transportowej miasta jest bardzo ważnym zagadnieniem wykorzystywanym między innymi w dynamicznym wyznaczaniu macierzy podróży (macierzy O-D) [2,3,20] oraz kalibracji modelu transportowego [9,16]. Wyznaczanie macierzy podróży w sposób dynamiczny wymaga właściwej identyfikacji natężeń ruchu w kolejnych przedziałach czasu. Takie podejście, wykorzystywane między innymi w zarządzaniu ruchem na poziomie taktycznym i operacyjnym [10], wymaga budowania krótkoterminowych prognoz ruchu opartych na znajomości macierzy podróży w poszczególnych przedziałach czasu. Jakość wyznaczanej macierzy O-D jest w znacznym stopniu

1 Wkład autorów w publikację: Żochowska R. 34%, Sobota A. 33%, Karoń G. 33%

uzależniona od jakości i ilości wprowadzanych danych, co z kolei jest uwarunkowane liczbą punktów pomiarowych w sieci. W dobie stosowania inteligentnych systemów transportowych (ITS) dane o natężeniu ruchu stają się coraz bardziej dostępne [11]. W związku z tym budowanie macierzy podróży na ich podstawie stanowi znacznie tańszy sposób pozyskiwania wiedzy o rozkładzie przestrzennym ruchu niż w przypadku wykorzystania metod klasycznych [23].

Należy przy tym mieć zawsze na uwadze dokładność odwzorowania ruchu w tak dużych i złożonych modelach, jakimi są modele transportowe, czyli modele, w których macierz O-D wyznaczana jest na etapie pierwszym modelowania, tj. na etapie generacji ruchu i zawiera wartości źródłowe dla ostatniego etapu modelowania, tj. etapu rozkładu potoków na sieć transportową [9]. Jest to odwzorowanie procesu transportowego poczynając od potrzeb transportowych, których zwymiarowaną strukturą czasoprzestrzenną jest macierz O-D a skończywszy na ruchu pojazdów w sieci transportowej, których zwymiarowaną strukturą czasoprzestrzenną jest rozkład potoków ruchu pojazdów na poszczególnych odcinkach w określonym czasie. Biorąc pod uwagę różnorodność metod modelowania tych zjawisk oraz różnorodność źródeł oraz technik zbierania i przetwarzania danych, należy mieć świadomość występowania określonych błędów [23] i związanej z nimi dokładności wyników odwzorowania procesu transportowego – na wymienionych dwóch etapach, a także na etapie pośrednim – etapie podziału zadań przewozowych (etapie podziału modalnego). Dlatego przedstawiona w opracowaniu metoda odwzorowania macierzy O-D na podstawie obserwacji natężeń ruchu pojazdów w sieci (w określonych relacjach i na określonych drogach) daje w wynikach wartości przybliżone (nawet w przypadku wykorzystania do identyfikacji tras przejazdu kamer ANPR – *automatic number plate recognition*) – tym bardziej, że odwzorowanie procesu transportowego w tej metodzie jest „w przeciwnym kierunku” do natury zjawiska, tj. „w kierunku” od potoku ruchu do potrzeby transportowej, która go wywołała. Mimo tego, po implementacji metody w rzeczywistych lub symulowanych miejskich systemach transportowych, może okazać się, iż otrzymywane wartości są wystarczająco dokładne do zwiększenia skuteczności systemów sterowania ruchem.

Kluczowym problemem w procesie optymalizacyjnym jest identyfikacja zbioru odcinków, na których należy przeprowadzić pomiary dające informację o wielkości potoków ruchu. Główne zadanie optymalizacyjne sprowadza się do wyznaczenia takich miejsc pomiarowych, które z jednej strony zapewnią odpowiednią jakość danych wejściowych, a z drugiej strony zminimalizują ich redundancję. W literaturze przedmiotu można znaleźć niewielką liczbą publikacji naukowych na ten temat. Lam i Lo [12] zaproponowali pewne heurystyczne procedury umożliwiające określenie kolejności doboru odcinków dla potrzeb wyznaczania macierzy podróży. Natomiast w pracy [17] badano wiarygodność estymowanej macierzy O-D z punktu widzenia liczby i lokalizacji punktów pomiarowych w sieci. Jako miarę zgodności wartości estymowanych z wartościami pierwotnymi macierzy O-D wykorzystano wartość względnego błędu średniokwadratowego. Kontynuując prace w tym zakresie Yang i Zhou opracowali metody wyznaczania optymalnej lokaliza-

cji i liczby punktów pomiarowych dla dwóch różnych przypadków [18]. Pierwszy z nich dotyczy sytuacji, kiedy określona jest struktura składowych potoku ruchu, a drugi zakłada, że znany jest tylko wstępny rozkład potoków ruchu przy zakładanej (z pewnym prawdopodobieństwem) strukturze kierunkowej ruchu w węzłach sieci transportowej. Do określenia minimalnej liczby punktów pomiarowych w celu ustalenia tego rozkładu autorzy wykorzystują metodę całkowitoliczbowego programowania liniowego [18]. Do ustalenia rozłożenia potoków ruchu w sieci przy znanych prawdopodobieństwach rozkładu kierunkowego w węzłach, dla potrzeb szacowania wiarygodnej macierzy O-D, można również wykorzystać dwustopniową procedurę iteracyjną [1]. Przy takim podejściu lokalizacja punktów pomiarowych zależy jedynie od struktury sieci.

W kolejnych pracach problem lokalizacji punktów pomiarowych w sieci (*ang. NCLP - network count location problem*) został rozszerzony o dwa zagadnienia szczególnie istotne z praktycznego punktu widzenia. W jednym z nich założono, że w sieci zlokalizowane są już pewne miejsca pomiarowe, a proponowana metoda sprowadza się do poszerzenia istniejącego zbioru tych punktów [6]. Prowadzi to do sformułowania nowego problemu optymalizacyjnego. Inne podejście zastosowali autorzy referatu [14], gdzie do wyznaczenia optymalnej lokalizacji punktów pomiarowych zastosowano symulacyjną metodę doboru podzbioru potencjalnych odcinków, na których będą zlokalizowane urządzenia rejestrujące, przy jednoczesnym wykorzystaniu równań zachowania potoku. Metoda ta jest szczegółowo omówiona w artykule [4]. Natomiast w pracy [15] do wyznaczenia optymalnej lokalizacji punktów pomiarowych wykorzystano syntetyczną miarę dyspersji wyznaczonej macierzy O-D. W przeciwieństwie do wcześniej stosowanych metod, w których wykorzystywano miary oparte na dokładności obliczonej macierzy O-D w stosunku do macierzy pierwotnej (maksymalizacja dokładności), w tym podejściu wykorzystuje się miary zmienności tej macierzy (minimalizacja dyspersji).

W większości dużych miast powszechne jest przeprowadzenie badań ruchu w punktach kordonowych i ekranowych. Takie badania można również wykorzystać przy określaniu optymalnej lokalizacji punktów pomiarowych. Jednak problem ten nie był zbyt często przedstawiany w literaturze [19]. Jedne z pierwszych prób wykorzystania badań w punktach ekranowych przedstawiono w publikacji [7], gdzie rozwinięto modele nieliniowego programowania całkowitoliczbowego i zastosowano heurystyczny algorytm genetyczny do rozwiązania dwóch powiązanych ze sobą problemów lokalizacji punktów pomiarowych. Pierwszy z nich dotyczył sposobu, w jaki należy zlokalizować określoną liczbę punktów pomiarowych, aby wydzielić jak największą liczbę par O-D, drugi – sposobu określenia minimalnej liczby lokalizacji punktów pomiarowych wymaganych do wydzielenia wszystkich par O-D w sieci. Wyniki dalszych prac nad wykorzystaniem punktów ekranowych przedstawiono w [19], gdzie wykorzystano algorytmy najkrótszych ścieżek oraz technikę podziału i ograniczeń do uzyskania optymalnej lokalizacji punktów pomiarowych.

2. Formalizacja zagadnienia

2.1. Założenia modelu

Oczywistym jest, że nie wszystkie odcinki w sieci drogowej dają dostateczną informację o strukturze ruchu, niezbędną do wyznaczania macierzy O-D. W pracy [18] sformułowano następujące podstawowe zasady doboru odcinków:

Zasada 1 (*O-D covering rule*) – punkty pomiarowe powinny być zlokalizowane w taki sposób, aby pewna część potoku pomiędzy każdą parą O-D była pomierzona. Oznacza to, że każda relacja podróży powinna być pomierzona przynajmniej w jednym punkcie.

Zasada 2 (*maximal flow fraction rule*) – dla każdej pary O-D należy wybierać odcinki z największym udziałem wielkości potoku dla tej pary. Oznacza to, że dla każdej relacji podróży należy poszukiwać takich odcinków, dla których udział potoku danej relacji jest największy w stosunku do innych relacji na tym odcinku – odcinki z dominującą relacją podróży (dla określonej pary O-D).

Zasada 3 (*maximal flow intercepting rule*) – należy wybierać taki zbiór odcinków, które zawierają jak największą liczbę składowych potoku ruchu. Oznacza to, że wybierane są odcinki wykorzystywane przez jak największą liczbę relacji podróży – odcinki z ruchem dominującym.

Zasada 4 (*link independence rule*) – należy wybierać odcinki, dla których potoki są liniowo niezależne. Oznacza to, że należy dążyć do zbudowania takiego układu równań zachowania potoku, aby były one liniowo niezależne – odcinki bez potoków o wspólnych relacjach.

Ponadto przyjęto następujące założenia:

Założenie 1 – znana jest struktura rozkładu potoków ruchu w sieci. Oznacza to, że znany jest udział procentowy wielkości potoku w określonej relacji O-D na danym odcinku. Takie dane można uzyskać na podstawie zbudowanego wcześniej modelu transportowego dla badanego miasta.

Założenie 2 – natężenie jest mierzone „metodą dokładną”, tzn. taką która nie dopuszcza szacowania wartości ale zlicza „dokładną” liczbę pojazdów – oczywiście z uwzględnieniem określonego błędu urządzenia pomiarowego oraz błędu metody pomiarowej. Określenie „metoda dokładna” jest w aspekcie technicznym pewnym wyidealizowaniem rzeczywistości, nawet biorąc pod uwagę ciągły rozwój technologii w zakresie udoskonalania urządzeń pomiarowych. Chodzi bowiem o identyfikację natężenia ruchu poprzez pomiar wartości dyskretnej (zliczanie pojazdów w określonym przedziale czasu) a nie szacowanie tej wartości metodami wykorzystującymi estymację wyników.

2.2. Model matematyczny

Struktura przestrzenna analizowanego miasta pod względem ruchotwórczym przedstawiana jest najczęściej w postaci zbioru mniejszych jednostek osadniczych, wydzielonych na jego terenie, zwanych rejonami transportowymi. Dla uproszczenia przyjmuje się założenie, że wszystkie czynniki ruchotwórcze skoncentrowane są w jednym punkcie w przestrzeni, który nazywany jest węzłem ciężenia i znajduje się w środku ciężkości (centroidzie) każdego rejonu. Stanowi on miejsce generowania potrzeb transportowych. Natomiast struktura sieci transportowej miasta może być opisana z wykorzystaniem teorii grafów [5,8,13,21, 2] jako:

$$\mathbf{G} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{L} \rangle \quad (1)$$

gdzie:

- \mathbf{W} -zbiór numerów wierzchołków grafu \mathbf{G} , będący odwzorowaniem zbioru wszystkich węzłów sieci transportowej, tj.: $\mathbf{W} = \{w : w = 1, \dots, \bar{W}\}$, gdzie \bar{W} oznacza liczebność zbioru \mathbf{W} ;
- \mathbf{L} - zbiór łuków grafu \mathbf{G} , będący odwzorowaniem zbioru połączeń między wierzchołkami grafu, tj. $\mathbf{L} = \{(w, w') : (w, w') \in \mathbf{W} \times \mathbf{W}, w \neq w'\}$.

Zbiór numerów wierzchołków \mathbf{W} można zdekomponować w zależności od roli, jaką pełnią w przepływie potoku ruchu na trzy parami rozłączne podzbiory [8]:

- \mathbf{A} - zbiór numerów wierzchołków, stanowiących odwzorowania węzłów ciężenia rejonów transportowych, w których powstają potoki ruchu (miejsca początkowe przemieszczeń, źródła potoku ruchu, punkty nadania), tj. $\mathbf{A} = \{a : a \in \mathbf{W}\}$,
- \mathbf{B} - zbiór numerów wierzchołków, stanowiących odwzorowania węzłów ciężenia rejonów transportowych, w których potoki ruchu zanikają (miejsca końcowe/docelowe przemieszczeń, ujścia potoku ruchu, punkty przeznaczenia/odbioru), tj. $\mathbf{B} = \{b : b \in \mathbf{W}\}$,
- \mathbf{V} - zbiór numerów wierzchołków pośrednich, stanowiących odwzorowania węzłów sieci transportowej, tj. $\mathbf{V} = \{v : v, v' \in \mathbf{W}; v \neq v'\}$.

Zbiory te są parami rozłączne, tzn.:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{V} = \emptyset, \quad \mathbf{B} \cap \mathbf{V} = \emptyset, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset.$$

Pomiędzy wierzchołkami $v \in \mathbf{V}$ występują połączenia odpowiadające rzeczywistym odcinkom sieci transportowej miasta, na których potencjalnie można розміścić urządzenia pomiarowe. Zbiór łuków, będący odwzorowaniem zbioru połączeń między wierzchołkami pośrednimi można opisać jako:

$$\mathbf{LV} = \{(v, v') : (v, v') \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}, v \neq v'\} \quad (2)$$

przy czym: $\mathbf{LV} \subset \mathbf{L}$. Zbiór odcinków, na których zlokalizowane są urządzenia pomiarowe, oznaczono jako \mathbf{LV}^* ($\mathbf{LV}^* \subset \mathbf{LV}$).

Następnie określono zbiór relacji podróży (parO-D), tj. $\mathbf{E} = \{(a, b) : (a, b) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}\}$ [8], opisujących związek pomiędzy poszczególnymi węzłami będącymi źródłami potoków ruchu a węzłami stanowiącymi ujście potoków ruchu. Ponadto przyjęto założenie, że dla każdej relacji $(a, b) \in \mathbf{E}$ istnieje przynajmniej jedna droga prosta o numerze p łącząca wyróżnione wierzchołki, rozumiana jako sekwencja nie powtarzających się odcinków, przez które kolejno przemieszcza się potok ruchu. W teorii grafów z sekwencją wierzchołków lub odcinków tworzących drogę (ścieżkę) w grafie związane jest pojęcie długości drogi, która może być określona przez podanie liczby wierzchołków lub liczby łuków. Uwzględniając metryczne długości łuków można w ten sposób wyznaczyć długość metryczną drogi. Prezentowana w opracowaniu metoda oparta jest na analizie natężeń na odcinkach, więc długości odcinków oraz długości dróg nie są uwzględniane. Jednak inny wariant analizy – wykorzystujący w kryterium gęstość potoku (kongestię) – wymaga modyfikacji algorytmu i wykorzystania danych dotyczących długości dróg oraz liczby pojazdów na odcinkach składowych. Drogę, o której mowa opisano jako:

$$\vartheta(p) = \langle (a, v), (v, \dots), \dots, (\dots, v'), (v', b) \rangle, \text{ gdzie } a \in \mathbf{A}, v, \dots, v' \in \mathbf{V}, b \in \mathbf{B}. \quad (3)$$

Zbiór numerów wszystkich dróg w sieci transportowej miasta można opisać jako:

$$\mathbf{P} = \{p : p = 1, \dots, \bar{P}\} \quad (4)$$

gdzie \bar{P} oznacza liczebność zbioru \mathbf{P} (liczbę wszystkich dróg w sieci transportowej). Zbiór \mathbf{P} można zdekomponować na podzbiory $\mathbf{P}^{(a,b)}$ zawierające numery dróg dla każdej z relacji $(a, b) \in \mathbf{E}$, tj.: $\mathbf{P}^{(a,b)} = \{p : p \in \mathbf{P}\}$, $(a, b) \in \mathbf{E}$, przy czym $\mathbf{P} = \bigcup_{(a,b) \in \mathbf{E}} \mathbf{P}^{(a,b)}$.

Zbiór łuków, odpowiadających odcinkom sieci transportowej, wykorzystywanym przez drogę o numerze p można zapisać jako:

$$LV^p = \{(v, v') : (v, v') \subset \vartheta(p), (v, v') \in LV\}, \quad p \in \mathbf{P} \quad (5)$$

Dla odwzorowania potoku ruchu przyjęto następujące oznaczenia:

$x^{(a,b)}$ - rzeczywista wielkość potoku ruchu w relacji $(a, b) \in \mathbf{E}$,

$\tilde{x}^{(a,b)}$ - szacowana wielkość potoku ruchu w relacji $(a, b) \in \mathbf{E}$,

x^p - przybliżona wielkość potoku ruchu na drodze o numerze $p \in \mathbf{P}$,

$x_{(v,v')}^p$ - składowa (część) potoku ruchu na odcinku odwzorowanym łukiem $(v, v') \in LV$, odpowiadająca wielkości potoku ruchu na drodze o numerze $p \in P$,

$x_{(v,v')}$ - rzeczywista wielkość potoku ruchu na odcinku odwzorowanym łukiem $(v, v') \in LV$,

$\hat{x}_{(v,v')}$ - zmierzona wielkość potoku ruchu na odcinku odwzorowanym łukiem $(v, v') \in LV^*$,

$x_{(v,v')}^{(a,b)}$ - rzeczywista wielkość potoku ruchu w relacji $(a, b) \in E$ obciążająca odcinek odwzorowany łukiem $(v, v') \in LV$.

Dla celów praktycznych wielkość potoku ruchu wyrażana jest w jednostkach przewozowych (pojazdach) zmierzonych w określonym czasie, np. 1 godziny, 1 doby albo krótszych interwałów (np. na potrzeby sterowania potokami w podsystemach ITS [11]).

Przyjęto dwa zasadnicze kryteria zadania optymalizacyjnego [18]:

- kryterium 1 - minimalizacja liczby punktów pomiarowych w sieci (funkcja f_1),
- kryterium 2 - maksymalizacja wielkości zmierzonych potoków ruchu (funkcja f_2).

Przy formułowaniu zadania optymalizacyjnego wprowadzono dodatkowe zmienne binarne. W tym celu przyjęto następujące założenia:

- na iloczynie kartezjańskim $V \times V$ zadane jest odwzorowanie z przeprowadzające elementy tego iloczynu w zbiór $\{0, 1\}$, tj.:

$$z : V \times V \longrightarrow \{0, 1\} \quad (6)$$

przy czym $z_{(v,v')} = 1$, jeżeli punkt pomiarowy zlokalizowany jest na odcinku odwzorowanym łukiem (v, v') , w przeciwnym przypadku $z_{(v,v')} = 0$.

- na zbiorze P numerów wszystkich dróg w sieci transportowej miasta zadane jest odwzorowanie y przeprowadzające elementy tego zbioru w zbiór $\{0, 1\}$, tj.:

$$y : P \longrightarrow \{0, 1\} \quad (7)$$

przy czym $y^p = 1$, jeżeli na drodze o numerze p zlokalizowany jest przynajmniej jeden punkt pomiarowy, w przeciwnym przypadku $y^p = 0$.

- na iloczynie kartezjańskim $E \times L$ zadane jest odwzorowanie δ przeprowadzające elementy tego iloczynu w zbiór $\{0, 1\}$, tj.:

$$\delta : E \times L \longrightarrow \{0, 1\} \quad (8)$$

przy czym $\delta_{(v,v')}^{(a,b)} = 1$, jeżeli odcinek odwzorowany łukiem $(v, v') \in LV$ wykorzystywany jest przynajmniej przez jedną z dróg w relacji $(a, b) \in E$, w przeciwnym przypadku $\delta_{(v,v')}^{(a,b)} = 0$.

Kryterium minimalizacji liczby punktów pomiarowych w sieci może być wtedy sformułowane jako:

$$f_1 = \sum_{(v,v') \in V} z_{(v,v')} \longleftarrow \min \quad (9)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{(v,v') \in V} \delta_{(v,v')}^{(a,b)} \cdot z_{(v,v')} \geq 1, \quad (a, b) \in E, \quad z_{(v,v')} \in \{0, 1\}, \quad (v, v') \in LV.$$

Natomiast kryterium maksymalizacji wielkości zaobserwowanych (zmierzonych) potoków ruchu można zdefiniować jako:

$$f_2 = \sum_{p \in P} x^p \cdot y^p \longleftarrow \max \quad (10)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{(v,v') \in V} z_{(v,v')} = \overline{LV}^*, \quad \sum_{(v,v') \in \delta(p)} z_{(v,v')} \geq y^p, \quad p \in P, \quad \sum_{(v,v') \in V} \delta_{(v,v')}^{(a,b)} \cdot z_{(v,v')} \geq 1, \quad (a, b) \in E,$$

$$z_{(v,v')} \in \{0, 1\}, \quad y^p \in \{0, 1\}, \quad (v, v') \in LV.$$

przy czym \overline{LV}^* oznacza liczebność zbioru LV^* , czyli liczbę odcinków, na których zlokalizowano urządzenia pomiarowe.

Jeżeli na podstawie tych kryteriów uzyska się kilka rozwiązań o jednakowej liczbie punktów pomiarowych oraz tej samej wielkości zaobserwowanych (zmierzonych) potoków, to dodatkowym kryterium decydującym o wyborze najlepszego rozwiązania może być **minimalizacja błędu otrzymanego rozwiązania**. Warunkiem wykorzystania tego kryterium jest znajomość macierzy podróży wyznaczonej dla wcześniejszego przedziału czasu (tzw. macierzy pierwotnej). Jako miarę błędu otrzymanego rozwiązania można przyjąć wskaźnik wiarygodności, wyrażający maksymalne możliwe odchylenie względne estymowanej macierzy od macierzy wcześniej określonej (pierwotnej) [17]. Przyjęto więc kolejne kryterium wyboru najlepszego rozmieszczenia urządzeń pomiarowych w postaci:

$$f_3 = \max \left\{ \sqrt{\frac{\sum_{(a,b) \in E} (\lambda^{(a,b)})^2}{E}} \right\} \longleftarrow \min \quad (11)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{(a,b) \in E} \beta_{(v,v')}^{(a,b)} \cdot \tilde{x}^{(a,b)} \cdot \lambda^{(a,b)} = 0, \quad (v, v') \in LV^*,$$

przy czym \bar{E} oznacza liczebność zbioru relacji E , czyli liczbę wszystkich par O-D.

Ponadto $\lambda^{(a,b)}$ oznacza względne odchylenie szacowanej wartości elementu macierzy O-D od wartości rzeczywistej (np. wyznaczonej na podstawie macierzy pierwotnej), tj.

$$\lambda^{(a,b)} = \frac{\tilde{x}^{(a,b)} - x^{(a,b)}}{x^{(a,b)}}, \quad x^{(a,b)} \geq 0 \quad (12)$$

natomiast $\beta_{(v,v')}^{(a,b)}$ odpowiada składowej (części) potoku w relacji $(a,b) \in E$, która obciąża drogi zawierające odcinek odwzorowany łukiem $(v, v') \in LV^*$, tj.

$$\beta_{(v,v')}^{(a,b)} = \frac{x_{(v,v')}^{(a,b)}}{x^{(a,b)}}, \quad x^{(a,b)} \geq 0 \quad (13)$$

2.3. Algorytm metody

Jeżeli znana jest pierwotna macierz podróży, to przybliżoną wielkość potoku ruchu x^p na poszczególnych drogach o numerach $p \in P$ można otrzymać wykorzystując do tego odpowiednią metodę rozłożenia potoków ruchu na sieć transportową. Oczywistym jest, że wielkość potoku x^p na określonej drodze p jest jednakowa dla wszystkich odcinków należących do tej drogi, tj.:

$$x_{(v,v')}^p = x^p, \quad (v, v') \in LV^p \quad (14)$$

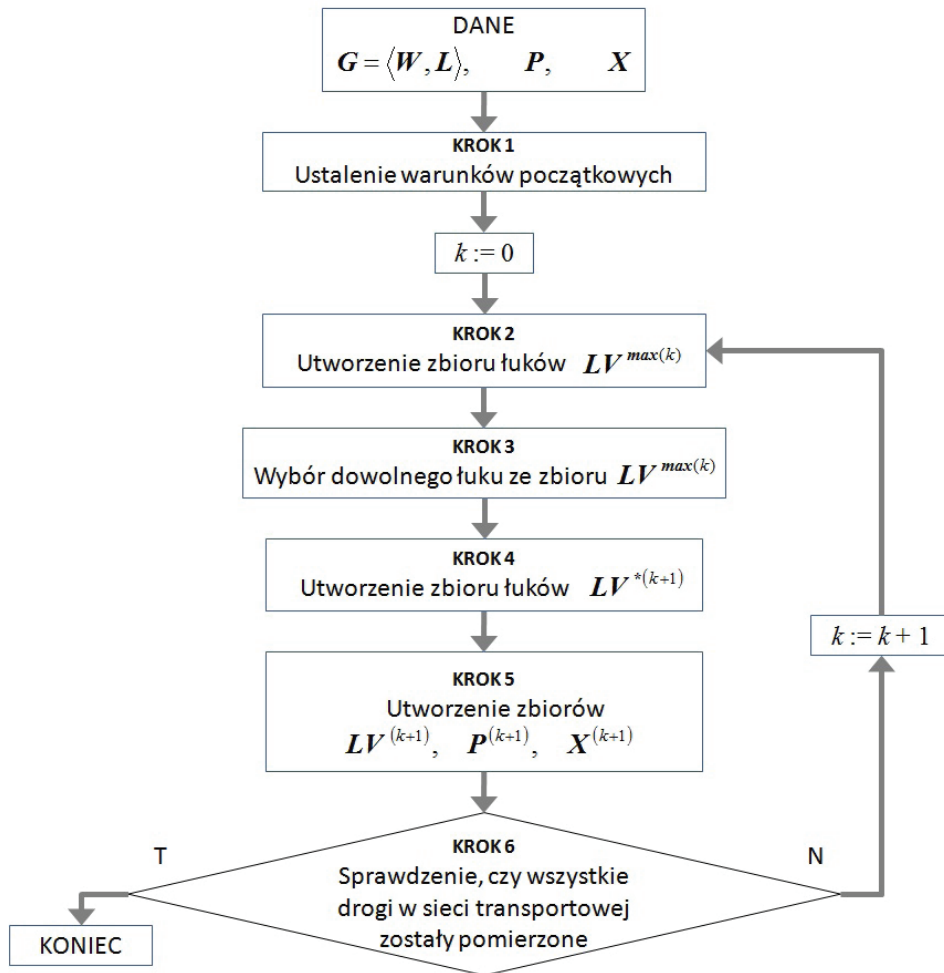
Jednocześnie $x_{(v,v')}^p$ oznacza składową potoku ruchu na odcinku odwzorowanym łukiem $(v, v') \in LV$, tj.:

$$x_{(v,v')} = \sum_{p \in P} x_{(v,v')}^p, \quad (v, v') \in LV \quad (15)$$

Zbiór wszystkich składowych można więc opisać jako:

$$X = \{x_{(v,v')}^p : (v, v') \in LV, p \in P\} \quad (16)$$

Proponowany algorytm heurystyczny ma charakter iteracyjny, co przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Algorytm wyboru lokalizacji punktów pomiarowych
Źródło: opracowanie własne

Zbiór numerów iteracji oznaczono jako $\mathbf{K} = \{k : k = 0, \dots, \bar{K} - 1\}$, gdzie \bar{K} oznacza liczebność zbioru \mathbf{K} . Dla każdej k -tej iteracji budowane są następujące zbiory:

- zbiór łuków, odpowiadających odcinkom sieci transportowej miasta, opisany jako:

$$LV^{(k)} = \{(v, v') : (v, v') \in LV\}, \quad k \in \mathbf{K} \quad (17)$$

- zbiór łuków, odpowiadających odcinkom, na których należy umieścić urządzenia pomiarowe, opisany jako:

$$LV^{*(k)} = \{(v, v') : (v, v') \in LV^{(k-1)}\}, \quad k \in \mathbf{K} \quad (18)$$

- zbiór numerów dróg opisany jako:

$$\mathbf{P}^{(k)} = \{p : p \in \mathbf{P}\}, \quad k \in \mathbf{K} \quad (19)$$

- zbiór składowych potoku ruchu opisany jako:

$$\mathbf{X}^{(k)} = \{x_{(v,v')}^p : (v, v') \in \mathbf{LV}^{(k)}, p \in \mathbf{P}^{(k)}\} \quad k \in \mathbf{K} \quad (20)$$

- zbiór łuków, odpowiadających odcinkom o największych natężeniach ruchu, opisany jako:

$$\mathbf{LV}^{max(k)} = \left\{ (v, v')^* : x_{(v,v')}^* = \max_{(v,v') \in \mathbf{LV}^{(k)}} \{x_{(v,v')}\} \right\}, \quad k \in \mathbf{K} \quad (21)$$

gdzie

$$x_{(v,v')} = \sum_{p \in \mathbf{P}^{(k)}} x_{(v,v')}^p, \quad x_{(v,v')}^p \in \mathbf{X}^{(k)}$$

Danymi wejściowymi dla opracowanego algorytmu są:

- struktura sieci opisana grafem $\mathbf{G} = \langle \mathbf{W}, \mathbf{L} \rangle$,
- zbiór numerów dróg w sieci transportowej opisany jako \mathbf{P} ,
- struktura potoku ruchu opisana zbiorem \mathbf{X} .

Poszczególne kroki algorytmu można opisać następująco:

Krok 1. Ustalenie warunków początkowych

Przyjęto następujące warunki początkowe dla zbiorów zdefiniowanych wzorami (17)-(20):

$$\mathbf{LV}^{(0)} = \mathbf{LV}, \quad \mathbf{LV}^{*(0)} = \emptyset, \quad \mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X},$$

Krok 2. Utworzenie zbioru łuków $\mathbf{LV}^{max(k)}$

Sposób wyznaczania zbioru $\mathbf{LV}^{max(k)}$ opisany jest wzorem (21). Zbiór ten jest jednoelementowy, jednak w niektórych przypadkach może się zdarzyć, że wartości maksymalne (jednakowe) będą odpowiadać kilku odcinkom. Wtedy wszystkie te odcinki będą należały do zbioru $\mathbf{LV}^{max(k)}$.

Krok 3. Wybór dowolnego łuku ze zbioru $\mathbf{LV}^{max(k)}$

Z punktu widzenia kryterium 2 (10) nie jest istotne, który z odcinków $(v, v')^* \in \mathbf{LV}^{max(k)}$ zostanie wybrany. Jednak na tym etapie nie można jednoznacznie określić, jak to może wpłynąć na dalszy wybór kolejnych odcinków, na których powinny być rozmieszczone urządzenia pomiarowe.

Krok 4. Utworzenie zbioru łuków $\mathbf{LV}^{*(k+1)}$

Zbiór ten jest sukcesywnie uzupełniany łukami, odpowiadającymi odcinkom, na których powinny być zlokalizowane punkty pomiarowe.

$$LV^{*(k+1)} = LV^{*(k)} \cup \{(v, v')^*\}, \quad (v, v')^* \in LV^{max(k)}, \quad k \in K \quad (22)$$

Krok 5. Utworzenie zbiorów $LV^{*(k+1)}$, $P^{(k+1)}$ oraz $X^{(k+1)}$

Na tym etapie należy zapewnić wyłączenie z dalszej analizy odcinka, odwzorowanego łukiem $(v, v')^* \in LV^{max(k)}$, który został włączony do zbioru $LV^{*(k+1)}$, tj.:

$$LV^{(k+1)} = LV^{(k)} \setminus \{(v, v')^*\}, \quad (v, v')^* \in LV^{max(k)}, \quad k \in K \quad (23)$$

Podobnie ze zbioru numerów dróg – zostają wyłączone te numery, które odpowiadają (obciążonym ruchem) drogom, przebiegającym przez odcinek $(v, v')^* \in LV^{max(k)}$, tj.:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} \setminus P^{max(k)}, \quad k \in K \quad (24)$$

$$\text{gdzie} \quad P^{max(k)} = \{p^* : (v, v')^* \subset \delta(p^*), \quad p^* \in P^{(k)}\}, \quad k \in K.$$

Elementy zbioru $X^{(k+1)}$ opisane są wzorem (20).

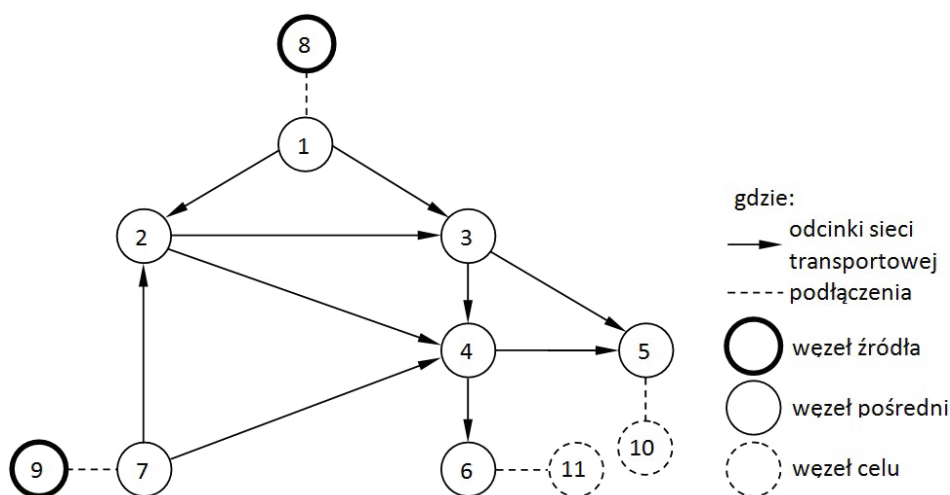
Krok 6. Sprawdzenie, czy wszystkie drogi w sieci transportowej zostały pomierzone

Warunkiem zakończenia procesu iteracyjnego jest sprawdzenie, czy $P^{(k+1)} = \emptyset$. W przypadku, gdy ten warunek nie jest spełniony należy przejść do kolejnej iteracji (krok 2).

3. Przykład obliczeniowy

Przykład obliczeniowy ma na celu z jednej strony dowieść aplikacyjnego charakteru przedstawionego algorytmu, a z drugiej wykazać zależność między liczbą wykorzystanych dróg w sieci transportowej opisanych zbiorem $P = \{p : 1, \dots, \bar{P}\}$ do obsługi danej relacji $(a, b) \in E$, a wynikiem przedstawionego wyżej toku postępowania, tj. zbiorem odcinków, na których zlokalizowane są urządzenia pomiarowe LV^* ($LV^* \subset LV$).

W celu egzemplifikacji metody doboru punktów pomiarowych zbudowano sieć transportową, zaprezentowaną na rys. 2.



Rys. 2. Przykładowa sieć drogową

Źródło: opracowanie własne

Dane opisujące przedstawioną na rysunku 2 sieć drogową:

- zbiór numerów wierzchołków grafu \mathbf{G} , będący odwzorowaniem zbioru wszystkich węzłów sieci transportowej $\mathbf{W} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, przy czym:
 - zbiór numerów wierzchołków, stanowiących odwzorowania węzłów ciężenia rejonów transportowych, w których potoki ruchu powstają $\mathbf{A} = \{8, 9\}$,
 - zbiór numerów wierzchołków, stanowiących odwzorowania węzłów ciężenia rejonów transportowych, w których potoki ruchu zanikają $\mathbf{B} = \{10, 11\}$,
 - zbiór numerów wierzchołków pośrednich, stanowiących odwzorowania węzłów sieci transportowej $\mathbf{V} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 - zbiór łuków będący odwzorowaniem zbioru odcinków sieci transportowej

$$\mathbf{LV} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (7, 2), (7, 4), (4, 6), (4, 5), (3, 5), (3, 4)\},$$
- zbiór relacji podróży (par O-D) $\mathbf{E} = \{(8, 10), (8, 11), (9, 10), (9, 11)\}$,

- zbiór numerów wszystkich dróg w sieci drogowej

$\mathbf{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} = \mathbf{P} = \{\mathbf{P}^{(8,10)}, \mathbf{P}^{(8,11)}, \mathbf{P}^{(9,11)}, \mathbf{P}^{(9,10)}\}$ przy czym:

- $\mathbf{P}^{(8,10)} = \{1, 2, 3, 4\}$ przy czym: $\vartheta(1) = \langle (8, 1), (1, 3), (3, 5), (5, 10) \rangle$,
 $\vartheta(2) = \langle (8, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 10) \rangle$, $\vartheta(3) = \langle (8, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 10) \rangle$,
 $\vartheta(4) = \langle (8, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 10) \rangle$,
- $\mathbf{P}^{(8,11)} = \{5, 6, 7\}$ przy czym: $\vartheta(5) = \langle (8, 1), (1, 3), (3, 4), (4, 6), (6, 11) \rangle$,
 $\vartheta(6) = \langle (8, 1), (1, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 11) \rangle$, $\vartheta(7) = \langle (8, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (6, 11) \rangle$,

- $P^{(9,11)} = \{8,9,10\}$ przy czym: $\vartheta(8) = \langle (9,7), (7,4), (4,6), (6,11) \rangle$,
 $\vartheta(9) = \langle (9,7), (7,2), (2,4), (4,6), (6,11) \rangle$, $\vartheta(10) = \langle (9,7), (7,2), (2,3), (3,4), (4,6), (6,11) \rangle$,
- $P^{(9,10)} = \{11,12,13,14\}$ przy czym: $\vartheta(11) = \langle (9,7), (7,4), (4,5), (5,10) \rangle$,
 $\vartheta(12) = \langle (9,7), (7,2), (2,4), (4,5), (5,10) \rangle$, $\vartheta(13) = \langle (9,7), (7,2), (2,3), (3,5), (5,10) \rangle$,
 $\vartheta(14) = \langle (9,7), (7,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,10) \rangle$,

- wielkości потокóv ruchu na drodze:

$$x^1 = 60, x^2 = 10, x^3 = 10, x^4 = 20, x^5 = 40, x^6 = 20,$$

$$x^7 = 20, x^8 = 70, x^9 = 30, x^{10} = 20, x^{11} = 40, x^{12} = 10, x^{13} = 5, x^{14} = 5.$$

W dalszych analizach ograniczono się jedynie do tych elementów dróg, które należą do zbioru VL , ponieważ mogą to być miejsca lokalizacji urządzeń pomiarowych.

W celu rozwiązania założonego zadania zdefiniowano maksymalną liczbę dróg dla każdej relacji w sieci (co prezentuje zbiór numeróv wszystkich dróg w sieci drogowej P). Zdefiniowano również minimalną liczbę dróg dla każdej relacji w sieci (czyli po jednej drodze dla każdej relacji). W tabeli 1 zaprezentowano numery dróg i łuki odwzorowujące odcinki, przez które przepływa potok ruchu na danej drodze przy założeniu minimalnej liczby dróg w każdej relacji. Natomiast w tabeli 2 przedstawiono analogiczne dane, jednak przy założeniu maksymalnej liczby dróg w każdej relacji.

Tabela 1. Minimalna liczba dróg pomiędzy relacjami dla przykładowej sieci wraz ze wskazaniem odcinkóv, przez które przepływa potok w danej drodze

Relacja	Numer drogi	Odcinek sieci transportowej					
		(1,3)	(7,4)	(4,6)	(4,5)	(3,5)	(3,4)
(8,10)	1	1				1	
(8,11)	5	1		1			1
(9,11)	8		1	1			
(9,10)	11		1		1		

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Maksymalna liczba dróg pomiędzy relacjami dla przykładowej sieci wraz ze wskazaniem odcinkóv, przez które przepływa potok w danej drodze

Relacja	Numer drogi	Odcinek sieci transportowej									
		(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(7,2)	(7,4)	(4,6)	(4,5)	(3,5)	(3,4)
(8,10)	1		1								1
	2	1		1						1	
	3	1		1					1		1
	4	1			1				1		
(8,11)	5		1					1			1
	6	1			1			1			
	7	1		1				1			1

		Odcinek sieci transportowej									
Relacja	Numer drogi	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(7,2)	(7,4)	(4,6)	(4,5)	(3,5)	(3,4)
(9,11)	8						1	1			
	9				1	1		1			
	10			1		1		1			1
(9,10)	11						1		1		
	12				1	1			1		
	13			1		1				1	
	14			1		1			1		1

Źródło: opracowanie własne

Wyniki obliczeń według algorytmu (rys. 1) przedstawiono w tabeli 3, w której zamieszczono łuki odpowiadające odcinkom, na których należy zlokalizować urządzenia pomiarowe wskazane w poszczególnych iteracjach, w zależności od liczby dróg w każdej relacji w sieci.

Tabela 3. Numery odcinków, na których należy zainstalować punkty pomiarowe wskazane w poszczególnych iteracjach w zależności od liczby dróg w każdej relacji w sieci

Numer iteracji	Maksymalna liczba dróg w danej relacji $\max \overline{P^{(a,b)}} = 1$		Maksymalna liczba dróg w danej relacji $\max \overline{P^{(a,b)}} = 2$		Maksymalna liczba dróg w danej relacji $\max \overline{P^{(a,b)}} = 3$		Maksymalna liczba dróg w danej relacji $\max \overline{P^{(a,b)}} = 4$	
	Odcinek z lokalizacją punktu pomiarowego	Numery pomierzonych dróg	Odcinek z lokalizacją punktu pomiarowego	Numery pomierzonych dróg	Odcinek z lokalizacją punktu pomiarowego	Numery pomierzonych dróg	Odcinek z lokalizacją punktu pomiarowego	Numery pomierzonych dróg
0	(4,6)	5, 8	(4,6)	5, 6, 8, 9	(4,6)	5, 6, 7, 8, 9, 10	(4,6)	5, 6, 7, 8, 9, 10
1	(2,3) lub (3,5)	1	(3,5)	1, 2	(3,5)	1, 2, 13	(4,5)	3, 4, 11, 12, 14
2	(7,4) lub (4,5)	11	(4,5)	11, 12	(4,5)	4, 11, 12	(3,5)	1, 2, 13

gdzie: $\overline{P^{(a,b)}}$ oznacza liczebność zbioru $P^{(a,b)}$ czyli liczbę dróg w danej relacji.

Źródło: opracowanie własne

4. Wnioski

Przedstawiona metoda i algorytm mogą być wykorzystane do identyfikacji miejsc w sieci, w których należy zlokalizować urządzenie pomiarowe. Jednakże zastosowanie takiego narzędzia w praktyce, zwłaszcza dla gęstych sieci drogowo-ulicznych wymaga sformalizowania tego procesu zapewniającego dobór odcinków pomiarowych według ustalonych reguł oraz opracowania narzędzia informacyjnego wspomagającego proces decyzyjny.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że otrzymane rozwiązanie z wykorzystaniem przedstawionego algorytmu nie zależy od liczby zidentyfikowanych dróg transportowych w danej relacji. Ta właściwość ma istotne znaczenie z punktu wi-

dzenia przygotowania zakresu niezbędnych danych wejściowych dla omawianego algorytmu, ułatwiając zdecydowanie proces decyzyjny.

Zaprezentowana metoda, wraz z implementacją w postaci algorytmu heurystycznego i przykładem obliczeniowym, dają pogląd na użyteczność rozwiązań z zakresu analiz sieci transportowych (i nie tylko transportowych), wykorzystujących optymalizację polegającą na minimalizacji niezbędnej liczby punktów zbierania danych. Ma to szczególne znaczenie dla gęstych sieci transportowych (duże miasta i aglomeracje), w których mimo kongestii potoków ruchu, można dokonywać ich względnie wiarygodnego pomiaru a wyniki wykorzystywać na przykład w systemach sterowania i zarządzania ruchem z predykcją i doбором optymalnych strategii sterowania przepływem potoków.

Bibliografia

- [1] Bianco L., Confessore G., Reverberi P., A network based model for traffic sensor location with implications on O-D matrix estimates. *Transportation Science*, 2001, 35, 50-60.
- [2] Cascetta E., Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares approach estimator. *Transportation Research*, 1984, 18 B, pp. 289-299.
- [3] Cascetta E., Inaudi D., Marquis G., Dynamic estimation of origin-destination matrices using traffic counts. *Transportation Science*, 1993, 27, pp. 363-373.
- [4] Castillo E., Menéndez J. M., Jiménez P., Trip matrix and path flow reconstruction and estimation based on plate scanning and link observations. *Transportation Research Part, B*, 2008, 42, pp. 455-481.
- [5] Chamier-Gliszczyński N., Modelowanie miejskiego systemu transportowego. 2012, *Logistyka* 4.
- [6] Ehlert A., Bell M., Grosso S., The optimisation of traffic count locations in road networks. *Transportation Research*, 2006, B 40, pp. 460-479.
- [7] Gan L., Yang H., Integer programming model for optimal selection of screen lines in road network. *Proceedings of the Sixth Conferences of the Hong Kong Society for Transportation Studies*, 2001, Hong Kong, pp. 122-130.
- [8] Jacyna M., Modelowanie i ocena systemów transportowych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009.
- [9] Karoń G., Travel demand and transportation supply modeling for agglomeration without transportation model. In J. Mikulski (Ed.): *Activities of Transport Telematics*, CCIS 395, pp. 284-293, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.
- [10] Karoń G., Mikulski J., Transportation systems modelling as planning, organisation and management for solutions created with ITS. In J. Mikulski

- (Ed.): *Modern Transport Telematics*, CCIS 239, pp. 277–290, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.
- [11] Karoń G., Mikulski J., Problems of ITS architecture development and ITS architecture implementation in Upper-Silesian Conurbation in Poland. In J. Mikulski (Ed.): *Telematics in the Transport Environment*, CCIS 329, pp. 183-198, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012.
- [12] Lam W.H.K., Lo H.P., Accuracy of O-D estimates from traffic counts. *Traffic Engineering and Control*, 1999, 31, pp. 358-367.
- [13] Leszczyński J., *Modelowanie systemów i procesów transportowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1999.
- [14] Mínguez R., Sánchez-Cambronero S., Castillo E., Jiménez P., Optimal traffic plate scanning location for OD trip matrix and route estimation in road networks. *Transportation Research*, 2010, B 44, pp. 282-298.
- [15] Simonelli F., Vittorio M., Papola A., Vitiello I., A network sensor location procedure accounting for o-d matrix estimate variability. *Transportation Research*, 2012, B 46, pp. 1624-1638.
- [16] Szarata A., *Calibration of O-D matrix using traffic counts*. [w:] Monografia pod red. R. Janeckiego, G. Sierpińskiego „Contemporary Transportation Systems. Selected Theoretical and Practical problems. New Mobility Culture”. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2011, s.185-192.
- [17] Yang H., Iida Y., Sasaki T., An analysis of the reliability of an origin-destination trip matrix estimated from traffic counts. *Transportation Research*, 1991, B 25, pp. 351-363.
- [18] Yang H., Zhou J., Optimal traffic counting locations for origin-destination matrix estimation. *Transportation Research*, 1998, B 32, No. 2, pp. 109-126.
- [19] Yang H., Chao Y., Liping G., Models and algorithms for the screen line-based traffic-counting location problems. *Computers & Operations Research*, 2006, 33, pp. 836-825.
- [20] Żochowska R., Dynamic Approach to the Origin-Destination Matrix Estimation in Dense Street Networks. *The Archives of Transport*, 2012, Vol.24, Issue 3, pp. 389-413.
- [21] Żochowska R., Model struktury sieci miejskiej dla potrzeb oceny wariantów organizacji ruchu w czasie zajęcia pasa drogowego. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, seria Transport z.97*, Warszawa 2013, s. 555-564.
- [22] Żochowska R., Modelowanie zachowań podróżnych w warunkach zamknięć ulic w gęstych sieciach miejskich. VI konferencja „Systemy Logistyczne – teoria i praktyka” w Korytnicy, 11-14 września 2012, *Logistyka* 4/2012, s. 803-818.
- [23] Żochowska R., Karoń G., Macioszek E., Wyznaczanie macierzy podróży w sieciach miejskich – klasyfikacja i przegląd metod. II Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Techniczna „Modelowanie podróży i prognozowanie ruchu”, Kraków 18-19 listopada 2010r. *Zeszyty Naukowo-Techniczne SITK RP o/Kraków, Nr 94*, Kraków 2010, s.327-349.