

DANIEL SIMSON (Toruń)

Konstrukcja pierścieni Sąsiady

1. Wstęp. Celem tego artykułu jest przedstawienie kilku historycznie ważnych uzupełnień i faktów do informacji zawartych w artykułach [1], [2], [9]–[11] o oryginalnych i bardzo złożonych konstrukcjach pierścieni E. Sąsiady, zawartych w jego nieopublikowanej do dziś rozprawie habilitacyjnej z 1961 roku pt. „Pierścienie proste i radykalne w sensie Jacobsona”.

Przypomnijmy, że Profesor Edward Sąsiada (1934–1999) ukończył studia matematyczne we Wrocławiu pod kierunkiem Profesora Bronisława Knaстера. Od roku 1952 pracował w Zakładzie Algebry IM PAN w Toruniu, kierowanym w latach 1952–1961 przez Profesora Jerzego M. Łosia. Od czasów studenckich był matematykiem atakującym trudne, nierozwiązane od lat problemy. Doktoryzował się w 1959 roku pod kierunkiem J. Łosia w tematyce grup abelowych. Przed doktoratem rozwiązał szereg ważnych problemów w teorii grup abelowych, w tym słynny „Kaplansky’s Test Problem”, patrz [5] oraz [6]. Wyniki te weszły na stałe do kanonu tej teorii; do dzisiaj są często cytowane i stosowane. Po doktoracie zainteresował się teorią pierścieni (głównie nieprzemiennych), a w szczególności inspirowanym przez książkę Jacobsona [4] otwartym problemem istnienia prostego pierścienia radykalnego (bez jedynek).

Aby przedstawić ten problem przypomnijmy, że *pierścieniem łącznym* nazywamy układ $(R, +, \cdot)$, gdzie R jest niepustym zbiorem, $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ są dwuargumentowymi działaniami w R (zwanymi dodawaniem i mnożeniem), przyporządkowującymi dowolnej parze (r, s) elementów w R elementy $r + s$ oraz rs należące do R . Zakłada się ponadto, że $(R, +)$ jest grupą przemienne, działanie mnożenia \cdot jest łączne oraz rozdzielne względem dodawania, tzn. dla dowolnych $r, s_1, s_2 \in R$ zachodzą równości $r(s_1 + s_2) = rs_1 + rs_2$ oraz $(s_1 + s_2)r = s_1r + s_2r$. Mnożenie w R nazywamy niezerowym, jeśli istnieją elementy $r, s \in R$ takie, że iloczyn rs jest różny od zera, tzn. różny od elementu neutralnego grupy przemiennej $(G, +)$. Jeśli istnieje element neutralny $1 \in R$ względem mnożenia, to nazywamy go jedynką pierścienia R , zaś R nazywamy wtedy pierścieniem z jedynką.

W 1945 roku Nathan Jacobson zdefiniował w dowolnym pierścieniu R ideał dwustronny $J(R) \subseteq R$, zwany dzisiaj *radykałem Jacobsona* pierścienia



R , jako zbiór wszystkich elementów $r \in R$ takich, że dla dowolnego $x \in R$ istnieje $y \in R$, dla którego zachodzą równości

$$xr + y + xry = rx + y + yrx = 0,$$

patrz [4]. Oryginalna definicja radykału podana przez Jacobsona różni się od powyższej, ale nieskomplikowany rachunek pokazuje, że obie definicje są równoważne (patrz wstęp w monografii C. Faitha [3]). Jeśli pierścień R posiada jedynekę $1 \in R$, to równości powyższe przyjmują postać

$$(1 + xr)(1 + y) = 1 = (1 + y)(1 + rx),$$

co oznacza, że $r \in J(R)$ wtedy i tylko wtedy, gdy element $1 + xr$ jest odwracalny w R , dla dowolnego $x \in R$. Jest to powszechnie znana obecnie postać definicji radykału Jacobsona. W tym wypadku $J(R)$ jest dwustronnym ideałem w pierścieniu R , równym przekrojowi wszystkich prawych (bądź lewych) maksymalnych ideałów w R . Stąd wynika, że $J(R) \neq R$, o ile R jest pierścieniem z jedyneką.

Pierścień R nazywamy *prostym*, jeśli jedynymi jego dwustronnymi ideałami są ideał zerowy oraz cały pierścień R . Pierścień R (bez jedyнки) nazywamy *radykalnym*, jeśli $J(R) = R$.

2. Pobyt Edwarda Sęsiady w Moskwie. Pod koniec 1960 roku E. Sęsiada skonstruował łączny pierścień prosty R bez jedyнки, z niezerowym mnożeniem i taki, że $J(R) = R$ (tzn. prosty pierścień radykalny), rozwiązując ważny i trudny problem w teorii pierścieni, czekający na rozwiązanie ponad dziesięć lat. Było to poważne osiągnięcie w skali światowej, a idea konstrukcji takich pierścieni weszła do kanonu metod teorii pierścieni. Do dzisiaj przykład E. Sęsiady i podana przez niego metoda konstrukcji są wysoko cenione przez algebraików na całym świecie. Świadczy o tym m.in. fakt, że proste pierścienie radykalne występują w literaturze naukowej pod nazwą „Sęsiada’s rings”.

Nad konstrukcją prostych pierścieni radykalnych E. Sęsiada rozpoczął pracę w Toruniu w roku 1959; kontynuował ją w czasie pobytu na stażu naukowym na Uniwersytecie im. Łomonosowa w Moskwie w roku 1960. W tym czasie uczył się podstaw szeroko rozumianej nowoczesnej algebry, uczestnicząc m.in. w seminarium z teorii pierścieni prowadzonym przez A. G. Kurosza oraz w seminariach z teorii liczb i geometrii algebraicznej prowadzonych przez I. R. Szafarewicza.

Interesujące i bardzo osobiste komentarze 36-letniego wówczas Edwarda Sęsiady z moskiewskiego okresu zmagania ze skomplikowaną konstrukcją prostych pierścieni radykalnych, na około dziesięć miesięcy przed definitywnym osiągnięciem celu, a także jego relacje o atmosferze pracy naukowej w Moskwie w tym czasie, zawiera przedstawiony poniżej jego list do Stanisława

Balcerzyka z 26 listopada 1960 roku w Moskwie. Kopię tego listu otrzymałem od Prof. S. Balcerzyka 26 marca 2004 roku, tzn. na niespełna rok przed jego przedwczesną śmiercią¹. List ten, oprócz dużego ładunku emocjonalnego i niewątpliwych walorów poznawczych, posiada wartość historyczną. Jest on zapewne jedynym, pisanym ręcznie dokumentem tego rodzaju, który pozostawił Prof. E. Sąsiada. Z listu tego dowiadujemy się m.in., że wielu wiodących algebraików tamtego okresu nie wierzyło w istnienie takich pierścieni, jakie chciał skonstruować Sąsiada. Jednym z tych, którzy w to wierzyli, był V. A. Andrunakijewicz.

Swoją skomplikowaną konstrukcję prostych pierścieni radykalnych E. Sąsiada przedstawił 20 grudnia 1960 roku na posiedzeniu Moskiewskiego Towarzystwa Matematycznego. Warto dodać, że wynik ten stanowił rewelację w skali światowej w tamtym czasie.

Niestety, okazało się później (w czasie omawiania szczegółów konstrukcji na seminarium Kurosza), że dowód Sąsiady nie jest pełny i wymaga dopracowania. Na szczęście luki te udało się dość szybko uzupełnić i można było przygotowywać wersję publikacyjną tej pracy.

3. List Edwarda Sąsiady do Stanisława Balcerzyka

Moskwa 26 listop. 1960

Drogi Stasiu,

Przyczyną tak długiego mego milczenia był, jak się domyślasz, „pierścień prosty i radykalny”, którego istnienie nareszcie pokazałem. Historia dowodzenia istnienia tego pierścienia była bardzo dramatyczna. Korzystając z twojej rady, zamknąłem się jak zakonnik w celi i twardo pracowałem. Po dwóch tygodniach nieprzytomnej pracy, wydawało mi się, że w końcu udowodniłem ten lemat o szeregach. Oczywiście z miejsca pochwaliłem się Kuroszowi, który jawnie nie wierząc, kazał mi zreferować, pełny ze szczegółami, dowód na seminarium z t. pierścieni. Przez okres tygodnia, do wyznaczonego terminu seminarium przeżywałem straszne męki, bo tego samego dnia po rozmowie z Kuroszem siadłem sprawdzać dowód i okazało się, że szpetnie się omyliłem. Pod koniec tygodnia musiałem odwołać wszystko, przez to sprawiłem wielu ludziom dużą przyjemność. Pracując dalej jak zakonnik benedyktyński, w końcu ubiegłego tygodnia zostałem natchniony przez św. Ducha i zobaczyłem drogę dowodu. W poniedziałek 21 bm. zacząłem referować dowód na seminarium, ale jeszcze nie skończyłem, tak, że nikt mi jeszcze nie wierzy, za wyjątkiem Andrunakijewicza, ale chyba teraz wszystko jest w porządku, chociaż sam za bardzo w to nie wierzę, jako że zmęczyłem się okrutnie. Napisaną pracę przesyłam Jarkowi z prośbą o zreferowanie i przepisanie na maszynie, jako że uczynienie tego tutaj jest utrudnione. Stasiu,

¹ Professor Stanisław Balcerzyk zmarł w Toruniu 5 marca 2005 roku w wieku 72 lat.

jeśli będziesz miał na tyle czasu przed wyjazdem, prosiłbym Ciebie bardzo, abyś tę pracę przeczytał i poprawił co się da. Napisałem ją nieszczególnie, ale naprawdę nie mam już sił, aby ją dobrze napisać. Zresztą zobaczysz, że to nie jest łatwe. Poza tym chyba nic ciekawego się nie stało. Chodzę stale oprócz wspomnianego seminarium z t. pierścieni, na wielkie seminarium z algebry Kurosza oraz na seminarium instytutowe Szafarewicza. Ponadto jestem biernym słuchaczem wykładu Szafarewicza z geometrii algebraicznej. Jest to b. dobry wykład, dotychczas nie korzystałem z niego tak jakby należało, bo cały czas byłem zajęty tym nieszczęsnym lematem. Ale postanowiłem, że od teraz zajmę się geom. algebr. Jest również seminarium z geom. algebr. prowadzone na uniwersytecie przez Szafarewicza, ale odbywa się ono równocześnie z seminariami z t. pierścieni. Umówiłem się z Szafarewiczem, że jak skończę ten dowód, to wezmę aktywny udział przez okres reszty mego pobytu w Moskwie w seminarium z geom. algebr. (na to seminarium chodzi mnóstwo mądrych ludzi, między innymi Gelfand).

Na tym kończę i będę z niecierpliwością oczekiwał listu od Ciebie. Łączę serdeczne pozdrowienia dla Ciebie i ukłony dla Rodziców.

Edek

4. Epizody związane z publikacją. Moskiewska konstrukcja prostych pierścieni radykalnych stanowiła główną część rozprawy habilitacyjnej E. Sasiady pt. „Pierścienie proste i radykalne w sensie Jacobsona”. Niestety, szczegóły tej trudnej konstrukcji nie zostały przez E. Sasiadę opublikowane w języku angielskim, poza krótką notatką [7] o objętości jednej strony, opublikowaną w Biuletynie PAN. Nie podaje się w niej szczegółów, a jedynie anonsuje uzyskany wynik, przedstawia ideę konstrukcji i zapowiada opublikowanie szczegółowych dowodów w *Fundamenta Mathematicae*. Zapowiedź publikacji tego wyniku w *Fundamenta Mathematicae* nie została jednak zrealizowana. W październiku 1966 roku Prof. Sasiada opowiedział mi (wtedy świeżo upieczonemu asystentowi) krótką historię swej konstrukcji. W rozmowie tej stwierdził, że w końcu 1961 roku wysłał zapowiadaną pracę do druku w *Fundamenta Mathematicae*, ale ona tam nie dotarła z winy poczty, co odkrył dopiero po długim czasie od chwili jej wysłania. Wtedy już zajęty był innymi problemami i ponownie nie przygotował tej pracy do publikacji.

Dopiero w 1967 roku E. Sasiada wraz z matematykiem angielskim P. M. Cohn'em (pochodzącym z Hamburga), opublikowali w *Journal of Algebra* pracę [8], zawierającą konstrukcję prostego pierścienia radykalnego. Zauważmy, że w tej publikacji E. Sasiada wymieniony jest na pierwszym miejscu przed P. M. Cohn'em (nie w porządku alfabetycznym), co nie jest naturalne przy publikowaniu wieloautorskich prac matematycznych.

W rozmowie z Prof. P. M. Cohn'em w 1985 roku na konferencji w Durham (Anglia) dowiedziałem się, że praca ta została zredagowana przez niego

na podstawie fragmentów notatek przekazanych mu przez E. Sąsiadę, oraz rozmów, jakie przeprowadzili w 1964 roku na Uniwersytecie w Chicago, w czasie których Sąsiada sugerował, iż nie warto już tych wyników publikować, gdyż są znane. W końcu jednak przychylił się do sugestii Cohna, aby opublikować konstrukcję prostego pierścienia radykalnego pod warunkiem, że Cohn zgodzi się zostać współautorem tej publikacji. Konstrukcja opublikowana w pracy [8] różni się w znacznym stopniu od oryginalnej konstrukcji podanej przez E. Sąsiadę w Moskwie w 1960 roku, gdyż wykorzystuje upraszczające pomysły Cohna.

Epizody te opisałem w publikacji [11], opartej na wykładzie wygłoszonym w lipcu 2001 roku na międzynarodowej konferencji w Honolulu, poświęconej teorii pierścieni, modułów oraz historii teorii grup abelowych. Po przesłaniu P. M. Cohn'owi z Bedford College w Londynie treści mego wystąpienia w Honolulu oraz maszynopisu pracy [11] otrzymałem od niego następujący e-mailowy komentarz do „historii” jego publikacji w *Journal of Algebra* wspólnej z Sąsiadą:

Dear Professor Simson,

I have now read your paper on Jerzy Łoś² and found it very interesting as an account of the revival of algebra in Poland. Of course it is always pleasing to find oneself mentioned, but I hope you will allow me to point out that I had actually met Sąsiada. In 1964, Yitz Herstein held an algebra study session at the University of Chicago which I attended for about 6 months (until December). Towards the end Edward Sąsiada also came to Chicago and in conversation mentioned his work on simple radical rings. We discussed it quite a bit and after he had left I worked out a fairly simple example which I sent to him in Poland; I knew he was going to write a paper on it and told him that he was welcome to include my example. His reply was fairly brief, saying in effect that as I now had a simple example, he would not publish his work. I then wrote back saying that he ought to be at least a joint author and if he raised no objection, I would write the whole up as a joint paper. Of course I knew he was a man of few words, and when after a longish interval I had heard nothing from him, I wrote up the joint paper, which of course you know. I hope that clarifies the whole episode; if you ever have the chance to write about it again, you are welcome to include these details.

With best regards,

Paul Cohn

Ten interesujący list definitywnie wyjaśnia historię powstania pracy [8], która jest jedynym artykułem angielskojęzycznym zawierającym konstrukcję prostych pierścieni radykalnych, tzn. pierścieni Sąsiady.

² Chodzi tu o pracę [11].

Literatura

- [1] S. Balcerzyk, *50 lat seminarium algebraicznego w Toruniu*, Wiad. Mat. **41** (2005), 107–117.
- [2] S. Balcerzyk, B. Kamiński, *Edward Sąsiada (1924–1999)*, Wiad. Mat. **37** (2001), 145–152.
- [3] C. Faith, *Algebra II. Ring Theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [4] N. Jacobson, *Structure of Rings*, Amer. Math. Soc., Providence, 1956 (istnieje też przekład rosyjski „Strojenje kolec”, Moskwa, 1961).
- [5] E. Sąsiada, *Construction of a directly indecomposable abelian group of a power higher than that of the continuum*, Bull. Acad. Polon. Sci. **5** (1957), 701–703, oraz **7** (1959), 23–26.
- [6] E. Sąsiada, *Negative solution of I. Kaplansky’s First Test Problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning the homology groups*, Bull. Acad. Polon. Sci. **9** (1961), 331–334.
- [7] E. Sąsiada, *Solution of the problem of existence of simple radical ring*, Bull. Acad. Polon. Sci. **9** (1961), 257.
- [8] E. Sąsiada and P. M. Cohn, *An example of a simple radical ring*, J. Algebra **5** (1967), 373–377.
- [9] D. Simson, *Początki toruńskiej algebry*, Wiad. Mat. **35** (1999), 1–9.
- [10] D. Simson, *Początkowy okres rozwoju polskiej algebry*, Polska Akademia Umiejętności, Komisja Historii Nauki, Monografie 4, Kraków, 2001, 139–155.
- [11] D. Simson, *Jerzy Łoś and a history of abelian groups in Poland*, Rocky Mountain J. Math. **32** (2002), 1245–1255.