

Krzysztof Kubicki

## **ANALIZA WYBOCZENIOWA RAM PŁASKICH I ICH MODELOWANIE W PROGRAMIE AUTODESK ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS**

### **Wprowadzenie**

Analityczne wyznaczenie sił krytycznych za pomocą metody przemieszczeń, nawet jeśli dysponuje się programami komputerowymi do obliczeń matematycznych (np. Mathcad, Maple czy Mathematica) i przyjmie założenia upraszczające, może być dla złożonych układów ramowych bardzo czasochłonne. Z kolei programy komputerowe do analizy numerycznej konstrukcji, bazujące najczęściej na metodzie elementów skończonych, znacznie przyspieszają obliczenia, ale często dają projektantowi złudne przekonanie o poprawności wyników. Modelując konstrukcję w dowolnym programie, zazwyczaj nie przykłada się należytej wagi do sposobu wprowadzania prętów. Z reguły jednemu prętowi konstrukcji odpowiada w modelu jeden element. Taka sytuacja nie ma przeważnie wpływu na dokładność najczęściej wykonywanych obliczeń statycznych, ale już np. w analizie modalnej może prowadzić do poważnych błędów [1]. Analiza wyboczeniowa, z uwagi na charakter problemu i podobieństwa w metodologii rozwiązywania zagadnienia własnego dynamiki układów o masie rozłożonej w sposób ciągły, skłania do postawienia tezy, że i w tym przypadku sposób modelowania prętów w programie (dodatkowy podział elementów) może mieć wpływ na dokładność obliczeń. Analizę numeryczną przeprowadzono w programie Autodesk Robot Structural Analysis Professional [2].

### **1. Wzory transformacyjne metody przemieszczeń dla wyboczenia w płaszczyźnie ramy**

Aby wyznaczyć siły krytyczne dla płaskich układów ramowych, można skorzystać z metody przemieszczeń. Równania równowagi tworzą w tym przypadku układ równań jednorodnych, który będzie niesprzeczny, kiedy jego wyznacznik będzie równy zero. Warunek ten stanowi kryterium wyboczenia. Mamy wówczas do czynienia ze stanem, w którym obok równowagi przy czystym ściskaniu

(pręt prostoliniowy) może wystąpić postać równowagi z nieskończenie małym zginaniem.

Wzory transformacyjne dla prętów o przedstawionych poniżej schematach statycznych pozwalają rozwiązać większość układów ramowych. Zakłada się, że pręty są nieściśliwe, a wybożenie nastąpi w zakresie odkształceń sprężystych. Obciążenia zewnętrzne przyjmuje się w postaci sił skupionych przykładanych w węzłach, które wywołują tylko siły normalne w poszczególnych prętach aż do osiągnięcia siły krytycznej. Jako dodatnie przyjęto pokazane na rysunkach 1-4 kierunki sił ( $M_{ik}$ ,  $M_{ki}$ ,  $T_{ik}$ ,  $T_{ki}$ ) i nieskończenie małych przemieszczeń ( $\varphi_i$ ,  $\varphi_k$ ,  $w_i$ ,  $w_k$ ) w przekrojach końcowych pręta. Kąt obrotu cięciwy przyjęto jako  $\psi = \frac{w_k - w_i}{L}$ .

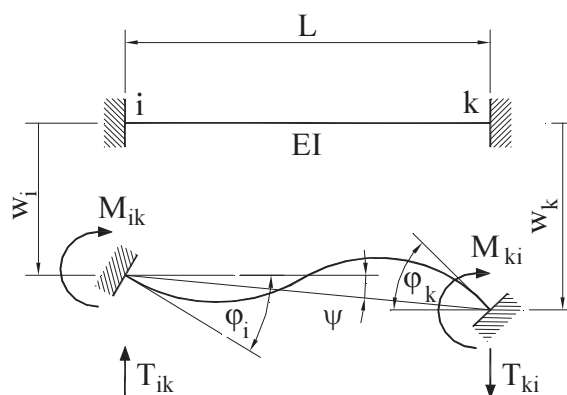
W podanych wzorach parametr  $\lambda$  określono jako:

$$\lambda = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \quad (1)$$

gdzie:  $P$  - siła normalna ściskająca (dodatnia) w pręcie  $i-k$ ,  $L$  - długość pręta  $i-k$ ,  $EI$  - sztywność pręta  $i-k$ .

Wyprowadzenie wzorów transformacyjnych można znaleźć w literaturze, np. w [3].

- Pręt obustronnie utwierdzony



Rys. 1. Belka obustronnie utwierdzona

$$M_{ik} = \frac{EI}{L} [\alpha(\lambda) \cdot \varphi_i + \beta(\lambda) \cdot \varphi_k - \mathcal{G}(\lambda) \cdot \psi] \quad (2)$$

$$M_{ki} = \frac{EI}{L} [\beta(\lambda) \cdot \varphi_i + \alpha(\lambda) \cdot \varphi_k - \mathcal{G}(\lambda) \cdot \psi] \quad (3)$$

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{EI}{L^2} [\mathcal{G}(\lambda) \cdot (\varphi_i + \varphi_k) - \delta(\lambda) \cdot \psi] \quad (4)$$

gdzie:

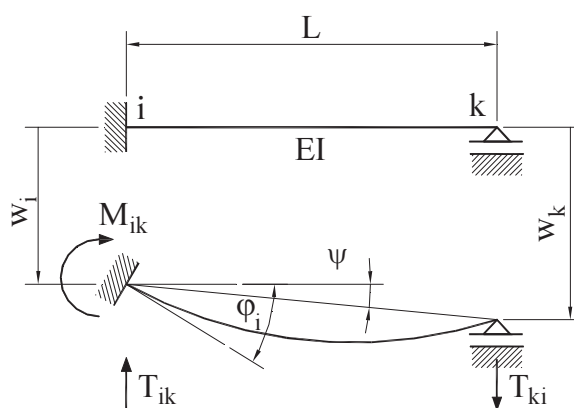
$$\alpha(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\sin(\lambda) - \lambda \cdot \cos(\lambda)}{2 \cdot [1 - \cos(\lambda)] - \lambda \cdot \sin(\lambda)}$$

$$\beta(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\lambda - \sin(\lambda)}{2 \cdot [1 - \cos(\lambda)] - \lambda \cdot \sin(\lambda)}$$

$$g(\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{1 - \cos(\lambda)}{2 \cdot [1 - \cos(\lambda)] - \lambda \cdot \sin(\lambda)}$$

$$\delta(\lambda) = \lambda^3 \cdot \frac{\sin(\lambda)}{2 \cdot [1 - \cos(\lambda)] - \lambda \cdot \sin(\lambda)}$$

- Pręt utwierdzony w węźle „i” oraz podparty przegubowo w węźle „k”



Rys. 2. Belka utwierdzona z jednej strony i podparta przegubowo z drugiej

$$M_{ik} = \frac{EI}{L} \cdot \alpha'(\lambda) \cdot (\varphi_i - \psi) \quad (5)$$

$$M_{ki} = 0 \quad (6)$$

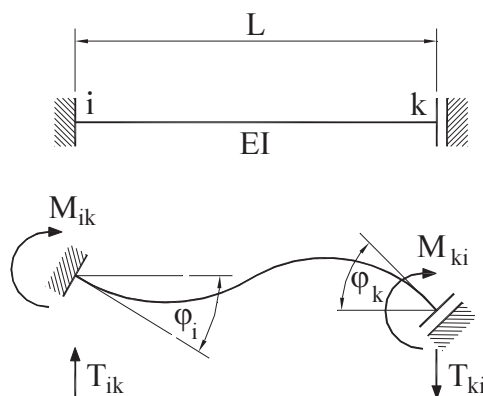
$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{EI}{L^2} \cdot [\alpha'(\lambda) \cdot \varphi_i - \delta'(\lambda) \cdot \psi] \quad (7)$$

gdzie:

$$\alpha'(\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{\sin(\lambda)}{\sin(\lambda) - \lambda \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\delta'(\lambda) = \lambda^3 \cdot \frac{\cos(\lambda)}{\sin(\lambda) - \lambda \cdot \cos(\lambda)}$$

- Pręt utwierdzony w węźle „i” oraz podparty teleskopowo w węźle „k”



Rys. 3. Belka utwierdzona z jednej strony i podparta teleskopowo z drugiej

$$M_{ik} = \frac{EI}{L} \cdot [\alpha''(\lambda) \cdot \varphi_i + \beta''(\lambda) \cdot \varphi_k] \quad (8)$$

$$M_{ki} = \frac{EI}{L} \cdot [\beta''(\lambda) \cdot \varphi_i + \alpha''(\lambda) \cdot \varphi_k] \quad (9)$$

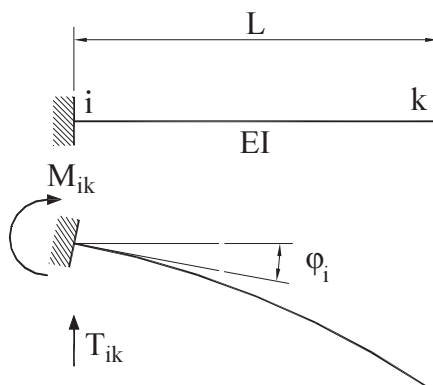
$$T_{ik} = T_{ki} = 0 \quad (10)$$

gdzie:

$$\alpha''(\lambda) = \lambda \cdot \text{ctg}(\lambda)$$

$$\beta''(\lambda) = \frac{\lambda}{\sin(\lambda)}$$

- Pręt utwierdzony w węźle „i” oraz swobodny w węźle „k”



Rys. 4. Wspornik

$$M_{ik} = \frac{EI}{L} \cdot \alpha'''(\lambda) \cdot \varphi \quad (11)$$

$$M_{ki} = 0 \quad (12)$$

$$T_{ik} = T_{ki} = 0 \quad (13)$$

gdzie:  $\alpha'''(\lambda) = -\lambda \cdot \operatorname{tg}(\lambda)$

W przypadku siły rozciągającej (ujemnej) argument  $\lambda$  staje się liczbą urojoną:

$$\bar{\lambda} = i \cdot \lambda = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}} \quad (14)$$

Wówczas funkcje argumentu zespolonego przybierają postać:

$$\alpha(\bar{\lambda}) = \lambda \cdot \frac{\sinh(\bar{\lambda}) - \lambda \cdot \cosh(\bar{\lambda})}{2 \cdot [\cosh(\bar{\lambda}) - 1] - \bar{\lambda} \cdot \sinh(\bar{\lambda})}$$

$$\beta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{\bar{\lambda} - \sinh(\bar{\lambda})}{2 \cdot [\cosh(\bar{\lambda}) - 1] - \bar{\lambda} \cdot \sinh(\bar{\lambda})}$$

$$\vartheta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{1 - \cosh(\bar{\lambda})}{2 \cdot [\cosh(\bar{\lambda}) - 1] - \bar{\lambda} \cdot \sinh(\bar{\lambda})}$$

$$\delta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{\sinh(\bar{\lambda})}{2 \cdot [\cosh(\bar{\lambda}) - 1] - \bar{\lambda} \cdot \sinh(\bar{\lambda})}$$

$$\alpha'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{\sinh(\bar{\lambda})}{\bar{\lambda} \cdot \cosh(\bar{\lambda}) - \sinh(\bar{\lambda})}$$

$$\delta'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{\cosh(\bar{\lambda})}{\bar{\lambda} \cdot \cosh(\bar{\lambda}) - \sinh(\bar{\lambda})}$$

$$\alpha''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \operatorname{ctgh}(\bar{\lambda})$$

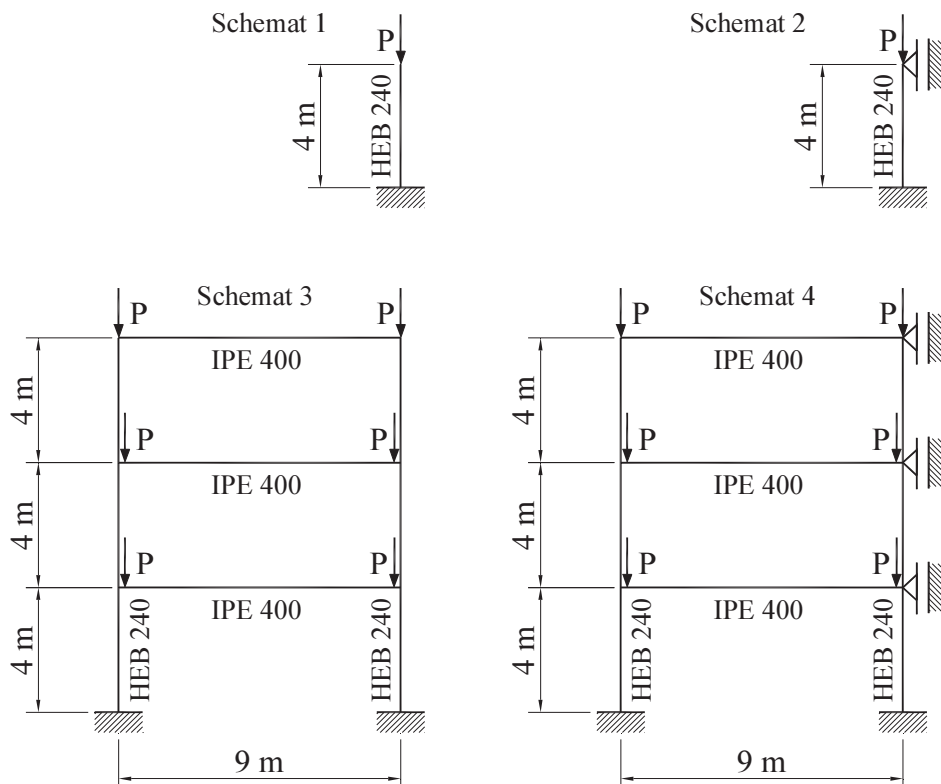
$$\beta''(\bar{\lambda}) = -\frac{\bar{\lambda}}{\sinh(\bar{\lambda})}$$

$$\alpha'''(\bar{\lambda}) = -\bar{\lambda} \cdot \operatorname{tgh}(\bar{\lambda})$$

Dla prętów zerowych powyższe funkcje przybierają stałe wartości równe wartościom współczynników metody przemieszczeń znanych ze statyki, czyli  $\alpha(0) = 4$ ,  $\beta(0) = 2$ ,  $\vartheta(0) = 6$ ,  $\delta(0) = 12$ ,  $\alpha'(0) = 3$ ,  $\delta'(0) = 3$ ,  $\alpha''(0) = 1$ ,  $\beta''(0) = -1$ ,  $\alpha'''(0) = 0$ .

## 2. Rozwiązanie analityczne

Przeanalizowano cztery przykłady konstrukcji stalowych wg schematów statycznych przedstawionych na rysunku 5.

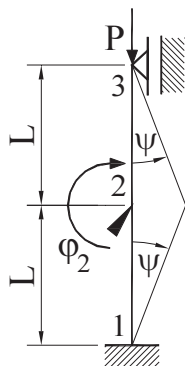


Rys. 5. Schematy statyczne analizowanych konstrukcji

Z uwagi na znaczną objętość obliczeń zamieszczono tok postępowania wyznaczenia sił krytycznych dla trzech pierwszych postaci wyboczenia jedynie dla schematu 2. Aby było możliwe rozwiązanie tego schematu metodą przemieszczeń, należy wprowadzić dodatkowy węzeł 2 (rys. 6). W ten sposób otrzymuje się układ dwukrotnie kinematycznie niewyznaczalny.

Dane wejściowe

$$L = 2 \text{ m} \quad E = 205 \text{ GPa} \quad I = 11260 \text{ cm}^4$$



Rys. 6. Schemat obliczeniowy konstrukcji

Równania równowagi:

$$\begin{cases} M_{21} + M_{23} = 0 \\ T_{21} - T_{23} = 0 \end{cases}$$

Ze wzorów transformacyjnych (3) i (4) wyznaczono składowe dla pręta 2-1, a ze wzorów (5) i (7) dla pręta 2-3:

$$M_{21} = \frac{EI}{L} [\alpha(\lambda) \cdot \varphi_2 - \vartheta(\lambda) \cdot \psi]$$

$$T_{21} = -\frac{EI}{L^2} [\vartheta(\lambda) \cdot \varphi_2 - \delta(\lambda) \cdot \psi]$$

$$M_{23} = \frac{EI}{L} \cdot \alpha'(\lambda) \cdot [\varphi_2 - (-\psi)]$$

$$T_{23} = -\frac{EI}{L^2} \cdot [\alpha'(\lambda) \cdot \varphi_2 - \delta'(\lambda) \cdot (-\psi)]$$

Po podstawieniu składowych do równań równowagi i uporządkowaniu wyrazów otrzymano układ równań jednorodnych, którego wyznacznik przyrównany do zera jest warunkiem istnienia nietrywialnego rozwiązania:

$$\begin{vmatrix} \frac{EI}{L} \cdot \alpha(\lambda) + \frac{EI}{L} \cdot \alpha'(\lambda) & \frac{EI}{L} \cdot \alpha'(\lambda) - \frac{EI}{L} \cdot \vartheta(\lambda) \\ \frac{EI}{L^2} \cdot \alpha'(\lambda) - \frac{EI}{L^2} \cdot \vartheta(\lambda) & \frac{EI}{L^2} \cdot \delta(\lambda) + \frac{EI}{L^2} \cdot \delta'(\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Rozwinięcie wyznacznika pozwala na zapisanie równania przestępnego:

$$[\alpha(\lambda) + \alpha'(\lambda)] \cdot [\delta(\lambda) + \delta'(\lambda)] - [\alpha'(\lambda) - \vartheta(\lambda)]^2 = 0$$

którego 3 pierwsze pierwiastki wynoszą:

$$\lambda_1 = 2,2467 \quad \lambda_2 = 3,86263 \quad \lambda_3 = 5,45206$$



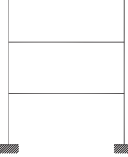
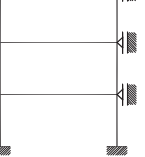
Siły krytyczne można wyznaczyć, przekształcając wzór (1):

$$P^{kr} = P = \frac{\lambda^2 \cdot EI}{L^2}$$

Wartości sił krytycznych dla rozważanych schematów uzyskane na drodze analitycznej zamieszczono w tabeli 1.

TABELA 1

## Siły krytyczne [kN]



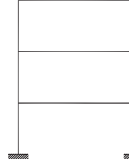
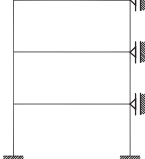
	Schemat 1	Schemat 2	Schemat 3	Schemat 4
				
$P_1^{kr}$	3559,69	29128,91	2971,91	11300,18
$P_2^{kr}$	32037,20	86098,89	4801,18	13808,97
$P_3^{kr}$	88992,23	171535,47	8682,48	18411,73

## 3. Rozwiązanie numeryczne

W obliczeniach numerycznych wykonanych w programie Autodesk Robot Structural Analysis Professional przyjęto domyślne parametry analizy wyboczeniowej, zmieniając jedynie liczbę postaci na 3.

TABELA 2

## Siły krytyczne w zależności od podziału prętów na n elementów [kN]

	n	Schemat 1	Schemat 2	Schemat 3	Schemat 4
					
$P_{1,n}^{kr}$	1	3586,47	43280,63	2990,12	16858,26
	2	3561,51	29876,35	2975,90	11493,15
	4	3559,81	29188,76	2972,19	11310,32
	8	3559,70	29132,86	2971,93	11292,57
	16	3559,69	29129,16	2971,91	11292,34
$P_{2,n}^{kr}$	1	46426,70	–	4848,35	25220,07
	2	33104,15	108347,96	4821,44	14041,23
	4	32117,24	87477,73	4802,56	13835,00
	8	32042,46	86197,85	4801,26	13801,54
	16	32037,57	86105,31	4801,17	13799,12
$P_{3,n}^{kr}$	1	–	–	8863,08	33368,65
	2	111178,02	284964,05	8724,55	18724,57
	4	90532,46	180171,23	8685,48	18478,08
	8	89101,63	172285,23	8682,67	18408,29
	16	88999,33	171586,07	8682,48	18403,55






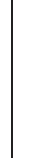
Dla wszystkich schematów pierwotnie zamodelowano każdy z prętów jako jeden element, uzyskując dla schematu 1 tylko dwie siły krytyczne, a dla schematu 2 - wyłącznie pierwszą. Następnie dokonano podziału każdego z prętów na 2, 4, 8 i 16 równych części. Zaznaczenie przy podziale opcji: „Generuj węzły bez dzielenia prętów/krawędzi” daje w przypadku analizy wybozeniowej tylko wartość współczynnika krytycznego (nie podaje sił krytycznych, długości wybozeniowych i smukłości prętów). Wartości sił krytycznych przy podziale wszystkich prętów na  $n$  elementów zamieszczono w tabeli 2.

### Wnioski

Zwiększanie liczby elementów, na które zostały podzielone pręty, powoduje, że otrzymane w programie wartości sił krytycznych dążą zbieżnie do wartości uzyskanych z obliczeń analitycznych.

TABELA 3

**Błędy względne w zależności od podziału prętów na  $n$  elementów [%]**

	n	Schemat 1	Schemat 2	Schemat 3	Schemat 4
					
$BW_{1,n}$	1	0,752	48,583	0,613	49,186
	2	0,051	2,566	0,134	1,708
	4	0,003	0,205	0,009	0,090
	8	0,000	0,014	0,001	-0,067
	16	0,000	0,001	0,000	-0,069
$BW_{2,n}$	1	44,915	–	0,982	82,635
	2	3,330	25,841	0,422	1,682
	4	0,250	1,601	0,029	0,189
	8	0,016	0,115	0,002	-0,054
	16	0,001	0,007	0,000	-0,071
$BW_{3,n}$	1	–	–	2,080	81,236
	2	24,930	66,125	0,485	1,699
	4	1,731	5,034	0,035	0,360
	8	0,123	0,437	0,002	-0,019
	16	0,008	0,029	0,000	-0,044

Można zauważyć pewne prawidłowości. Układy przesuwne (schematy 1 i 3) są mniej wrażliwe na brak podziału prętów niż nieprzesuwne (schematy 2 i 4).

Dla pierwszej postaci różnica pomiędzy rozwiązaniem numerycznym i analitycznym dla układów przesuwnych jest stosunkowo niewielka. Dla układów nieprzesuwnych z niepodzielnymi prętami ( $n = 1$ ) wartość siły krytycznej jest znacznie wyższa niż dla prętów z podziałem. Jest to szczególnie niebezpieczne, gdyż program zawyża wartość siły, przy której może dojść do wyboczenia.

Obliczając błędy względne, wyrażone w procentach, między wartościami uzyskanymi analitycznie i numerycznie, już na podstawie tych niewielu przykładów można sformułować ciekawe wnioski. Sam błąd względny dla  $i$ -tej postaci i podziału prętów na  $n$  elementów jest definiowany w następujący sposób:

$$BW_{i,n} = \frac{P_{i,n}^{kr} - P_i^{kr}}{P_i^{kr}}$$

Wartości błędów dla poszczególnych schematów zamieszczono w tabeli 3.

Dla układów nieprzesuwnych bez podziału na elementy błędy względne dla pierwszej postaci dochodzą do kilkudziesięciu procent. Tak duże niewychwycone błędy mogą doprowadzić do poważnych konsekwencji.

Dla schematów 1 i 2, tam gdzie nie uzyskano z programu wartości sił krytycznych dla wyższych postaci przy niepodzielonych prętach, znaczne błędy występują także przy podziale  $n = 2$ .

Zazwyczaj im wyższa postać wyboczenia, tym błąd względny jest większy.

## Literatura

- [1] Kubicki K., Drgania własne układów ramowych i ich modelowanie w programie Autodesk Robot Structural Analysis, Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej 2012, nr 167, seria Budownictwo 18, 88-96.
- [2] Nowacki W., Mechanika budowli, PWN, Warszawa 1975.
- [3] Autodesk Robot Structural Analysis Professional - Podręcznik użytkownika. <http://help.autodesk.com/view/RSAPRO/2016/PLK/>, dostęp 1.04.2016.

## Streszczenie

Wykonanie obliczeń statycznych złożonych konstrukcji często nastęrcza projektantom wielu trudności, a czasem jest wręcz niemożliwe. Programy komputerowe wspomagają projektowanie, ale nie można do wyników analizy numerycznej podchodzić bezkrytycznie. O ile z analizą statyczną programy komercyjne radzą sobie bardzo dobrze, o tyle z analizą dynamiczną czy wyboczeniową mogą mieć problem. W artykule przedstawiono wpływ dyskretyzacji konstrukcji na dokładność analizy wyboczeniowej w programie Autodesk Robot Structural Analysis Professional dla różnych układów konstrukcyjnych. Przeanalizowano zarówno układy przesuwne, jak i nieprzesuwne. W pracy zamieszczono przykłady dla dwóch prostych prętów (wspornikowego oraz z jednej strony utwierdzonego, a z drugiej podpartego przegubowo) i dla dwóch ram dwupiętrowych (przesuwnej i nieprzesuwnej). Dla każdego modelu wyznaczono po trzy siły krytyczne. Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniami analitycznymi. Zauważono znaczne różnice wartości sił krytycznych dla modeli bez podziału prętów i z ich podziałem, szczególnie wyraźne dla układów nieprzesuwnych. Wartości sił krytycz-

nych uzyskane dla układów bez podziału były wyższe od rzeczywistych wartości, co stanowi zagrożenie, gdyż wyboczenie może nastąpić przy niższej sile ściskającej.

**Słowa kluczowe:** analiza wyboczeniowa, rama, modelowanie numeryczne

## **Buckling analysis of plane frames and their modeling in Autodesk Robot Structural Analysis program**

### **Abstract**

Static calculations of advanced structures lead sometimes to many difficulties for designers and in some cases can be impossible. Computer programs aid the design process, but the result of numerical analysis cannot be used uncritically. While the commercial programs solve static problems very well, the dynamic or buckling analysis may cause some trouble. The paper presents the influence of discretization on accuracy of buckling analysis in Autodesk Robot Structural Analysis Professional program for different structural systems. Structures with and without sidesway have been analyzed. The paper provides examples for two straight rods (cantilever and a rod with one fixed support and second hinged support) and the two-storey frames (with and without sidesway). For each model three critical forces were determined. The results obtained were compared with the results of analytical solutions. Significant differences of critical forces values were observed for the models analysed. The differences were significantly visible in the systems without sidesway. The values the critical loads obtained for models without discretization were higher than the actual value, which is a threat because buckling may occur at a lower compressive force.

**Keywords:** buckling analysis, frame, numerical modeling