

# MODEL DO ANALIZY DYNAMIKI PRZEKŁADNI PASOWEJ Z PASEM 5PK

KRZYSZTOF KUBAS<sup>1</sup>

Akademia Techniczno – Humanistyczna w Bielsku-Białej

## Streszczenie

W pracy przedstawiono pewien model przekładni pasowej służący do analizy dynamiki. Przyjęto model dyskretny płaski pasa składający się ze sztywnych członów połączonych ze sobą wzdluznymi i skrotnymi elementami sprzyzsto-tlumiacymi. W modelu tym, w chwili styku czlonu z koleem pasowym, przyjeto model kontaktu i model tarcia suchego. Do opisu zjawisk kontaktowych wykorzystano model z odpowiednia sztywnoscia i tlumieniem pomiedzy stykajacymi sie powierzchniami, natomiast do opisu zjawiska tarcia wykorzystano uproszczony model tarcia Threlfall'a. Ruch przekladni wywolany zostaje pod wplywem wymuszenia silowego lub ruchowego zalozonego na kolech pasowych. W dalszej czesci przedstawiono wyniki sil reakcji w pasie oraz sil kontaktu i tarcia pomiedzy czlonem a koleem pasowym w przykladowej przyjetej przekladni pasowej, uzyskane pod wplywem dzialania zalozonych na kola momentow napedowego i oporu. Na zakonczenie zaprezentowano przykladowe zastosowanie modelu do analizy dynamiki przekladni samochodowej napedzajacej alternator i pompe plynu chlodniczego.

**Słowa kluczowe:** przekładnie pasowe, analiza dynamiki, tarcie suche, pas poliklinowy

## 1. Wprowadzenie

Obecnie coraz częściej stosuje się przekładnie pasowe. Izolacja drgań pochodzących od napędu, czy stosunkowo niewielka masa stanowią w pewnych sytuacjach o ich przewadze nad innymi rozwiązaniami. Niewątpliwie coraz powszechniejsze stosowanie tych przekładni jest skutkiem rosnącej ich niezawodności, co z kolei spowodowane jest zastosowaniem lepszych rozwiązań, w szczególności pasów. Dotyczy to zarówno stosowania coraz to bardziej niezawodnych materiałów, jak i rozwiązań konstrukcyjnych (kształtu pasów, rodzaju i rozmieszczenia warstwy nośnej, itp.).

Potrzeba wdrażania coraz to lepszych rozwiązań wiąże się z szeregiem testów kolejnych prototypów wykonywanych na odpowiednim stanowisku badawczym. Powoduje to niejednokrotnie znaczne zwiększenie kosztów. Sposobem na ich obniżenie jest wykonanie

<sup>1</sup> Akademia Techniczno-Humanistyczna, Zakład Mechaniki, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, ul. Willowa 2, 43-309 Bielsko-Biała, e-mail: kkubas@ath.bielsko.pl

tw. prototypu wirtualnego, czyli modelu komputerowego pozwalającego wstępnie dostosować odpowiednie parametry pasa.

Teoretyczna sprawność przekładni powinna wynosić ponad 90%. Niestety duża część przekładni pracuje z dużo mniejszą sprawnością. Jest to spowodowane wieloma czynnikami, wśród których można wymienić: nieprawidłowo zaprojektowaną lub zmontowaną przekładnię (wliczając w to zarówno nieprawidłowy naciąg pasa, jak również nieprawidłowe osiowanie kół) i nieprawidłową obsługę przekładni. Wśród najczęściej spotykanych błędów osób obsługujących przekładnie pasowe można wymienić niedostatecznie częstą kontrolę pracującego pasa. Kontrola ta dotyczy nie tylko sprawdzania napięcia czy uszkodzeń pasa, ale także występujących tam zanieczyszczeń. W takich sytuacjach również możliwe byłoby zastosowanie odpowiedniego komputerowego modelu przekładni, m.in. do badań wpływu występujących tam defektów na jej sprawność.

Rozważania nad zjawiskami występującymi w przekładniach pasowych sięgają wieku XVIII i zostały zapoczątkowane przez Leonarda Eulera [7]. Ważniejsze badania wykonywane na przestrzeni wieków, z wyszczególnieniem bardziej istotnych prac, przedstawił Fawcett w szeroko cytowanej pracy [8]. Warto nadmienić, że we wspomnianej publikacji Autor omawia również prace dotyczące przekładni łańcuchowych.

Ogromnie istotne, z punktu widzenia założeń zastosowanych w modelu przedstawionym w niniejszej pracy, wydają się opracowania przedstawiające modele dyskretne pasów [9, 13, 14].

Ze względu za złożoność zjawisk występujących w przekładniach pasowych, szczególnie trudne wydaje się opisanie za pośrednictwem odpowiedniego aparatu matematycznego tarcia i kontaktu. W literaturze szczególnie rozpowszechnione są przedziałami liniowe modele tarcia, np. Coulomb-like tri-linear creep-rate-dependent friction law [12, 14], elastic/perfectly plastic friction law (EPP) [10]. Siły nacisku pasa działające na koło pasowe, które są niezbędne do wyznaczenia wspomnianych sił tarcia, wyznaczane mogą być za pośrednictwem modelu sprężysto-tłumiącego [2, 4, 14] (zwanego w literaturze anglojęzycznej również jako penalty contact model). Model ten został zastosowany również w niniejszej pracy.

Ponadto, w przedstawionym modelu przekładni pasowej przyjęto pas jako układ sztywnych członów połączonych ze sobą elementami sprężysto-tłumiącymi. Ponieważ w przekładniach tych pas jest najczęściej poddawany dużym odkształceniom wywołanym przez zginanie pasa, np. pod wpływem krzywizn kół pasowych i ewentualnych rolek napinających, założono, że pas będzie musiał być dyskretyzowany stosunkowo dużą ilością członów. To oczywiście wpływa na prędkość wykonywanych obliczeń, co z kolei przedłuża czas wykonywanych analiz.

W związku z tym zdecydowano, na wstępie opracowywania modelu, wykonać pewne założenia. W tym celu przyjęto płaski (dwuwymiarowy) model przekładni pasowej. Pomija się na przykład zjawisko skręcania wzdłużnego pasa oraz wpływu zjawisk miejscowych (np. zmian przekroju poprzecznego wywołanych klinowaniem się pasa w rowek koła pasowego). Redukcji ulega zatem liczba stopni swobody, czyli również liczba współrzędnych

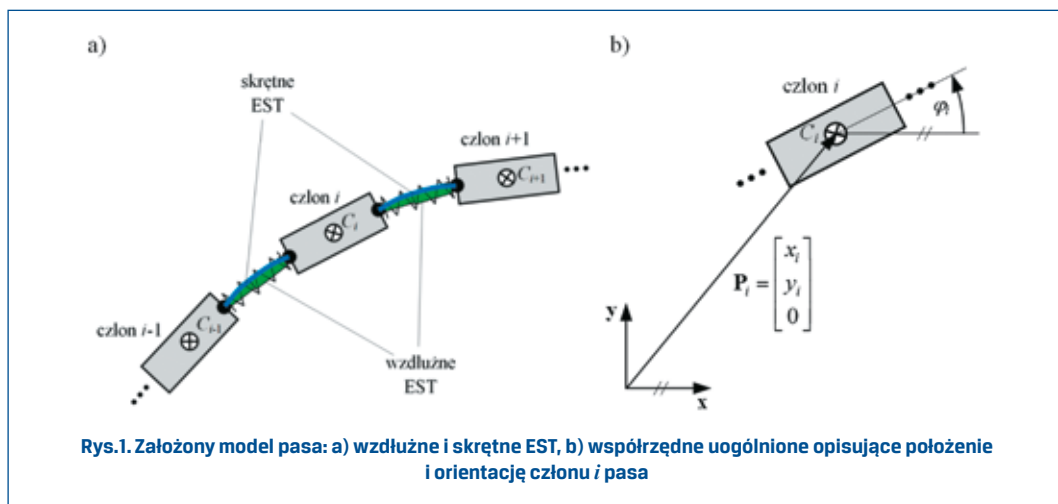
uogólnionych układu. Poza tym znacznie uproszczono równania ruchu, rezygnując w ostatecznej wersji z ich zapisu macierzowego. Pozwoliło to dodatkowo zredukować ilość wykonywanych przez komputer operacji, np. z powodu występowania tzw. macierzy rzadkich. Przyjęto model tarcia, w którym nie uwzględnia się faz tarcia statycznego i kinetycznego. Przyjęto również, że koło pasowe będzie rozważane jako idealnie okrągłe (zmiana odległości opasającego go pasa od środka obrotu koła wynika zatem jedynie z kinematyki zjawisk kontaktowych). Aby zminimalizować błędy operacji numerycznego całkowania równań ruchu oraz dodatkowo przyspieszyć obliczenia, założono, że równania różniczkowe ruchu rozwiązywane będą odpowiednią metodą ze zmiennym krokiem całkowania. Do tego celu wykorzystano metodę Rungego-Kutty Fehlbega.

Powyższe założenia są często stosowane przy tworzeniu modeli przekładni pasowych. Ich korzystnym wpływem na efektywność modelu matematycznego zajmował się m.in. Schindler w pracy [16].

Niewątpliwie dyskretyzacja pasa niesie ze sobą wiele zalet. Wśród nich można by wymienić chociażby możliwość identyfikacji zmian sił tarcia na obwodzie koła pasowego, czy rozkładu sił osiowych na całej długości pasa.

## 2. Model matematyczny

Założono, że pas składa się z  $n_{cz}$  członów. Każde z sąsiadujących ze sobą członów połączono elementami sprężysto-tłumiącymi (oznaczane w dalszej części niniejszego opracowania jako EST) o odpowiednich sztywnościach i tłumieniach wzdłużnych lub skrętnych (rys.1a).



Jak już wspomniano, przyjęto model płaski przekładni. Dla każdego członu  $i$  (gdzie  $i = 0 \dots n_{cz} - 1$ ), przyjęto trzy współrzędne uogólnione (rys.1b): przesunięcie  $x_i$  i  $y_i$  środka masy względem osi  $x$  i  $y$  globalnego układu współrzędnych oraz obrót członu o kąt  $\varphi_i$  względem jego środka masy. Współrzędna  $z_i$  was zero. jest równa zero. Jak zaprezentowano na rys.1b, położenie środka masy członu  $i$  pasa określono za pośrednictwem wektora  $\mathbf{P}_i$ .

Ponadto założono, że w przekładni występuje  $n_k$  kół pasowych „leżących” w płaszczyźnie  $xy$  i wykonujących obrót wokół osi równoległej do  $z$  o kąt  $\theta_j$  (gdzie  $j = 0 \dots n_k - 1$ ). Wektor współrzędnych uogólnionych przyjmie zatem postać:

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_{cz}^T \mid \mathbf{q}_k^T] = [x_0 \ y_0 \ \varphi_0 \ \dots \ x_i \ y_i \ \varphi_i \ \dots \ x_{n_{cz}-1} \ y_{n_{cz}-1} \ \varphi_{n_{cz}-1} \mid \theta_0 \ \dots \ \theta_j \ \dots \ \theta_{n_k-1}], \quad (1)$$

gdzie:  $\mathbf{q}_{cz}$  – wektor współrzędnych uogólnionych wszystkich członów pasa,

$\mathbf{q}_k$  – wektor współrzędnych uogólnionych wszystkich kół pasowych.

Jak wynika z przyjętych założeń, liczba współrzędnych uogólnionych wyniesie  $3n_{cz} + n_k$ .

W pierwszej kolejności dokonano podziału pasa na  $n_{cz}$  członów. Człony modelowanego pasa przyjęto jako jednorodne odcinki o masie  $m_i$  (grubości członów się pomija, a środki mas są usytuowane w środkach geometrycznych tych członów). Masowy moment bezwładności względem pewnej osi  $z_i$  prostopadłej do płaszczyzny ruchu i przechodzącej przez środek masy członu  $i$  wynosi:

$$I_{z_i} = \frac{1}{12} m_i l_i^2, \quad (2)$$

natomiast sumaryczna masa pasa wynosi:

$$m_p = \sum_{i=0}^{n_{cz}-1} m_i. \quad (3)$$

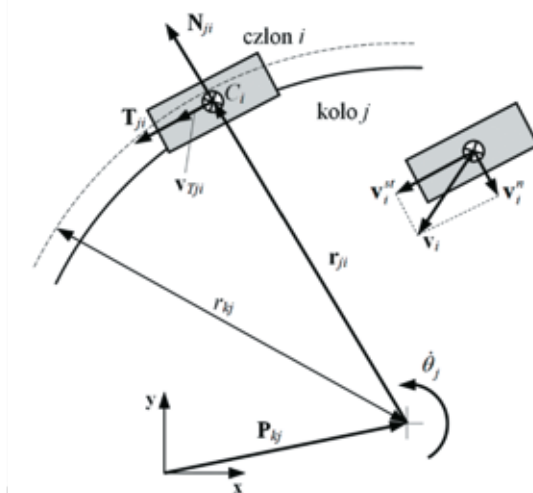
Rozważając konkretny przypadek przekładni, wskazane byłoby sprawdzenie, czy możliwe jest przyjęcie jednorodnego rozkładu masy na całej długości pasa. W takim przypadku wyznaczenie parametrów masowych poszczególnych członów z zależności (2) i (3) jest znacznie uproszczone.

## 2.1. Model kontaktu pas-koło pasowe

Aby uwzględnić w modelu przekładni kontakt pomiędzy członami pasa a kołami pasowymi, zastosowano zapis wektorowy sił. Na rys.2 przedstawiono schemat przyjętego rozkładu sił działających na człon  $i$  pasa, w chwili kontaktu z kołem  $j$ .

Założono, że siły składowe, tj. siła nacisku  $\mathbf{N}_{ji}$  i tarcia  $\mathbf{T}_{ji}$  przyłożone zostaną do środka masy każdego ze stykających się z kołem członów pasa. Takie założenie jest do przyjęcia, jeżeli pominięta zostanie grubość pasa (przez co np. nie analizuje się charakteru naprężeń w jego przekroju poprzecznym, a siła tarcia może zostać sprowadzona do środka  $C_i$ ) i przyjmie się odpowiednio dużą ilość członów dyskretyzujących pas, przez co ich długości

stają się odpowiednio małe. Warto również nadmienić, że podjęte założenia są zgodne z obecnymi tendencjami w zakresie konstruowania pasów. Zmierzają bowiem do zmniejszania wysokości pasa celem ograniczenia deformacji poprzecznej pasa, a zatem do powiększenia jego sztywności poprzecznej [6].



**Rys.2. Przyjęty rozkład składowych prędkości członu  $i$  pasa oraz sił działających na ten człon ze strony koła pasowego  $j$**

Jak na rys. 2 można zauważyć, wektor  $\mathbf{r}_{ji}$  wyznaczony został od środka koła pasowego  $j$  do środka masy członu  $i$ . W przypadku, gdy nastąpi zetknięcie się członu z kołem, ale wartość siły nacisku  $N_{ji}$  jest jeszcze zerowa, długość tego wektora równa jest pewnej arbitralnej wartości  $r_{kj}$ . Zatem w chwili wystąpienia niezerowej siły nacisku (sytuacja przedstawiona na rysunku) zachodzi nierówność:  $r_{ji} < r_{kj}$ . Położenie środka koła w układzie globalnym określono za pośrednictwem wektora  $\mathbf{P}_{kj}$ .

Wektor  $\mathbf{r}_{ji}$  można wyznaczyć z zależności:

$$\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{kj}. \quad (4)$$

Wersor zgodny z kierunkiem i zwrotem wektora  $\mathbf{r}_{ji}$  wynosi:

$$\hat{\mathbf{r}}_{ji} = \frac{\mathbf{r}_{ji}}{|\mathbf{r}_{ji}|}. \quad (5)$$

Głębokość przenikania członu  $i$  pasa z kołem  $j$  można wyznaczyć ze wzoru:

$$p_{ji} = r_{kj} - |\mathbf{r}_{ji}|. \quad (6)$$

Przyjmując założenie, że prędkość liniowa środka koła pasowego jest zerowa, wartość

prędkości przenikania  $\dot{p}_{ji}$  równa jest wartości promieniowej składowej prędkości  $\mathbf{v}_i^n$  (rys. 2). Wartość tę wyznaczono na podstawie następującego iloczynu skalarnego:

$$\dot{p}_{ji} = |\mathbf{v}_i^n| = -\mathbf{v}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ji}^T, \quad (7)$$

gdzie:  $\mathbf{v}_i$  – prędkość środka masy członu  $i$ .

Ponieważ siła nacisku  $\mathbf{N}_{ji}$  wynikająca z kontaktu członu  $i$  z kołem  $j$  ma kierunek zgodny z wersorem promieniowym  $\hat{\mathbf{r}}_{ji}$ , zatem:

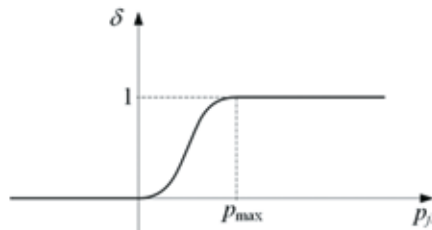
$$\mathbf{N}_{ji} = N_{ji} \hat{\mathbf{r}}_{ji}. \quad (8)$$

Wartość tej siły wyznaczono w zbliżonej postaci, jaką podano w pracy [3], gdzie Autorzy wykazują nieliniową zależność pomiędzy odkształceniem i siłą:

$$N_{ji}(p_{ji}, \dot{p}_{ji}) = c_1 \cdot p_{ji}^2 + c_2 \cdot p_{ji} + \delta(p_{ji}) \cdot b \cdot \dot{p}_{ji}, \quad (9)$$

gdzie:  $c_1, c_2$  – współczynniki sztywności kontaktu pas-koło pasowe,  
 $b$  – współczynnik tłumienia kontaktu pas-koło pasowe.

Na rys. 3 przedstawiono graficznie przebieg funkcji  $\delta(p_{ji})$  użyty w zależności (9).



Rys.3. Przebieg funkcji  $\delta(p_{ji})$

W modelu tym zakłada się, że dla  $p_{ji} \leq 0$  siła  $\mathbf{N}_{ji}$  będzie miała wartość zerową. W chwili wystąpienia kontaktu, dla  $p_{ji}$  niewiele większego od zera, oddziałuje jedynie sprężystość. Zastosowanie funkcji  $\delta(p_{ji})$  powoduje, że wpływ tłumienia zwiększa się (od 0 do  $b$ ) w zakresie  $0 < p_{ji} < p_{max}$ , po to, by osiągnąć „pełne tłumienie” (współczynnik  $b$  jest wtedy w całości przyjmowany do wzoru) po przekroczeniu pewnej arbitralnej wartości  $p_{max}$ . Taki sposób postępowania pozwolił m.in. uniknąć efektu „zlepiania się” elementów w chwili początkowej ich styku (w szczególności, kiedy prędkość  $\dot{p}_{ji}$  jest stosunkowo duża).

Aby zapewnić łagodną zmianę funkcji przejścia  $\delta(p_{ji})$  z zerowego tłumienia do „pełnego tłumienia” (tak jak to przedstawiono na rys.3), opisano ją funkcją stanu składającą się w pewnych określonych przedziałach z funkcji stałych i wielomianu trzeciego stopnia:

$$\delta(p_{ji}) = \begin{cases} 0, & \text{dla } p_{ji} \leq 0, \\ \left(\frac{p_{ji}}{p_{max}}\right)^2 \left(3 - 2\frac{p_{ji}}{p_{max}}\right), & \text{dla } 0 < p_{ji} < p_{max}, \\ 1, & \text{dla } p_{ji} \geq p_{max}. \end{cases} \quad (10)$$

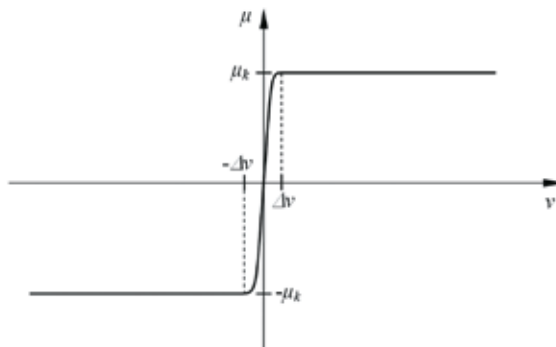
Zastosowanie wzorów (9) i (10) pozwoliło uzależnić składową siły wynikającą z tłumienia w kontakcie nie tylko od prędkości przenikania  $\dot{p}_{ji}$ , ale również od samej głębokości  $p_{ji}$ . Należy równocześnie nadmienić, że zależności te są powszechnie stosowane w modelach kontaktu. Zbliżony model zastosowali m.in. Autorzy oprogramowania MSC.Adams [19].

## 2.2. Model tarcia

Do wyznaczenia siły tarcia wykorzystano model bazujący na uproszczonej charakterystyce współczynnika tarcia. W modelu tym pomija się klasyczne podejście do fazy tarcia statycznego, którego modelowanie jest utrudnione ze względu na zmianę postaci i liczby rozwiązywanych równań. W przypadku styku dwóch współpracujących ze sobą powierzchni wymagane jest wyznaczenie równań statyki, a siła tarcia wynika z tych równań, natomiast w przypadku ich względnego ruchu – siła tarcia jest znana, a potrzebne jest wyznaczenie równań różniczkowych ruchu. Należy zaznaczyć, że podczas całkowania równań różniczkowych ruchu, chwile zmian stanu tarcia są trudne do identyfikacji. Pominięcie fazy tarcia statycznego jest możliwe dzięki uzależnieniu współczynnika tarcia od wartości  $v$  względnej prędkości w połączeniu. Zależność Coulomba, za pośrednictwem której wyznaczana zostaje wartość siły tarcia  $T$ , przyjmie w tym przypadku następującą postać:

$$T = \mu(v) \cdot N. \quad (11)$$

Na rys.4 przedstawiono przyjętą przez Threlfall'a [17] uproszczoną postać charakterystyki współczynnika tarcia. Jak na przedstawionym przebiegu można zauważyć, wartość  $\Delta v$  stanowi pewną arbitralną wartość prędkości  $v$ , od której przyjmuje się wartość współczynnika tarcia kinetycznego  $\mu_k$ .



Rys.4. Uproszczona postać charakterystyki współczynnika tarcia [17]

Powyższą charakterystykę przyjmuje się przy założeniu tych samych wartości współczynnika tarcia statycznego i kinetycznego ( $\mu_s = \mu_k$ ). Ponieważ jednak, jak wykazano w pracy [3], wartości tych współczynników mogą być do siebie zbliżone, postanowiono zastosować uproszczony model przedstawiony na rys.4. Łagodne „przejście” pomiędzy wartościami  $-\mu_k$  i  $\mu_k$  uzyskano, stosując krzywą trzeciego stopnia w zbliżonej postaci do (10).

Przyjęte założenia w pewnym sensie stają się niezgodne z tradycyjnym podejściem do zagadnień tarcia, gdyż najczęściej zakłada się, że tarcie statyczne występuje jedynie przy zerowej wartości prędkości. Jak się jednak okazuje, w rzeczywistości, w stanie zlepiania się dwóch powierzchni, a zatem w zakresie występowania tarcia statycznego, występuje tzw. mikroprzemieszczenie, zwane również mikropoślizgiem lub przemieszczeniem wstępnym. Zjawisko to zostało po raz pierwszy bardziej szczegółowo zbadane w 1926r. niezależnie przez Wierchowskiego i Rankina [11] i było przedmiotem wielu prac, których owocem jest m.in. klasyczna już publikacja Bowden'a i Tabor'a [1], czy szeroko cytowana praca Dahl'a [5]. Najstarszą znaną autorowi pracą, w której przedstawiono wyniki badań potwierdzających istnienie zjawiska mikroprzemieszczenia w przekładniach pasowych jest praca Reynolds'a [15] z 1847 roku.

W analizowanym przypadku, dla tak podatnego styku, jakim jest styk powierzchni gumowego pasa i stalowego koła pasowego, należy założyć, że w zakresie prędkości do pewnych wartości  $\Delta v$  takie zjawisko mikroprzemieszczenia wystąpi. Bowiemy w większości przypadków (pomijając przypadek pasa zębatego) w przekładni pomiędzy pasem a kołem występuje poślizg (w tym również mikroprzemieszczenie), aczkolwiek jest on różny dla różnych rodzajów pasów. Oczywiście ocena intensywności występowania tego zjawiska w przypadku konkretnego rodzaju przekładni pasowej mogłaby nastąpić dopiero po wykonaniu odpowiednich badań doświadczalnych, co zapewne będzie przedmiotem dalszych dociekań autora w zakresie omawianej tematyki. O tym, jak różne mogą być charakterystyki tarcia dla różnych typów pasów, niech świadczą chociażby przykłady różnych założeń odnośnie przyjmowanych modeli tarcia (przyjmując je jako funkcje różnych zmiennych, różny stopień ich nieliniowości) zaprezentowanych w pracach [3, 9, 14]. Niektóre z nich stanowią zależności wyznaczone empirycznie.

Do wyznaczenia wartości współczynnika tarcia niezbędne było wyznaczenie wektora prędkości liniowej fragmentu koła  $j$  w miejscu styku z członem  $i$  pasa:

$$\mathbf{v}_{kj} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_j \times \hat{\mathbf{r}}_{ji}, \quad (12)$$

gdzie:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_j \end{bmatrix} - \text{wektor prędkości kątowej koła } j.$$

Rozważając przypadek tarcia członu  $i$  pasa o koło, należy wyznaczyć również styczną składową wektora prędkości środka masy członu  $i$ :



$$\mathbf{v}_i^{st} = (\mathbf{v}_i \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{ji}^T) \hat{\boldsymbol{\tau}}_{ji}. \quad (13)$$

W powyższej zależności niezbędna jest znajomość wektora  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{ji}$  równoległego do stycznej przechodzącej przez środek masy członu  $i$ , który można wyznaczyć według następującego wzoru:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_{ji} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{ji}}{|\boldsymbol{\tau}_{ji}|} = \frac{\hat{\mathbf{Z}} \times \hat{\mathbf{r}}_{ji}}{|\boldsymbol{\tau}_{ji}|}. \quad (14)$$

Ponieważ kąt pomiędzy wektorami  $\hat{\mathbf{Z}}$  i  $\hat{\mathbf{r}}_{ji}$  jest niezmienny i wynosi  $90^\circ$  (gdyż jak już wspomniano, koło „leży” w płaszczyźnie  $\mathbf{xy}$  a oś obrotu jest równoległa do osi  $z$ ), zatem  $|\hat{\mathbf{Z}} \times \hat{\mathbf{r}}_{ji}| = 1$ , a zależność (14) można uprościć:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_{ji} = \hat{\mathbf{Z}} \times \hat{\mathbf{r}}_{ji}. \quad (15)$$

W praktyce, w trakcie ruchu koła, wektor  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{ji}$  ma kierunek i zwrot zgodny z kierunkiem i dodatnim zwrotem wektora prędkości  $\mathbf{v}_{kj}$ . Jednakże w przypadku braku ruchu koła  $j$  (kiedy  $\mathbf{v}_{kj} = 0$ ) jest możliwe zidentyfikowanie za pośrednictwem  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{ji}$  kierunku stycznego do tego koła (wyznaczenie wektora z wektora zerowego  $\mathbf{v}_{kj}$  staje się w takim przypadku niemożliwe).

Prędkość pomiędzy elementami trącymi (zaprezentowana na rys.2) wynosi zatem:

$$\mathbf{v}_{Tji} = \mathbf{v}_{kj} - \mathbf{v}_i^{st}. \quad (16)$$

Siłę tarcia określono zależnością:

$$\mathbf{T}_{ji} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}_{Tji}) \cdot N_{ji}, \quad (17)$$

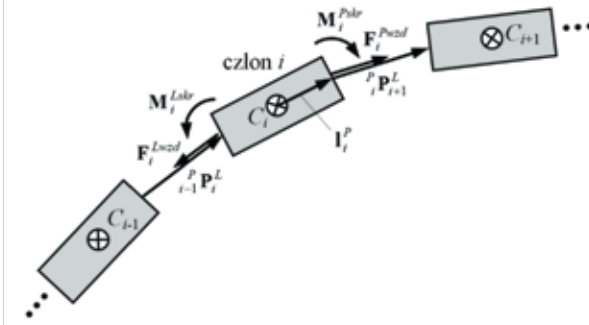
gdzie:  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}_{Tji}) = \mu(v_{Tji}) \hat{\mathbf{v}}_{Tji}$  – wektorowy zapis współczynnika tarcia,  
 $\hat{\mathbf{v}}_{Tji}$  – wektor zgodny z kierunkiem i zwrotem wektora  $\mathbf{v}_{Tji}$ .

Jak można zauważyć, powyższa zależność stanowi pewną zmodyfikowaną postać zależności (11).

W założonym modelu tarcia nie uwzględnia się odrębnych stref styku i poślizgu na obwodzie koła pasowego. Autor zdaje sobie sprawę z tego, iż uwzględnienie tych stref wpłynęłoby na dokładniejsze odwzorowanie zjawisk występujących pomiędzy kołem a pasem. Planowane jest zatem uwzględnienie ich w dalszych pracach.

### 2.3. Równania ruchu

Na rys.5 przedstawiono schemat przyjętego rozkładu sił i momentów działających na człon  $i$  ze strony sąsiadujących z nim członów.



Rys.5. Przyjęty rozkład sił i momentów działających na człon  $i$  ze strony sąsiadujących członów

Wartości sił i momentów reakcji we wzdlużnych i skrętnych EST łączących człon  $i-1$  z  $i$  opisano zależnościami, które w literaturze znane są jako zależności Kelvina-Voigta [18]:

$$F_i^{Lwzd} = F_{i-1}^{Pwzd} = c_{wzd} (\Delta l_i^L)^{e_{wzd}} + b_{wzd} \dot{\Delta l}_i^L, \quad (18)$$

$$M_i^{Lskr} = M_{i-1}^{Pskr} = c_{skr} (\varphi_i - \varphi_{i-1})^{e_{skr}} + b_{skr} (\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}), \quad (19)$$

gdzie:  $F_i^{Lwzd}$ ,  $F_i^{Pwzd}$  – wartości sił reakcji we wzdlużnym EST odpowiednio lewym (łączącym człon  $i$  z członem  $i-1$ ) i prawym (łączącym człon  $i$  z członem  $i+1$ ),

$M_i^{Lskr}$ ,  $M_i^{Pskr}$  – wartości momentów skręcających w skrętnym EST odpowiednio lewym i prawym,

$c_{wzd}$ ,  $b_{wzd}$  – współczynniki sztywności i tłumienia wzdlużnego EST pasa,

$c_{skr}$ ,  $b_{skr}$  – współczynniki sztywności i tłumienia skrętnego EST pasa,

$e_{wzd}$ ,  $e_{skr}$  – współczynniki potęgowe będące miarą nieliniowości sztywności wzdlużnej i skrętnej EST pasa,

$\Delta l_i^L = \Delta l_{i-1}^P = \left| \begin{matrix} P \\ i-1 \end{matrix} \mathbf{P}_i^L \right|$  – odkształcenie wzdlużnego EST pasa,

$\dot{\Delta l}_i^L = \dot{\Delta l}_{i-1}^P = \mathbf{v}_i^{L'} - \mathbf{v}_{i-1}^{P'}$  – prędkość odkształcania wzdlużnego EST pasa,

$\mathbf{v}_i^{L'} = \mathbf{v}_i^L \cdot \left( \begin{matrix} P \\ i-1 \end{matrix} \hat{\mathbf{P}}_i^L \right)^T$ ,  $\mathbf{v}_{i-1}^{P'} = \mathbf{v}_{i-1}^P \cdot \left( \begin{matrix} P \\ i-1 \end{matrix} \hat{\mathbf{P}}_i^L \right)^T$  – rzuty wektorów prędkości  $\mathbf{v}_i^L$  oraz  $\mathbf{v}_{i-1}^P$  na wektor  $\begin{matrix} P \\ i-1 \end{matrix} \mathbf{P}_i^L$ ,

$\begin{matrix} P \\ i-1 \end{matrix} \hat{\mathbf{P}}_i^L$  – wersor zgodny z kierunkiem i zwrotem wektora  $\begin{matrix} P \\ i-1 \end{matrix} \mathbf{P}_i^L$ .

Wektor  $\begin{matrix} R \\ i-1 \end{matrix} \mathbf{P}_i^L$  można wyznaczyć za pośrednictwem następującej zależności:

$$\begin{matrix} R \\ i-1 \end{matrix} \mathbf{P}_i^L = \mathbf{P}_i - \mathbf{I}'_i - \mathbf{P}_{i-1} + \mathbf{I}'_{i-1}. \quad (20)$$

gdzie:

$$\mathbf{I}'_i = \begin{bmatrix} \frac{l_i}{2} \cos \varphi_i \\ \frac{l_i}{2} \sin \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad - \text{ wektor wyznaczający kierunek i połowę długości członu } i \text{ (wektor } \mathbf{I}'_{i-1} \text{ jest wyznaczany w ten sam sposób).}$$

Siła  $\mathbf{F}_i^{Lwzd}$  ma kierunek zgodny z kierunkiem wektora  ${}^P \mathbf{P}_{i-1}^L$ , ale zwrot do niego przeciwny, natomiast siła  $\mathbf{F}_i^{Pwzd}$  ma kierunek i zwrot zgodny z kierunkiem i zwrotem wektora  ${}^P \mathbf{P}_{i+1}^L$ . Jak można zauważyć na rys.5, wektor ten określa kierunek, zwrot i wielkość wysunięcia wzdłużnego w EST łączącym człony  $i-1$  z  $i$  oraz  $i$  z  $i+1$ .

Do wyprowadzenia równań ruchu posłużył formalizm Newtona-Eulera. Równania ruchu członu  $i$  przyjmują postać:

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = (\mathbf{F}_i^{Lwzd} + \mathbf{F}_i^{Pwzd} + \sum_{j=0}^{n_i-1} (\mathbf{N}_{ji} + \mathbf{T}_{ji}) + m_i \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{X}}^T, \\ m_i \ddot{y}_i = (\mathbf{F}_i^{Lwzd} + \mathbf{F}_i^{Pwzd} + \sum_{j=0}^{n_i-1} (\mathbf{N}_{ji} + \mathbf{T}_{ji}) + m_i \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{Y}}^T, \\ I_{z_i} \ddot{\varphi}_i = (\mathbf{M}_i^{Lwzd} + \mathbf{M}_i^{Pwzd} + \mathbf{M}_i^{Lskr} + \mathbf{M}_i^{Pskr}) \cdot \hat{\mathbf{Z}}^T, \end{cases} \quad (21)$$

gdzie:  $\hat{\mathbf{X}}^T = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $\hat{\mathbf{Y}}^T = [0 \ 1 \ 0]$ ,  $\hat{\mathbf{Z}}^T = [0 \ 0 \ 1]$  - wersory o kierunkach i zwrotach zgodnych z odpowiednio osiami  $x$   $y$  z globalnego układu współrzędnych,

$$\mathbf{M}_i^{Lwzd} = -\mathbf{I}'_i \times \mathbf{F}_i^{Lwzd},$$

$$\mathbf{M}_i^{Pwzd} = \mathbf{I}'_i \times \mathbf{F}_i^{Pwzd},$$

$\mathbf{g}$  - wektor przyspieszenia ziemskiego.

Jak można łatwo zauważyć, równania (21) można uprościć. Należy zatem, w trakcie opracowywania modelu komputerowego, podstawić po prawych stronach znaków równości odpowiednie składowe wektorów podanych w nawiasach.

Przyjęto, że ruch kół pasowych będzie się odbywał za pośrednictwem zadanych momentów napędowych. Równanie ruchu koła pasowego  $j$  będzie miało postać:

$$I_{z_j} \ddot{\theta}_j = M_{nj} - \sum_{i=0}^{n_i-1} \mathbf{M}_{Tji} \cdot \hat{\mathbf{Z}}^T, \quad (22)$$

gdzie:  $I_{z_j}$  - masowy moment bezwładności koła pasowego  $j$ ;

$M_{nj}$  - wartość momentu napędowego,

$\mathbf{M}_{Tji} = \hat{\mathbf{r}}_{ji} \times \mathbf{T}_{ji}$  - moment siły tarcia wynikający z oddziaływania na koło członu  $i$  pasa.

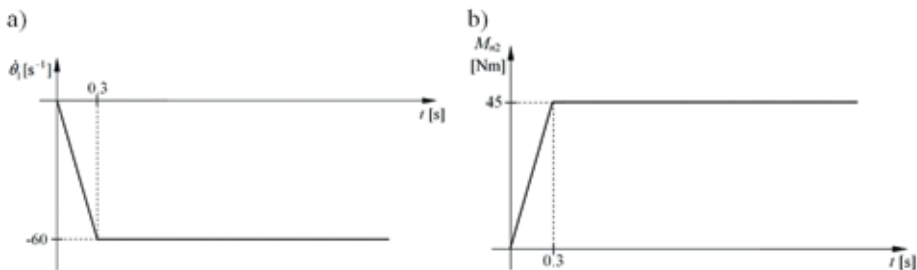
Jak już wcześniej wspomniano, równania różniczkowe ruchu rozwiązano za pośrednictwem metody Rungego-Kutty-Fehlberga ze zmiennym krokiem całkowania. Wyniki obliczeń wygenerowano w postaci odpowiednich czasowych przebiegów za pośrednictwem środowiska MATLAB.

### 3. Weryfikacja modelu

Do tak przygotowanego modelu wprowadzono parametry przekładni omówionej w pracy [2], uwzględniając zarówno parametry geometryczne badanej tam przekładni, jak i przedstawione parametry fizyczne (w tym sztywności i tłumienia pasa, parametry tarcia i kontaktu):

$$\begin{array}{lll}
 c_{wzd} = 10^4 \text{ N/m}, & b_{wzd} = 0.5 \text{ Ns/m}, & c_{skr} = 0.0208 \text{ Nm/rad}, \\
 b_{skr} = 0, & c_1 = 0, & c_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}, \\
 b = 300 \text{ Ns/m}, & p_{max} = 0.001 \text{ m}, & \Delta v = 10^{-5} \text{ m/s}, \\
 \Delta_{max} = 10^{-4} \text{ m}, & m_i = 1.036 \cdot l_i \text{ kg}, & I_{z_1} = I_{z_2} = 0.02 \text{ kgm}^2.
 \end{array}$$

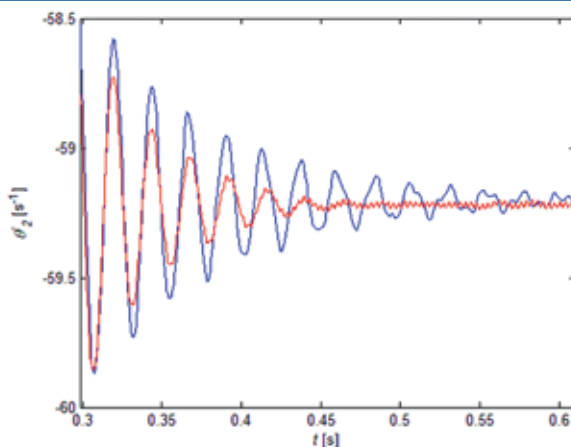
Ponadto założono te same przebiegi wymuszenia kinematycznego na kole czynnym oraz momentu oporu na kole biernym, jak w pracy [2]. Przebiegi te przedstawiono odpowiednio na rys.6a i 6b.



**Rys. 6. Przyjęte czasowe przebiegi wymuszeń: a) prędkości kątowej na kole czynnym, b) momentu oporu na kole biernym**

Do przeprowadzenia weryfikacji niniejszego modelu należało wprowadzić wspomniane wymuszenie kinematyczne w miejsce równania różniczkowego ruchu koła czynnego. Doprowadziło to do zmniejszenia o jeden liczby równań ruchu.

Na rys.7 przedstawiono wykres porównawczy przebiegów prędkości kątowej koła biernego uzyskanego na odpowiednim stanowisku badawczym przez Autorów pracy [2] i za pośrednictwem modelu omówionego w niniejszej pracy. Przedstawiony fragment przebiegu przedstawia drgania skrajne koła biernego pod wpływem zmiany postaci przebiegu funkcji wymuszającej i oporu w chwili 0.3 s.



**Rys. 7. Porównanie przebiegów prędkości kątowej koła biernego**  
 — przebieg porównawczy [2], — przebieg uzyskany

Na przedstawionym przebiegu można zauważyć dość dobrą zgodność wyników w odniesieniu do odczytanego z wykresu poślizgu i częstości drgań. Równocześnie zauważono większą tłumienność modelu pasa zaprezentowanego w niniejszej pracy, co skutkowało na przedstawionym wykresie mniejszą amplitudą drgań i szybszym ich wytłumieniem. Badanie przyczyn tych różnic będzie przedmiotem dalszych dociekań autora.

## 4. Wyniki analiz

W dalszej kolejności parametry przekładni pasowej i pasa przyjęto na podstawie prac [2, 3, 4]. W pracach tych Autorzy podjęli się zadania wyznaczenia parametrów sztywności i tłumienia wzdłużnego i skrętnego pasa oraz parametrów niezbędnych do uwzględnienia zjawisk kontaktowych, tj. sztywności i tłumienia w modelu kontaktu oraz współczynników tarcia. Zgodnie z informacjami zawartymi w pracach [3, 4] analizie poddano pas klinowy wielorowkowy (znany również jako pas poliklinowy lub Poli-V) typu 5pk o długości 1.2 m. Tego typu pasy stosowane są w przekładniach znacznie obciążonych i pracujących w warunkach dużych prędkości obrotowych. Parametry przekładni przyjęto zgodnie z danymi podanymi w pracy [4]. W przekładni tej nie występują rolki napinające, a koło czynne i bierne posiada ten sam promień  $r_{k1} = r_{k2} = r_k = 0.027$  m. Odległość między kołami wynosi  $l_p = 0.515$  m. Ze względu na stosunkowo niewielkie promienie kół pasowych należało pas zdyskretyzować odpowiednio dużą ilością członów. Kierowano się tu przede wszystkim odpowiednim (zadowalającym) odwzorowaniem krzywizn pasa na obwodzie kół, co – jak się okazało z przeprowadzonych eksperymentów – ma znaczny wpływ na dokładność odwzorowania zjawisk kontaktowych, w tym m.in. poślizgu pasa. Ostatecznie przyjęto do analiz 150 członów o jednakowej długości.

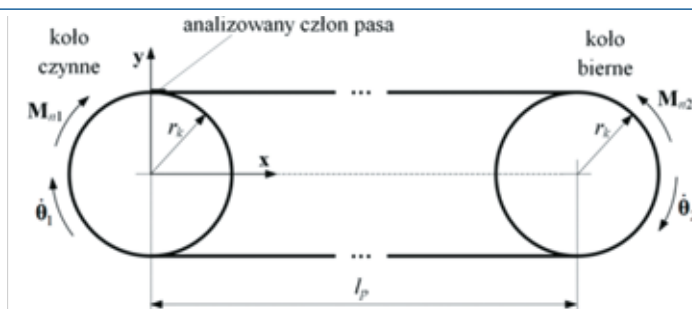
Należy nadmienić również, że zmiana wartości  $\Delta v$  (o ile przyjmuje się odpowiednio małą) nie wpływała znacząco na uzyskiwane wyniki analiz.

Pas naprężono wstępnie tak, by siła w pasie wyniosła ponad 550 N. Współczynniki tarcia przyjęto zgodnie z informacjami zawartymi w pracy [3]:

$$\begin{array}{lll}
 c_{wzd} = 1.52 \cdot 10^5 \text{ N/m}, & b_{wzd} = 20.5 \text{ Ns/m}, & c_{skr} = 0.026 \text{ Nm/rad}, \\
 b_{skr} = 0, & c_1 = 3.0256 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2, & c_2 = 6.5 \cdot 10^5 \text{ N/m}, \\
 b = 300 \text{ Ns/m}, & p_{max} = 0.001 \text{ m}, & \Delta v = 10^{-5} \text{ m/s}, \\
 \Delta_{max} = 10^{-4} \text{ m}, & m_i = 0.096 \cdot l_i \text{ kg}. & 
 \end{array}$$

Założono, że dla obu kół pasowych wartości tych współczynników będą takie same. Współczynnik tarcia przyjęto jako  $\mu_s = \mu_k = 1$ .

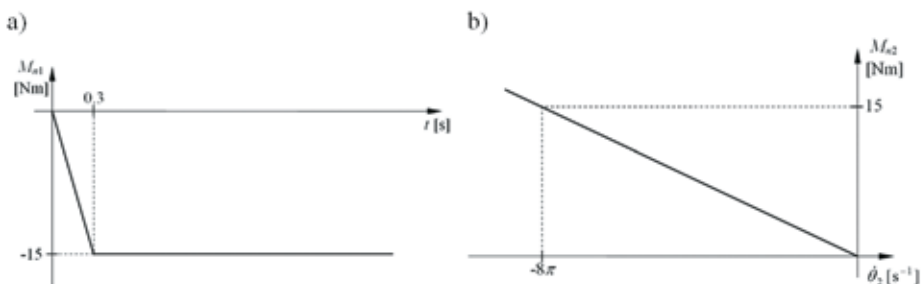
Przyjęto osie globalnego układu współrzędnych w ten sposób, że początek pokrywał się ze środkiem obrotu koła pasowego czynnego, a oś  $y$  była przeciwnie skierowana do wektora siły grawitacji, czyli w kierunku „do góry”. Oś  $x$  skierowano do środka obrotu koła pasowego biernego. Przyjęte parametry przekładni pasowej wraz globalnym układem współrzędnych zobrazowano na schemacie przedstawionym na rys.8.



Rys.8. Przyjęte parametry analizowanej przekładni

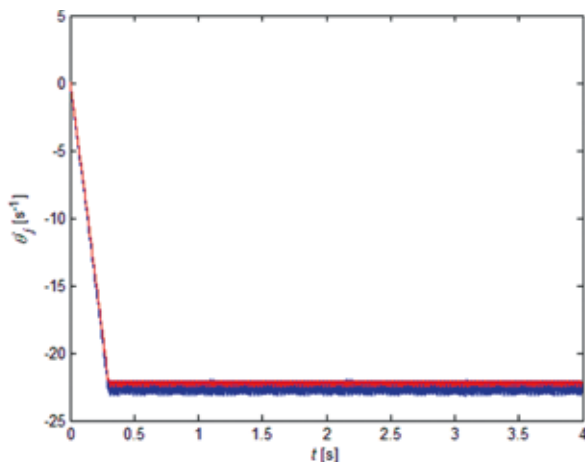
Jak już wspomniano przy okazji omawiania równań ruchu, założono wymuszenie siłowe momentem napędowym. Do analizy przyjęto czasowy przebieg wartości momentu napędowego  $\mathbf{M}_{n1}$  na kole czynnym (napędzającym) w postaci przedstawionej na rys. 9a (na rys. 8 przedstawiono kierunek i zwrot działania tego momentu). Założono, że po czasie 0.3 s osiągnięta zostanie wartość 15 Nm. Po tym czasie wartość ta pozostanie stała.

Przyjęto również, że na kole biernym wartość momentu oporu  $\mathbf{M}_{n2}$  uzależniona będzie od prędkości kątowej tego koła, a wartość 15 Nm (czyli zgodna z wartością momentu napędowego przyłożonego do koła czynnego) osiągnięta zostanie przy prędkości 4 obr/s. Na rys. 9b przedstawiono przebieg tego momentu (na rys. 8 przedstawiono jego kierunek i zwrot). Jak można zauważyć, moment napędowy i oporu zrealizowane zostały odpowiednio za pośrednictwem funkcji przedziałami liniowej i liniowej.



Rys.9. Przyjęte przebiegi wymuszeń: a) momentu napędowego na kole czynnym w funkcji czasu, b) momentu oporu na kole biernym w funkcji prędkości kątowej

Tak przyjęte wartości napięcia wstępnego pasa oraz momentu napędowego i oporu powinny, w przypadku idealnej przekładni bez występującego mikropoślizgu lub poślizgu pasa, spowodować w przybliżeniu dwukrotne, w relacji do napięcia wstępnego, powiększenie sił reakcji w części czynnej pasa i zredukowanie tej siły prawie do zera – w przypadku części biernej pasa. Z racji występujących tam mikropoślizgów, poślizgów i drgań, dysproporcja ta częściowo zanika.



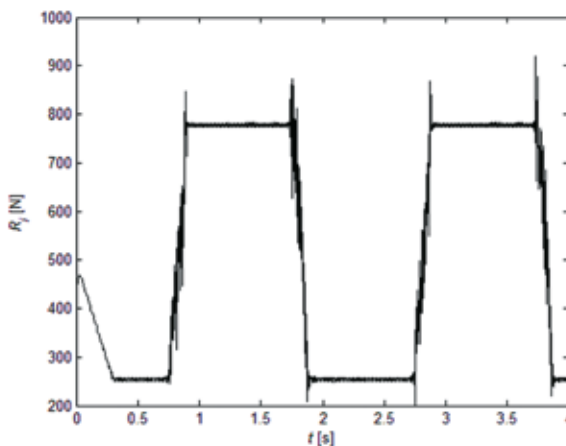
Rys.10. Uzyskane czasowe przebiegi prędkości kątowych kół a) — koło czynne, b) — koło bierne

Pod wpływem zadanych momentów napędowego i oporu uzyskano odpowiedni ruch przekładni. Na rys. 10 przedstawiono uzyskane prędkości kątowe kół czynnego i biernego. Jak można zauważyć, po osiągnięciu czasu 0.3 s (co odpowiada wartości momentu 15 Nm) przekładnia nie zwiększa już swojej prędkości i osiąga około -22 rad/s. Wartość ta jest mniejsza niż należałoby się spodziewać, odczytując z przebiegów wymuszeń. Spadek wartości prędkości wynika bowiem z rozproszenia energii w EST, poprzez tarcie i tłumienie w modelu kontaktu.

Należy nadmienić, że po rozpędzeniu się przekładni do odpowiedniej (przyjętej) prędkości poślizg wyniósł niecałe 1.5%. Wartość tego poślizgu może zależeć od przyjętego momentu oporu, wstępnego napięcia pasa, ale również może zależeć od założeń przyjętych do modelu, w tym m.in. parametrów tarcia i kontaktu. Jak już wcześniej wspomniano, tematyka ta będzie przedmiotem dalszych rozważań autora.

Postanowiono przyrzeć się pewnemu konkretnemu członowi (który zaznaczono na rys. 8) i sąsiadującemu z nim EST, w celu uzyskania odpowiednich czasowych przebiegów sił oddziaływania ze strony kół pasowych i sąsiednich członów.

Na rys. 11 przedstawiono czasowy przebieg wartości siły reakcji w wybranym wzdłużnym EST (położenie tego elementu w chwili początkowej przedstawiono na rys. 11).

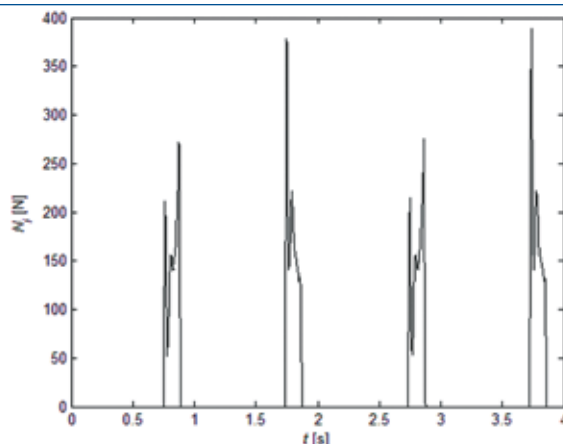


**Rys. 11. Uzyskany czasowy przebieg wartości siły reakcji w wybranym wzdłużnym EST**

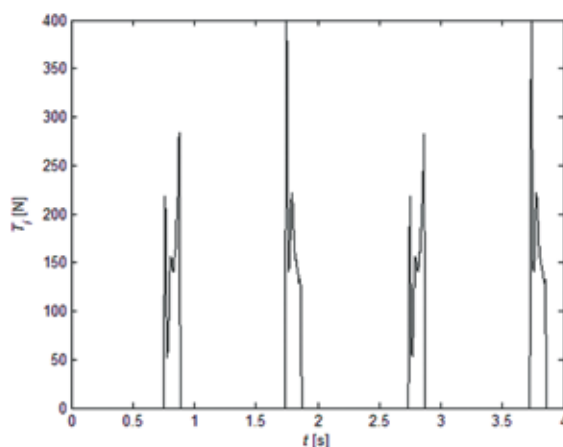
Na uzyskanym przebiegu można zauważyć, że wartość siły zmienia się „skokowo”. W chwili początkowej, kiedy przekładnia rozpoczyna swoją pracę, następuje krótkotrwały okres stabilizacji układu. W przedziale czasu do 0.75 s analizowany EST znajdował się w części biernej (górnej) pasa. W tym przypadku wartość siły po rozpędzeniu wyniosła około 250 N. Po tym czasie wartość siły gwałtownie wzrasta, by osiągnąć w przedziale czasu ok. 0.9-1.74 s wartość około 780 N. W tym momencie EST znajdował się w części czynnej (dolnej) pasa. W dalszej części przebiegu widać, że EST kilkakrotnie „przechodzi” do części biernej i czynnej pasa. Przedziały czasu odpowiadające gwałtownym zmianom siły odpowiadają momentom stosunkowo krótkotrwałej współpracy członu z kołami pasowymi przekładni.

Kolejne przebiegi przedstawiają wartości sił nacisku ze strony kół pasowych na wybrany człon pasa (rys. 12) oraz wartości sił tarcia (rys. 13) powstałych pod wpływem oddziaływania tych sił.





Rys.12. Uzyskany czasowy przebieg wartości siły nacisku kół pasowych na wybrany człon pasa

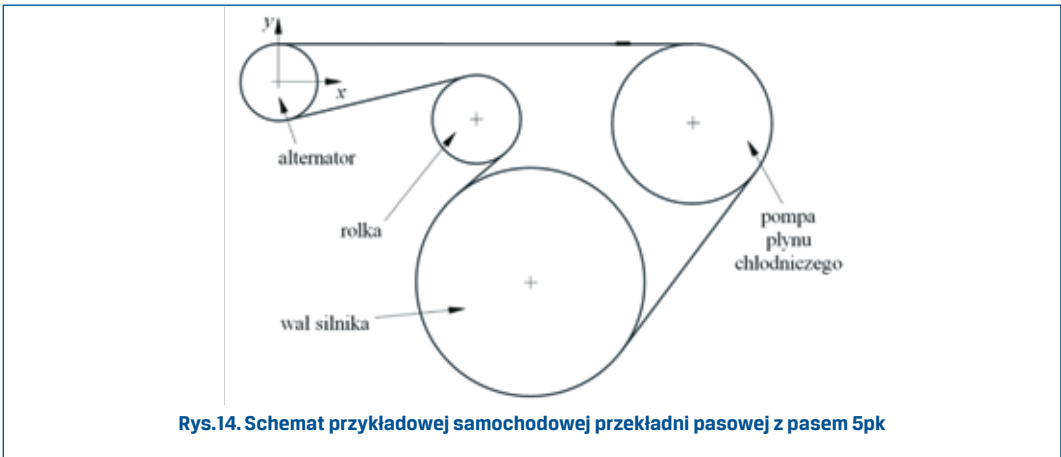


Rys.13. Uzyskany czasowy przebieg wartości siły tarcia na styku kół pasowych i wybranego członu pasa

Zgodnie z ogólną wiedzą dotyczącą przekładni pasowych, zawartych m.in. w pracy [6], siła nacisku stopniowo maleje na obwodzie koła czynnego (patrzac w kierunku od części czynnej do części biernej pasa) i stopniowo rośnie na obwodzie koła biernego (patrzac w kierunku od części biernej do części czynnej pasa). Zależność tę można zauważyć na rys. 12. Analizowany człon pasa w pierwszej kolejności „przechodzi” przez koło bierne (pierwszy fragment niezerowych rosnących wartości sił nacisku), aby w dalszej kolejności „przechodzić” przez koło czynne (drugi fragment niezerowych malejących sił nacisku). Ponieważ przyjęte z pracy [3] współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego bliskie były jedności, znaczne podobieństwo obu powyższych przebiegów może wynikać jedynie z faktu, iż w trakcie analizy przeważało tarcie statyczne rozwinięte lub kinetyczne.

## 5. Przykładowa przekładnia z zastosowanym pasem 5pk

Poniżej przedstawiono przykładowe zastosowanie zaprezentowanego aparatu matematycznego do analizy dynamiki samochodowej przekładni pasowej napędzającej alternator i pompę płynu chłodniczego. Na rys.14 przedstawiono rozmieszczenie uwzględnionych elementów przekładni. Jak widać, w przekładni tej występują koła pasowe wału silnika, alternatora, pompy płynu chłodniczego (wykonujące ruch prawoskrętny) oraz rolka napinająca pas (wykonująca ruch lewoskrętny). Początek globalnego układu współrzędnych przyjęto w środku koła alternatora.



Rys.14. Schemat przykładowej samochodowej przekładni pasowej z pasem 5pk

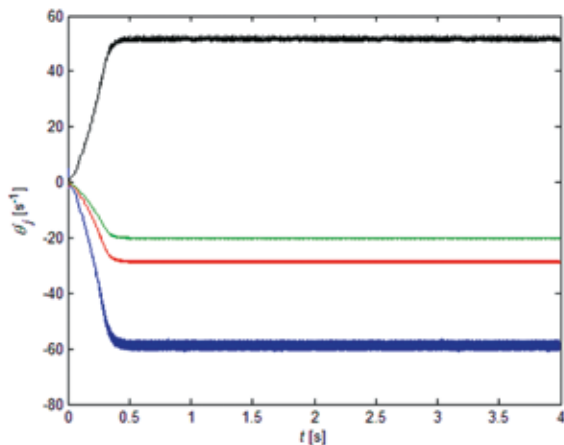
Promień koła pasowego na wale silnika przyjęto jako  $r_1 = 0.08$  m, promień koła alternatora jako  $r_2 = 0.027$  m, promień koła pompy płynu chłodniczego jako  $r_3 = 0.056$  m oraz promień rolki jako  $r_4 = 0.031$  m.

Założono, iż pas będzie naprężony siłą o wartości 550 N. Wartości parametrów sztywności i tłumienia wzdłużnego i skrętnego EST oraz tarcia i kontaktu pomiędzy pasem a kołami przyjęto zgodnie z danymi przyjętymi w poprzednim przykładzie. Ze względu na brak danych tarcia i kontaktu pomiędzy pasem a rolką napinającą założono, iż będą to te same wartości jak w przypadku kół pasowych. Należy zdawać sobie sprawę, iż model byłby bardziej wiarygodny, jeżeli uzupełniłoby się te dane np. na podstawie przeprowadzonych badań stanowiskowych.

Ponadto, do koła pasowego wału silnika przyłożono czasowy przebieg momentu napędowego w tej samej postaci co na rys. 9a. Dla potrzeb niniejszych analiz założono, iż pozostałe koła oraz rolka napinająca pozostaną swobodne.

Na rys.15 przedstawiono uzyskane przebiegi prędkości kątowych kół pasowych i rolki. Ze względu na przyjęty lewoskrętny ruch obrotowy jako dodatni a prawoskrętny – jako ujemny, na wykresie można zauważyć, iż koło na wale silnika, koło alternatora i pompy płynu chłodniczego obracają się z ujemnymi wartościami prędkości kątowych, natomiast rolka – z dodatnimi wartościami. Pod wpływem występujących oporów ruchu, prędkość po

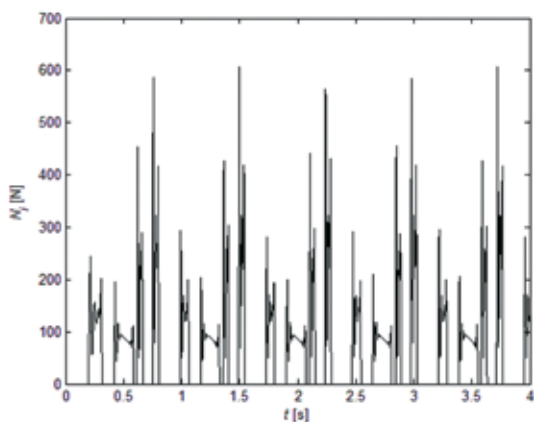
upływie 0.5 s ulega ustabilizowaniu i wynosi około 20 rad/s. Ustabilizowanie się prędkości, pomimo występującej stałej wartości momentu napędowego, wynika z faktu, iż moment ten został wyrównoważony oporami w przekładni.



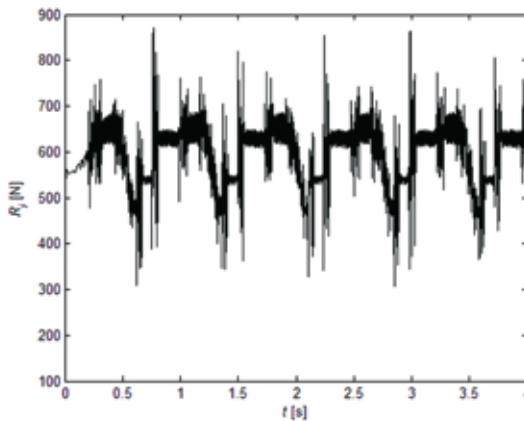
Rys.15. Uzyskane czasowe przebiegi prędkości kątowych

a) — koła na wale silnika, b) — koła alternatora, c) — koła pompy, d) — tensioner idler

Na rys. 16 przedstawiono uzyskany czasowy przebieg wartości sił nacisku ze strony kół pasowych, działający na wybrany człon pasa (położenie tego elementu w chwili początkowej przedstawiono na rys. 14).



Rys.16. Uzyskany czasowy przebieg wartości sił nacisku kół pasowych na wybrany człon pasa



**Rys.17. Uzyskany czasowy przebieg wartości siły reakcji w wybranym wzdłużnym EST**

Największe siły nacisku występują na kole alternatora (osiągające wartości do około 600 N) oraz rolce (do około 450 N). W przypadku niniejszej analizy, decydujący wpływ na wartość siły nacisku ma promień koła. W przypadku rolki i koła alternatora promienie te są najmniejsze.

Na rys. 17 przedstawiono czasowy przebieg wartości siły reakcji w wybranym wzdłużnym EST. Można zauważyć (aczkolwiek nie tak wyraźnie jak na rys. 11) krótkotrwałe chwile przemieszczania się analizowanego EST pomiędzy kołami przekładni jako fragmenty przebiegu o stałych wartościach siły reakcji.

## 6. Podsumowanie

Zaproponowany model przekładni pasowej i przedstawione przykładowe wyniki nie wyczerpują poruszanej tematyki, lecz stanowią zaledwie początek rozważań. Zastosowanie modelu tarcia z uwzględnionym mikroprzemieszczeniem niewątpliwie daje wiele możliwości, lecz, należałoby to podkreślić, powinny być one wsparte wynikami badań stanowiskowych. Szczególnie ważne byłoby rozpoznanie parametrów opisujących własności fizyczne pasa, w tym jego sztywność, właściwości tłumienne, a ponadto zjawiska tarcia i kontaktu pomiędzy pasem a kołem pasowym lub rolkami napinającymi. Tego typu badania były wykonywane m.in. przez autorów cytowanych już prac [3, 4].

Szczególnie ważne jest to, że model został opracowany w ten sposób, aby przy równoczesnej jego złożoności (model dyskretny pasa, zjawiska tarcia z mikroprzemieszczeniem i kontaktu) zapewniał relatywnie wysoką efektywność numeryczną. W dalszej części podjętych prac autor skupi się nad zastosowaniem wielowątkowości do wyznaczania sił kontaktu poszczególnych członów pasa z kołem, co zdaniem Autora pracy [16] znacząco wpływa na prędkość obliczeń. Spowodowane to jest lepszym dostosowaniem tak

opracowanej aplikacji do – obecnie najczęściej stosowanych w komputerach – kilkurdzeniowych procesorów (obliczenie sił kontaktu może zostać rozdzielone równoległe na kilka rdzeni).

Niewątpliwie model można rozwijać. Szczególnie interesująca, zdaniem autora, byłaby analiza przypadku występowania zanieczyszczeń na fragmencie pasa, np. filmu olejowego. Zjawisko to jest szczególnie niebezpieczne, gdyż, oprócz wzrostu poślizgu, powoduje większe (zatem nierównomierne) zużycie fragmentów niezanieczyszczonych pasa. W takim przypadku wiązałoby się to z nieznaczną modyfikacją modelu. Niezbędne byłoby bowiem przyjęcie różnych wartości tarcia dla każdego z członów pasa.

## 7. Literatura

- [1] BOWDEN F.P., TABOR D.: *The friction and lubrication of solids – Part II*. Oxford University Press, 1964.
- [2] ČEPON G., BOLTEŽAR M.: *Dynamics of a belt-drive system using a linear complementarity problem for the belt-pulley contact description*. Journal of Sound and Vibration, 319, 2009, s. 1019-1035.
- [3] ČEPON G., MANIN L., BOLTEŽAR M.: *Experimental identification of the contact parameters between a V-ribbed belt and a pulley*. Mechanism and Machine Theory, 45, 2010, s. 1424-1433.
- [4] ČEPON G., MANIN L., BOLTEŽAR M.: *Introduction of damping into the flexible multibody belt-drive model: A numerical and experimental investigation*. Journal of Sound and Vibration, 324, 2009, s. 283-296.
- [5] DAHL P.R.: *A Solid Friction Model*. Report No. TOR-0158(3107-18)-1, Aerospace Corporation Report, 1968.
- [6] DUDZIAK M.: *Przekładnie cięgnowe*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.
- [7] EULER M.L.: *Remarques sur l'effect du frottement dans l'equilibre*. Mém. Acad. Sci., Berlin, 1762, s. 265-278.
- [8] FAWCETT J.N.: *Chain and belt drives – a review*. Shock Vibrations Digest, 13(5), 1981, s. 5-12.
- [9] JULIO G., PLANTE J.-S.: *An experimentally-validated model of rubber-belt CVT mechanics*. Mechanism and Machine Theory, 46, 2011, s. 1037-1053.
- [10] KIM D., LEAMY M.J., FERRI A.A.: *Dynamic Modeling and Stability Analysis of Flat Belt Drives Using an Elastic/Perfectly Plastic Friction Law*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 133, 2011, s. 1-10.
- [11] KRAGEL'SKIJ I.V., GITIS, N.V.: *Friktionnyje avtokolebanija*. Akademija Nauk SSSR, Nauka, Moskva, 1987.
- [12] LEAMY M.J., WASFY T.M.: *Analysis of belt-drive mechanics using a creep-rate-dependent friction law*. Journal of Applied Mechanics, Trans. of ASME, 69, 2002, s. 763-771.
- [13] LEAMY M.J., WASFY T.M.: *Dynamic finite element modeling of belt drives*. 18th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, ASME International 2001 DETC.
- [14] LEAMY M.J., WASFY T.M.: *Transient and Steady-State Dynamic Finite Element Modeling of Belt-Drives*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 124, 2002, s. 575-581.
- [15] REYNOLDS O.: *Creep theory of belt drive mechanics*. The Engineer, 38, 1847
- [16] SCHINDLER T., FRIEDRICH M., ULBRICH H.: *Computing time reduction possibilities in multibody dynamics, Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications*. Dordrecht, Springer, 23, 2011, s. 239-259.
- [17] THRELFALL D.C.: *The Inclusion of Coulomb Friction in Mechanisms Programs with Particular Reference to DRAM*. Mechanisms and Machine Theory, 13, 1978, s. 475-483
- [18] VOIGT W.: *Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle*. Annalen der Physik, 283, s. 671-693, 1892.
- [19] MSC. Adams documentation