



Analiza niesprężystego zachowania belki żelbetowej

ANNA SZCZEŚNIAK, ADAM STOLARSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,
00-908 Warszawa, ul. gen. S. Kaliskiego 2,
anna.szczesniak@wat.edu.pl, adam.stolarski@wat.edu.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę nośności oraz stanu odkształcenia, zarysowania i naprężenia belki żelbetowej z wykorzystaniem metody relaksacji dynamicznej. Badania numeryczne przeprowadzone zostały dla belki żelbetowej, obciążonej symetrycznie dwiema siłami skupionymi, badanej doświadczalnie przez Buckhouse'a. Analizie poddano stan naprężenia, odkształcenia, przemieszczenia oraz zarysowania w charakterystycznych krokach przyrostu obciążenia belki. Otrzymane wyniki badań numerycznych porównane zostały z wynikami badań doświadczalnych, rozwiązań numerycznych metodą elementów skończonych (MES) oraz analiz teoretycznych zaczerpniętych z literatury.

Słowa kluczowe: mechanika konstrukcji, metoda relaksacji dynamicznej, belki żelbetowe, nośność graniczna

DOI: 10.5604/12345865.1211134

1. Wstęp

Analiza wyężenia żelbetowych elementów konstrukcyjnych ma istotny wpływ na proces projektowania oraz oceny bezpieczeństwa konstrukcji. Wymaga ona uwzględnienia niesprężystych właściwości materiałów konstrukcyjnych oraz fizycznej i geometrycznej nieliniowości elementu konstrukcyjnego. Rozwiązanie tak złożonego problemu wiąże się z doбором odpowiedniej metody obliczeniowej.

Analiza wyężenia belkowych elementów żelbetowych jest przedmiotem licznych badań doświadczalnych i numerycznych. Badania doświadczalne belek obciążonych statycznie przeprowadzili m.in. Buckhouse [5], Kamińska [11, 12], Rashid i Mansur [15], Jang i inni [10], Ashour [1], Lopes i Bernardo [14]. Numeryczne analizy dynamicznego zachowania elementów konstrukcyjnych przeprowadzili Bąk

i Stolarski [3], Stolarski [18], Cichorski i Stolarski [6, 7, 19]. W pracy Saifullaha i in. [16] przedstawiono analizę porównawczą wyników badań doświadczalnych przeprowadzonych dla belek żelbetowych z wynikami uzyskanymi podczas analizy komputerowej bazującej na MES. Analizy numeryczne w tym zakresie przeprowadzili również Crisfield [8], de Borst i Nauta [4], Wolanski [23], Smarzewski [17], Kwak i Filippou [13], natomiast teoretyczno-numeryczna analiza osiągnięcia nośności w belce żelbetowej przedstawiona została w referacie Bąka i in. [2]

W pracy zaprezentowano analizę statycznego odkształcenia belki żelbetowej, która przeprowadzona została przy zastosowaniu opracowanej w tym celu metody analizy. Metodę analizy wyteżenia układu konstrukcyjnego opracowano z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Do rozwiązania układu równań równowagi belkowego, żelbetowego elementu konstrukcyjnego zastosowano metodę relaksacji dynamicznej. W metodzie tej rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do analizy procesu pseudodynamicznego, który po wprowadzeniu tłumienia krytycznego pozwala na opis statycznego zachowania konstrukcji. Analiza obejmuje opis zachowania zginanego elementu żelbetowego, modelowanego jako ustrój prętowy obciążony statycznie. Podstawą teoretycznego modelowania zachowania elementu konstrukcyjnego były równania teorii umiarkowanie dużych przemieszczeń ustroju prętowego, ale z uwagi na analizę belek schemat obliczeniowy został zredukowany do układu opisującego małe przemieszczenia. Opracowana metoda rozwiązania była podstawą budowy własnych procedur numerycznych oraz programu obliczeniowego. Własny program obliczeniowy pozwolił na wykonanie analizy numerycznej belki żelbetowej, a otrzymane wyniki porównano z wynikami doświadczalnymi i numerycznymi zaczerpniętymi z literatury oraz wynikami obliczeń analitycznych.

2. Metoda obliczeniowa

2.1. Równania ruchu

Na potrzeby analizy przygotowano model obliczeniowy zginanego elementu żelbetowego, który stanowi płaski ustrój prętowy obciążony statycznie obciążeniem nierównomiernie rozłożonym oraz siłami skupionymi. Założone obciążenie zewnętrzne jest krótkotrwałe i działa w płaszczyźnie prostopadłej do osi podłużnej elementu obliczeniowego. W modelu elementu konstrukcyjnego uwzględniono charakterystyczne uwarunkowania geometryczne, tj. zmienny rozkład przekroju betonu i stali zbrojeniowej, warunki brzegowe definiowane przez sposób działania obciążenia zewnętrznego oraz sposób podparcia. Element konstrukcyjny modelowany jako żelbetowy element prętowy, który charakteryzuje się masą jednostkową μ , jednostkowym masowym momentem bezwładności j , jednostkowymi współczynnikami tłumienia c dla przemieszczeń liniowych i c_f dla

przemieszczeń kątowych, został opisany przy pomocy układu równań równowagi dynamicznej (1). W analizie belki układ równań opisuje małe przemieszczenia. W takim sformułowaniu pominięty został wpływ sił podłużnych na przemieszczenia belek. Dla układu sił wewnętrznych: poprzecznych Q i momentów zginających M oraz obciążenia zewnętrznego p_z , sił bezwładności poprzecznej i obrotowej $\{\mu\ddot{w}, j\ddot{\varphi}\}$ działających na odkształcony element o długości ds i kącie nachylenia θ , różniczkowe równania równowagi mają postać:

$$\begin{cases} -\frac{\partial(Q \cos \theta)}{\partial s} - p_z(s) + \mu\ddot{w} + c\dot{w} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial s} - Q - j\ddot{\varphi} - c_f\dot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ponadto, uwzględnione zostały liniowe związki geometryczne odnoszące się do zmiany średniego kąta obrotu przekroju poprzecznego $\kappa(s)$ oraz średniego kąta odkształcenia postaciowego $\gamma(s)$.

$$\begin{cases} \kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds} \\ \gamma(s) = \varphi + \Phi, \quad \Phi = \theta^0 - \theta, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie: φ — średni kąt obrotu przekroju poprzecznego, Φ — kąt obrotu osi środkowej pręta.

Równania równowagi wewnętrznej przekroju poprzecznego opracowane zostały przy założeniu warstwowego modelu obliczeniowego przekroju. Model ten powstał w wyniku podziału wysokości przekroju na warstwy betonowe o grubości Δh oraz dwie warstwy stalowe o przekrojach A_{s1} i A_{s2} . Zastosowana dyskretyzacja przekroju poprzecznego została opracowana zgodnie z interpretacją opisaną przez Bąka i Stolarskiego w pracy [3]. Zachowanie modelu obliczeniowego przekroju wynika z modeli odkształcenia betonu i stali oraz hipotezy kinematycznej płaskich przekrojów. Dla stali zbrojeniowej przyjęto model materiału sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem wzmocnienia. W celu opisu zachowania betonu opracowano model materiału sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem osłabienia i degradacji modułu odkształcenia. W modelach materiałów konstrukcyjnych przyjęto założenie płaskiego stanu naprężenia, zredukowanego do jednokierunkowego ściskania/rozciągania i ścinania.

Po wprowadzeniu dyskretyzacji osi środkowej elementu konstrukcyjnego podstawowy układ równań (1) zapisany został w postaci różnicowej:

$$\begin{cases} -Q_{i1} \cos \theta_{i1} + Q_{i0} \cos \theta_{i0} - P_z(s_i) + m(s_i) \ddot{w}_i + C(s_i) \dot{w}_i = 0 \\ M_{i+2} - M_i - Q_{i1} \Delta s_{i1} - J(s_{i1}) \ddot{\varphi}_{i1} - C_f(s_{i1}) \dot{\varphi}_{i1} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

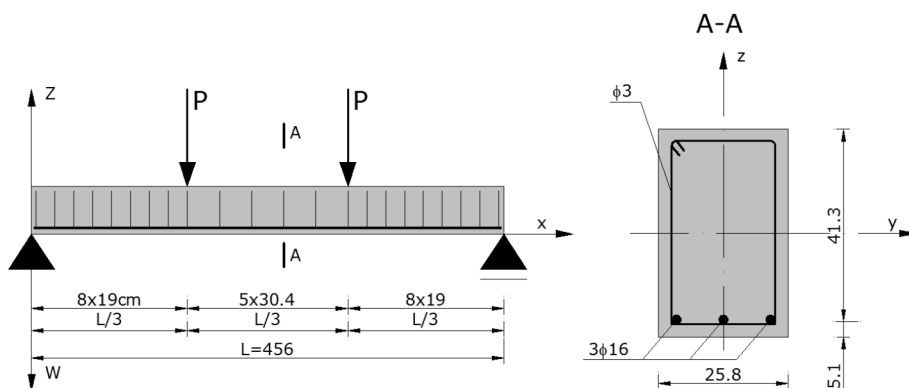
gdzie: $i1 = i + 1$, $i0 = i - 1$ — oznaczenie odcinków wewnętrznego podziału przestrzennego, Q_{i1} — siła poprzeczna w odcinku podziału $i1 = i + 1$, M_i — moment zginający w i -tym węźle głównym, $m(s_i)$ — masa skupiona węzła głównego i , $P_z(s_i)$ — składowa obciążenia i -tego węzła, $J(s_{i1})$ — masowy moment bezwładności odcinka podziału $i1 = i + 1$, Δs_{i1} — długość odkształconego odcinka podziału $i1$, φ_{i1} — średni kąt obrotu przekroju poprzecznego dla odcinka podziału $i1$, w_i — przemieszczenie liniowe i -tego węzła podziału, $C(s_i)$ — współczynnik tłumienia dla przemieszczeń liniowych w i -tym węźle głównym, $C_f(s_{i1})$ — współczynnik tłumienia dla przemieszczeń kątowych dla odcinka podziału $i1 = i + 1$.

Do rozwiązania układu równań (3) zastosowano metodę relaksacji dynamicznej. Pozwoliła ona na opis zagadnienia statycznego przy pomocy dynamicznych równań równowagi (3) po wprowadzeniu tłumienia krytycznego. Rozwiązanie układu równań (3) przeprowadzono metodą numeryczną z wykorzystaniem dyskretyzacji względem czasu. W tym celu zastosowano bezpośrednią metodę różnicową względem czasu. W metodzie tej przeprowadzana jest aproksymacja rozwiązania dla przemieszczeń liniowych $w(x, t_n)$ w każdym węźle podziału oraz przemieszczeń kątowych $\varphi(x, t_n)$ w każdym odcinku podziału osi środkowej modelu prętowego, zgodnie z przyjętym schematem różnicowym w kolejnych chwilach czasowych $t_{n-1} = t_n - \Delta t$, $t_n = n\Delta t$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Uproszczona postać metody analizy prezentowana jest w pracy Szcześniak i Stolarskiego [20], natomiast jej rozbudowana forma w pracy [21]. Z kolei analizę doboru tłumienia w metodzie relaksacji dynamicznej przedstawiono w pracy [22].

3. Badania numeryczne

3.1. Przedmiot badań

Badania numeryczne przeprowadzone zostały dla belki C1 badanej doświadczalnie przez Buckhouse'a [5, 9]. Analizie poddana została belka jednoprzęsłowa, przegubowo podparta, o stałym, prostokątnym przekroju poprzecznym. Obciążenie belki stanowią dwie siły skupione. Schemat statyczny belki został przedstawiony na rysunku 1. Belka jest pojedynczo zbrojona prętami $3\phi 16$ mm, zbrojenie poprzeczne stanowią strzemiona wykonane z prętów o średnicy $\phi 3$ mm w rozstawie co 19 cm w obszarach przypodporowych i co 30,4 cm w części środkowej.



Rys. 1. Schemat statyczny belki Buckhouse'a C1

Właściwości materiałowe przyjęte dla betonu:

$f_c = 32,9$ MPa — wytrzymałość na ściskanie, ustalona na podstawie badań doświadczalnych zawartych w pracy [9], $f_{ct} = 3,6$ MPa — wytrzymałość na rozciąganie, wyznaczona na podstawie zależności $f_{ct} = 0,3f_c^{2/3}$, gdzie wartość f_c jest wyrażona w MPa, $f_s = 4,68$ MPa — wytrzymałość na ścinanie, $E_c = 27,23$ GPa — moduł odkształcenia ustalony na podstawie zależności $E_c = 22(0,1f_c)^{0,3}$, gdzie wartość f_c jest wyrażona w MPa, $\varepsilon_{fe} = 0,002$, $\varepsilon_{uc} = 0,012$ — odkształcenia graniczne, $\nu_c = 0,2$ — współczynnik Poissona.

Właściwości materiałowe przyjęte dla stali zbrojeniowej:

$f_y = 473,26$ MPa — granica plastyczności przy ściskaniu i rozciąganiu [9],

$f_{ys} = \frac{f_y}{\sqrt{3}} = 273,24$ MPa — granica plastyczności przy ścinaniu, $f_t = 752,22$ MPa

— wytrzymałość na ściskanie i rozciąganie przy zerwaniu [9], $E_s = 236,61$ GPa — moduł odkształcenia [9], $\varepsilon_t = 0,15$ — odkształcenia graniczne, $\nu_s = 0,3$ — współczynnik Poissona.

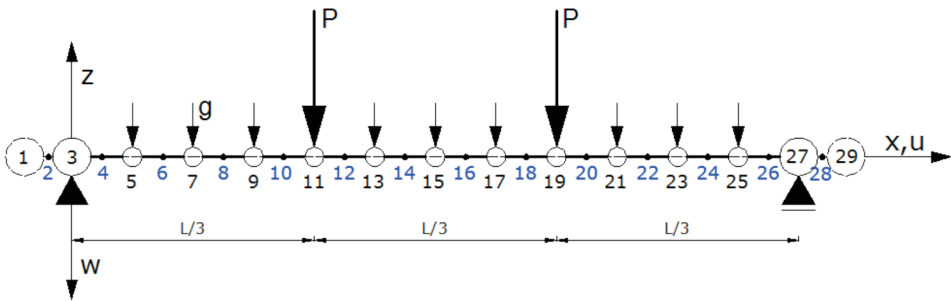
Dla analizowanej belki przyjęto również:

$\rho = 2500$ kg/m³ — masa właściwa żelbetu, $c_{i,kr} = \sqrt{\frac{648 E_c J_{cs} m_i}{23 l^3}}$ — krytyczna wartość

współczynnika tłumienia — oporu lepkiego dla drgań giętych, $c_{fi,kr} = \sqrt{\frac{27 E_c J_{cs} m_i}{l^3}}$

— krytyczna wartość współczynnika tłumienia — oporu lepkiego drgań obrotowych.

W wyniku dyskretyzacji osi środkowej modelu obliczeniowego belki C1, wprowadzono 29 węzłów podziału (rys. 2). Spośród 23 węzłów podziału wewnętrznego, wyróżniono 11 węzłów głównych (nieparzyste) i 12 węzłów pośrednich — elementów (parzyste). Na każdym brzegu występują dwa węzły główne: rzeczywisty i fikcyjny oraz węzeł pośredni — element fikcyjny. Siły skupione stanowiące obciążenie zewnętrzne belki przyłożone zostały w wyznaczonych węzłach głównych. Ciężar własny poszczególnych elementów podziału reprezentowany jest przez siły skupione, przyłożone w poszczególnych węzłach głównych z pominięciem węzłów brzegowych.



Rys. 2. Model obliczeniowy belki Buckhouse'a C1

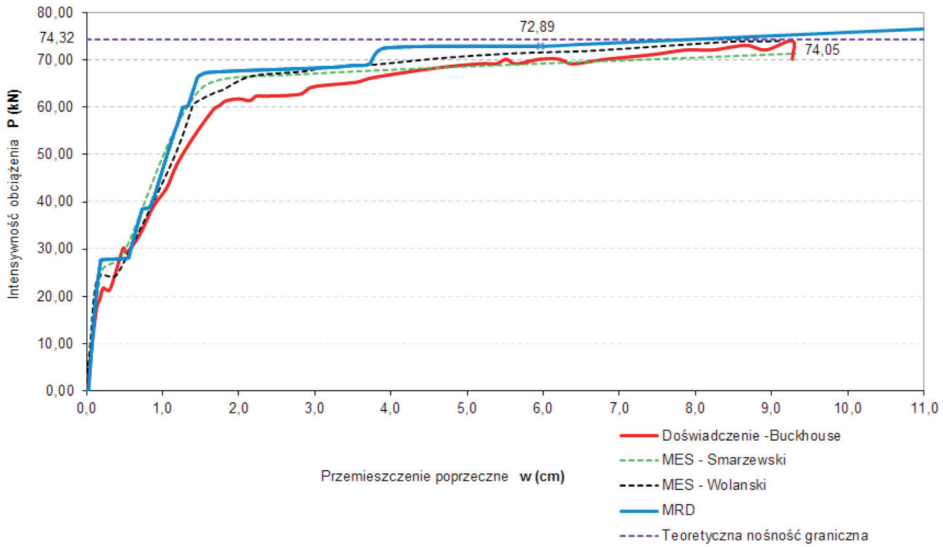
3.2. Analiza nośności i przemieszczenia

W analizie nośności i przemieszczenia przedstawiono zmianę przemieszczenia poprzecznego w funkcji obciążenia. Następnie przeprowadzona została analiza porównawcza otrzymanych wyników numerycznych z wynikami doświadczalnymi Buckhouse'a [5, 9] oraz wynikami badań numerycznych MES Smarzewskiego [17] i Wolanskiego [23] oraz wynikami teoretycznymi.

Na rysunku 3 zestawiono wyniki badań przeprowadzonych dla belki C1. Badania zobrazowane zostały w odniesieniu do zmiany przemieszczenia poprzecznego w środku rozpiętości belki (tj. w węzle 15) wraz ze wzrostem obciążenia. Kolorem czerwonym zaznaczony został wynik badań doświadczalnych przeprowadzonych przez Buckhouse'a. Wyniki badań numerycznych uzyskane przez Smarzewskiego i Wolanskiego, z zastosowaniem metody elementów skończonych, zaznaczone zostały linią przerywaną odpowiednio w kolorze zielonym i czarnym. Wyniki badań numerycznych uzyskane na podstawie opracowanej procedury, bazującej na rozwiązaniu nieliniowego układu równań równowagi przy pomocy metody relaksacji dynamicznej, zaznaczone zostały kolorem niebieskim. Dodatkowo, na wykresie fioletową linią przerywaną zaznaczono statyczną nośność graniczną belki wyznaczoną na drodze analitycznej z zależności:

$$P_0 = \frac{M_0}{l_1}, \quad (4)$$

gdzie: M_0 — graniczny moment dla przekroju żelbetowego, l_1 — odległość od osi podpory do punktu przyłożenia siły P . Tak obliczona wartość teoretycznej nośności granicznej belki wynosi $P_0 = 74,32$ kN.



Rys. 3. Porównanie wyników numerycznych dla belki C1 z wynikami doświadczalnymi i teoretycznymi

W zakresie liniowo-sprężystym wykresy wyników uzyskanych w poszczególnych badaniach są praktycznie identyczne, różnice w przebiegu funkcji przemieszczenie-obciążenie można zaobserwować dopiero po zarysowaniu przekroju. Wartości obciążenia, przy którym obserwowane jest zarysowanie przekroju, są różne w każdej z metod, przy czym wartość siły rysującej odpowiadającą eksperymentowi z największą dokładnością uzyskał Wolanski. Obciążenie, przy którym rozpoczyna się faza płynięcia plastycznego stali zbrojeniowej z najlepszą zgodnością w stosunku do doświadczeń Buckhouse’a, uzyskano w analizie MES Wolńskiego.

Graniczne nośności belki oraz wartości przemieszczeń towarzyszących jej osiągnięciu, uzyskane w kolejnych badaniach, zestawiono w tabeli 1.

TABELA 1

Zestawienie wartości nośności granicznej oraz przemieszczenia belki C1

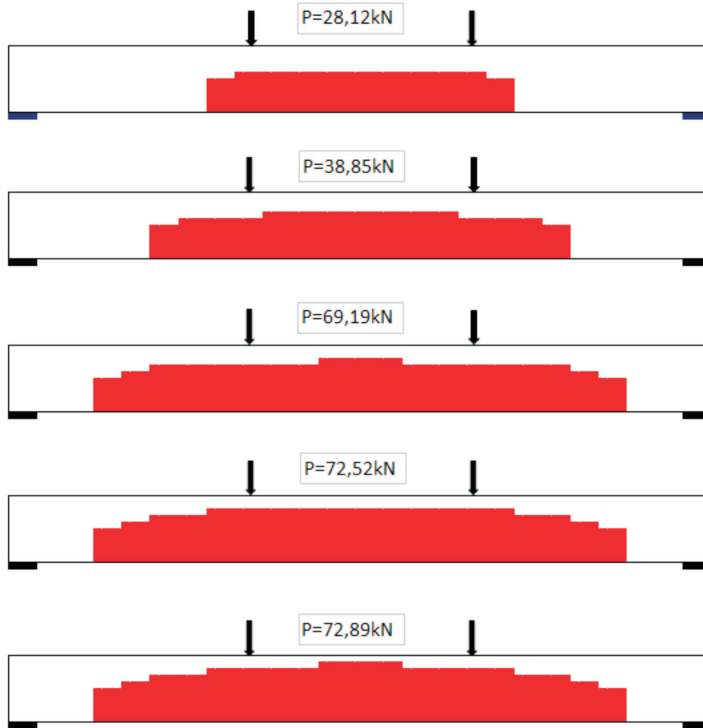
Metoda analizy belki C1	Nośność graniczna P_0 [kN]	Przemieszczenie graniczne w_0 [cm]
Doświadczenie Buckhouse'a	74,05	9,27
Metoda elementów skończonych — Smarzewski	77,1	10,05
Metoda elementów skończonych — Wolanski	74,05	9,11
Analiza teoretyczna wg [4]	74,32	–
Metoda relaksacji dynamicznej	72,89	5,97

Wyniki uzyskane przy zastosowaniu MRD odpowiadają eksperymentalnej nośności ze zgodnością na poziomie 98%. Przemieszczenia uzyskane przy pomocy MRD w porównaniu z eksperymentem są o 36% mniejsze dla intensywności obciążeń odpowiadających osiągniętej nośności granicznej, która wynosi $P_0^{MRD} = 72,89$ kN dla MRD oraz $P_0^{Exp.} = 74,05$ kN dla badań doświadczalnych.

3.3. Analiza stanu zarysowania i odkształcenia

Zgodnie z przyjętym modelem betonu zarysowanie przekroju wystąpi w chwili osiągnięcia w rozciąganych warstwach betonowych granicznej wartości odkształceń. Przeprowadzona analiza numeryczna belki żelbetowej C1 przy zastosowaniu metody relaksacji dynamicznej wykazała, że zarysowanie przekroju wystąpi przy wartości obciążenia równej $P_{cr}^{MRD} = 28,12$ kN. Natomiast wyniki analizy doświadczalnej przeprowadzone przez Buckhouse'a, wskazują na wystąpienie zarysowania przy obciążeniu na poziomie $P_{cr}^B = 20,43$ kN. Rozbieżność w otrzymanych wynikach jest uwarunkowana przyjętym modelem odkształcenia betonu, w którym uwzględniono osłabienie materiału. Zgodnie z przyjętymi założeniami, osiągnięcie naprężeń równych wytrzymałości betonu na rozciąganie nie jest jednoznaczne z powstaniem rysy. Następuje bowiem osłabienie materiału, w którym spadkowi naprężeń towarzyszy wzrost odkształceń. Pojawienie się rysy jest konsekwencją osiągnięcia odkształceń granicznych w betonie rozciągany. I właśnie to zjawisko ma miejsce przy wartości obciążenia $P_{cr}^{MRD} = 28,12$ kN. Natomiast obciążenie powodujące osiągnięcie w skrajnej, rozciąganej warstwie betonowej przekroju naprężeń równych wytrzymałości betonu na rozciąganie wynosi $P_{ct}^{MRD} = 17,76$ kN i odpowiada doświadczalnej sile rysującej ze zgodnością wynoszącą 86%. Obserwując wyniki doświadczenia, można wnioskować, że osłabienie betonu przy rozciąganiu wystąpiło przy mniejszym zakresie odkształcenia. Ograniczenie odkształceń w zakresie osłabienia przy

rozciąganiu w modelu betonu, może doprowadzić do większej zgodności wyników numerycznych z doświadczeniem.



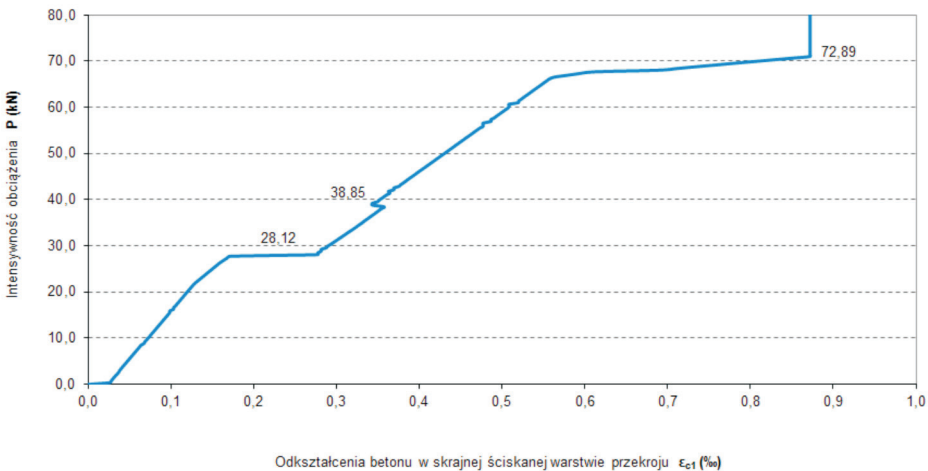
Rys. 4. Stan zarysowania belki C1 w zależności od obciążenia

Propagacja obszarów zarysowanych (właściwie obszarów rys rozmytych) w belce żelbetowej wraz ze wzrostem obciążenia została przedstawiona na rysunku 4 dla charakterystycznych zakresów wyężenia. Przy obciążeniu $P = 28,12$ kN zarysowanie pojawia się w skrajnych warstwach rozciąganych w centralnej części belki. Wraz ze wzrostem obciążenia do $P = 38,85$ kN, zarysowanie pojawia się w wyższych warstwach przekroju poprzecznego. Uplastycznienie stali zbrojeniowej przy wartości obciążenia $P = 69,19$ kN powoduje rozwój strefy zarysowania w kierunku podpór. Przy wartości obciążenia $P = 72,52$ kN, poprzedzającej proces zniszczenia przekroju, następuje rozwój zarysowania w kolejnych warstwach przekroju. Przy granicznej wartości obciążenia $P_0 = 72,89$ kN w środkowym obszarze belki pojawia się zarysowanie o zasięgu wynoszącym 90% wysokości przekroju. Jedyna ściskana warstwa przekroju, przestaje reagować na wzrost obciążenia. Po osiągnięciu obciążenia $P_0 = 72,89$ kN w kolejnych krokach obliczeniowych w skrajnej ściskanej warstwie przekroju naprężenia i odkształcenia w betonie pozostają niezmiennymi przy nieograniczonym wzroście przemieszczeń, co można interpretować jako zniszczenie przekroju. Przy czym

lokalne zniszczenie przekroju betonowego obserwowane w środku rozpiętości belki nie jest równoznaczne z zakończeniem procesu obliczeniowego. Numeryczna analiza pokrytyczna wskazuje na dalszą zdolność przenoszenia obciążenia przez element konstrukcyjny, któremu towarzyszą znaczne przyrosty przemieszczeń.

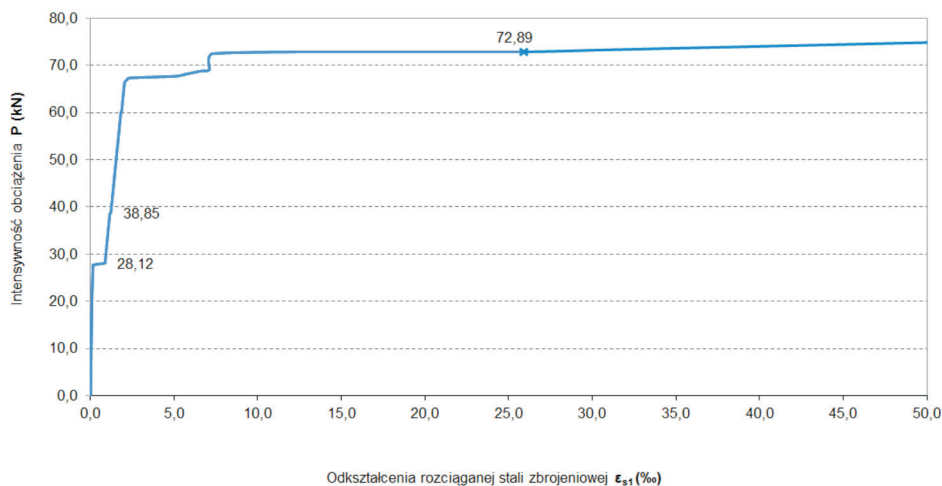
Obserwacja zmian odkształceń towarzyszących wyłączeniu żelbetowej belki C1, poddanej działaniu obciążenia przyrostowego, przeprowadzona została dla dwóch charakterystycznych obszarów. Analizie poddano odkształcenia betonu skrajnej warstwy ściskanej oraz odkształcenia stali rozciąganej. Zmiana odkształceń odniesiona została do poziomu obciążenia.

Na rysunku 5 przedstawione zostały odkształcenia betonu ściskanego w poszczególnych fazach wyłączenia elementu konstrukcyjnego. Osiągnięcie wartości obciążenia $P = 28,12$ kN związane jest z wyraźnym skokiem odkształceń, który jest następstwem wyłączenia rozciąganych warstw przekroju betonowego i powstaniem rysy. Dalszy rozwój odkształceń ma charakter liniowy do chwili, w której obciążenie osiąga wartość $P = 38,85$ kN i następuje gwałtowne zmniejszenie odkształceń. Zjawisko to spowodowane jest nagłym zwiększeniem obszaru zarysowania belki. Osiągnięcie wartości obciążenia powodującego uplastycznienie stali zbrojeniowej objawia się znacznym wzrostem odkształceń w betonie przy niewielkim przyroście obciążenia. Zakres analizy kończy się w chwili osiągnięcia nośności granicznej $P_0^{MRD} = 72,89$ kN.



Rys. 5. Odkształcenia betonu w skrajnej ściskanej warstwie przekroju w węźle 15

Na rysunku 6 przedstawiony został rozwój odkształceń w rozciąganej stali zbrojeniowej, postępujący wraz ze wzrostem obciążenia oddziałującego na belkę C1, aż do chwili osiągnięcia nośności granicznej. Wartość odkształceń występujących w stali zbrojeniowej w chwili osiągnięcia nośności granicznej wynosi $\epsilon_{s1} = 25,9\%$.



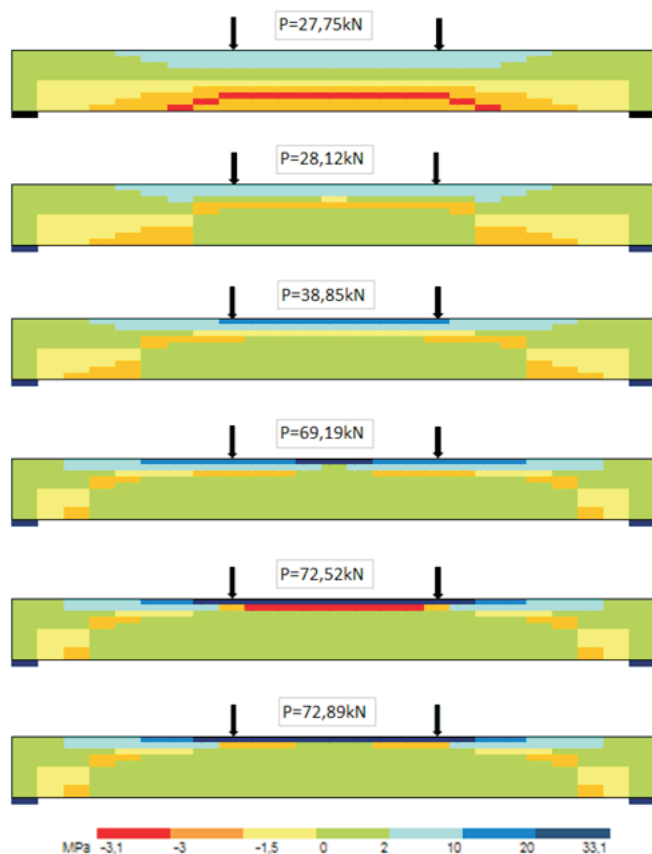
Rys. 6. Odkształcenia stali rozciąganej w węźle 15

3.4. Analiza stanu naprężenia

Analiza stanu naprężenia przeprowadzona została na podstawie rozkładu naprężeń normalnych σ_x i stycznych σ_{xy} w poszczególnych warstwach przekroju belki dla charakterystycznych wartości obciążenia.

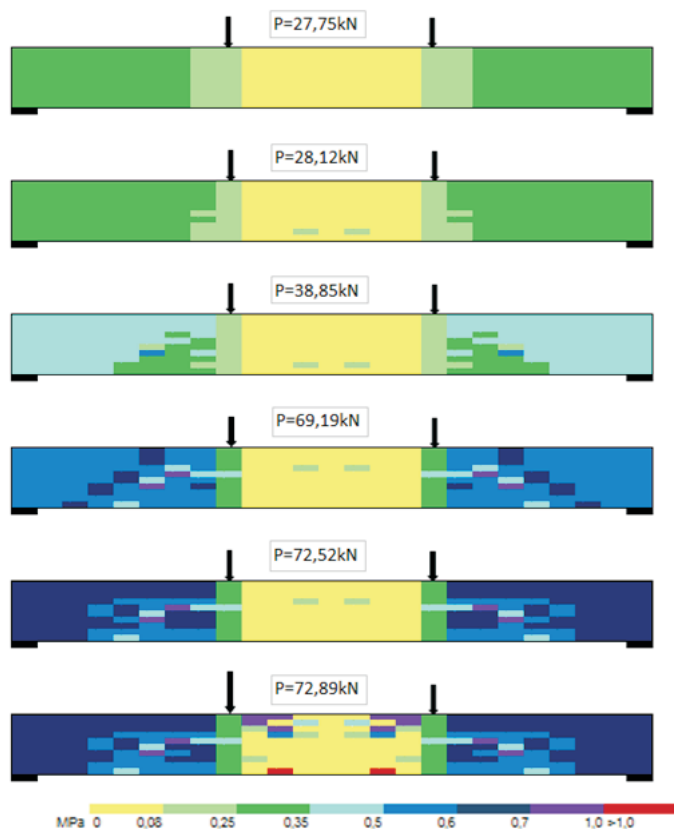
Na rysunku 7 przedstawiono rozkład naprężeń normalnych σ_x w kolejnych etapach wyężenia belki C1. W środkowej części belki rozkład naprężeń normalnych jest zgodny z rozwojem zarysowania w tym obszarze. Wartość obciążenia $P = 27,75$ kN, charakteryzuje stan naprężenia bezpośrednio poprzedzający pojawienie się pierwszej rysy. Zakres osłabienia betonu przy rozciąganiu zaznaczony jest kolorem pomarańczowym w środkowej części belki. Zarysowanie pojawia się przy wartości obciążenia równej $P = 28,12$ kN. Na wykresie widoczny jest zakres zarysowania, jak również rozwój zasięgu rozciągania. Wzrost wartości obciążenia do $P = 38,85$ kN powoduje dalszą propagację zarysowania oraz zwiększenie strefy rozciąganej w centralnej części. Ponadto, uwidoczniony zostaje wzrost naprężeń w skrajnej warstwie ściskanej betonu, w obszarze znajdującym się między punktami przyłożenia obciążenia. Osiągnięcie obciążenia o wartości $P = 69,19$ kN rozpoczyna fazę uplastycznienia stali zbrojeniowej. Obserwowany jest znaczny wzrost obszaru zarysowania, który rozchodzi się w kierunku podpór. Strefa rozciągania rozwija się w kolejnych warstwach przekroju. Obszar silnego ściskania skrajnych warstw betonu również propaguje w kierunku podpór belki. Przy wartości obciążenia $P = 72,52$ kN, która poprzedza fazę zniszczenia przekroju belki, widoczny jest dalszy rozwój strefy rozciągania, natomiast zahamowany został rozwój zarysowania. W strefie ściskanej betonu obserwowany jest znaczny wzrost wartości naprężeń. Zniszczenie środkowej części przekroju następuje przy wartości obciążenia $P = 72,89$ kN. W środku belki

pojawia się zarysowanie 90% wysokości przekroju, a w betonie ściskanym naprężenia stabilizują się w zakresie odkształceń poniżej 1‰. Taki stan zniszczenia warstw przekroju w środku belki powoduje utratę nośności elementu.



Rys. 7. Rozkład naprężeń normalnych σ_x w kolejnych krokach obciążenia

Na rysunku 8 przedstawiony został rozkład naprężeń stycznych σ_{xy} w kolejnych krokach obciążenia belki. W części przypodporowej znaczny wzrost naprężeń stycznych towarzyszy uplastycznieniu stali zbrojeniowej przy wartości obciążenia $P = 69,19$ kN. Przyłożenie obciążenia o wartości $P = 72,89$ kN powoduje wzrost naprężeń w strefie przypodporowej do wartości nieprzekraczającej 0,6 MPa, natomiast w środkowej strefie belki, w pobliżu miejsc przyłożenia obciążenia, występują lokalne naprężenia o wartości 0,93 MPa.

Rys. 8. Rozkład naprężeń stycznych σ_{xy} w kolejnych krokach obciążenia

4. Zakończenie

Przebieg procesu wyjątkowania belki ma charakter wieloetapowy. W pierwszej, czysto sprężystej fazie wyjątkowania elementu obserwowany jest liniowy przebieg zależności obciążenie–przemieszczenie poprzeczne. Również w sposób liniowy przyrastają odkształcenia w charakterystycznych warstwach przekroju w betonie i stali. W chwili osiągnięcia obciążenia odpowiadającego sile rysującej obserwowany jest znaczny przyrost przemieszczeń oraz odkształceń. Strefa zarysowania obejmuje dolne warstwy przekroju w obszarze między siłami stanowiącymi obciążenie zewnętrzne. Wraz ze wzrostem obciążenia obserwowane jest zwiększanie strefy zarysowania, co następuje w sposób skokowy, lecz już nie tak gwałtowny jak przy pojawieniu się pierwszego zarysowania. Ponownie obserwowane są znaczne przyrosty przemieszczeń oraz odkształceń w betonie i stali. Przy wartości obciążenia rozpoczynającej fazę płynięcia plastycznego stali zbrojeniowej obserwowana jest

zmiana charakterystyki wykresu obciążenie–przemieszczenie. Niewielkim przyrostem obciążenia towarzyszy znaczny przyrost przemieszczenia. Strefa zarysowania zostaje znacznie zwiększona, a naprężenia w skrajnej, ściskanej warstwie przekroju zbliżają się do wartości odpowiadającej wytrzymałości betonu na ściskanie. Przy granicznej wartości obciążenia obserwowane jest niemal pełne zniszczenie przekroju zlokalizowanego w środku rozpiętości belki. Warstwy betonu przestają reagować na zmianę obciążenia. W stali rozciąganej obserwowany jest dalszy wzrost odkształceń przy nieznacznym wzroście obciążenia.

Wyniki przeprowadzonej analizy nośności belki żelbetowej są zgodne z wynikami badań doświadczalnych, wynikami badań numerycznych wykonanych przy zastosowaniu MES oraz przeprowadzoną analizą teoretyczną. Analiza porównawcza wyników wskazuje na poprawność opracowanej metody obliczeniowej oraz procedur numerycznych.

Opracowana metoda obliczeniowa może być stosowana do prognozowania nośności zginanych elementów żelbetowych oraz opisu mechanizmu ich zniszczenia, co ma istotny wpływ na bezpieczeństwo konstrukcji.

Metoda może być udoskonalona przez wprowadzenie modyfikacji modeli materiałów oraz włączenie do rozwiązania procedur umożliwiających śledzenie procesu osłabienia elementu konstrukcyjnego.

Praca powstała w wyniku zadań badawczych zrealizowanych w ramach pracy badawczej statutowej nr 934, realizowanej w Wydziale Inżynierii Lądowej i Geodezji Wojskowej Akademii Technicznej im. Jarosława Dąbrowskiego.

Artykuł wpłynął do redakcji 14.03.2016 r. Zweryfikowaną wersję po recenzjach otrzymano 4.05.2016 r.

LITERATURA

- [1] ASHOUR S.A., *Effect of Compressive Strength and Tensile Reinforcement Ratio on Flexural Behaviour of High-Strength Concrete Beams*, Engineering Structures, vol. 22, no. 5, 2000, pp. 413-423.
- [2] BĄK G., BRZUZY A., KWOLEK M., *Identyfikacja właściwości betonu i stali zbrojeniowej w belce żelbetowej podlegającej zniszczeniu*, Materiały Konferencji Naukowej Archbud 2012, Problemy współczesnej architektury i budownictwa, Zakopane, 3-6 września 2012, s. 37-46.
- [3] BĄK G., STOLARSKI A., *Nieliniowa analiza belek żelbetowych poddanych działaniu obciążeń impulsowych*, Cz. I i II, PAN, IPPT, Rozprawy Inżynierskie, vol. 36, nr 3, Warszawa, 1988, s. 501-517, 519-539.
- [4] DE BORST R., NAUTA P., *Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model*, Engineering Computation, vol. 2, March 1985, pp. 35-46.
- [5] BUCKHOUSE E.R., *External Flexural Reinforcement of Existing Reinforced Concrete Beams Using Bolted Steel Channels*, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, 1997.
- [6] CICHORSKI W., STOLARSKI A., *Wpływ układu zbrojenia na sprężyste przemieszczenia belek i tarcz obciążonych statycznie*, Biuletyn WAT, 47, 2, 1998, s. 5-54.

-
- [7] CICHORSKI W., STOLARSKI A., *Analysis of inelastic behaviour of reinforced concrete deep beams under static and dynamic load*. Concrete Constructions, Theory and Experimental Studies. Polish Academy of Sciences, Wrocław University of Technology Publishers, ed. J. Gronostajski & M. Kmiński, Wrocław, 1999, pp. 31-38.
- [8] CRISFIELD M.A., *Difficulties with current numerical models for reinforced-concrete and some tentative solutions*, Proceedings of The International Conference on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures, eds. F. Damjanić et al., Split 17th-21st September 1984, pp. 331-357.
- [9] FOLEY C.M., BUCKHOUSE E.R., *Strengthening Existing Reinforced Concrete Beams for Flexure Using Bolted External Structural Steel Channels*, Structural Engineering Report MUST-98-1, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, 1998.
- [10] JANG I.Y., PARK H.G., KIM Y.G., KIM S.S., KIM J.H., *Flexural Behavior of High-Strength Concrete Beams Confined with Stirrups in Pure Bending Zone*, International Journal of Concrete Structures and Materials, vol. 3, no. 1, June 2009, pp. 39-45.
- [11] KAMIŃSKA M.E., *Doświadczalne badania żelbetowych elementów prętowych z betonu wysokiej wytrzymałości*, KILiW, PAN, Łódź, 1999.
- [12] KAMIŃSKA M.E., *High-strength Concrete and steel interaction in RC members*, Cement and Concrete Composites, 24, 2002, pp. 281-295.
- [13] KWAK H.G., FILIPPOU F.C., *Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads*, Department of Civil Engineering, University of California, Report no. UCB/SEMM-90/14, November 1990.
- [14] LOPES S.M.R., BERNARDO L.E.A., *Plastic rotation capacity of high-strength concrete beams*, Materials and Structures, vol. 36, January-February 2003, pp. 22-31.
- [15] RASHID M.A., MANSUR M.A., *Reinforced High-Strength Concrete Beams in Flexure*, ACI Structural Journal, Technical Paper, t. no. 102-S47, pp. 462-471.
- [16] SAIFULLAH I., NASIR-UZ-ZAMAN M., UDDIN S.M.K., HOSSAIN M.A., RASHID M.H., *Experimental and Analytical Investigation of Flexural Behavior of Reinforced Concrete Beam*, International Journal of Engineering & Technology IJET-IJENS, vol. 11, no. 1, February 2011, pp. 146-153.
- [17] SMARZEWSKI P., *Modelowanie statycznego zachowania niesprężystych belek żelbetowych wykonanych z betonu wysokiej wytrzymałości*, Monografie – Politechnika Lubelska, Lublin, 2011.
- [18] STOLARSKI A., *Model dynamiczny prętowych ustrojów żelbetowych*, WAT, 153, Warszawa, 1989.
- [19] STOLARSKI A., CICHORSKI W., *Modelowanie statycznego i dynamicznego zachowania niesprężystych tarcz żelbetowych*, PAN Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej, IPPT, Studia z Zakresu Inżynierii, 51, Warszawa, 2002.
- [20] SZCZEŚNIAK A., STOLARSKI A., *Analiza wyężenia belek żelbetowych metodą relaksacji dynamicznej*, Inżynieria i Budownictwo, 5, Warszawa, 2012, s. 267-269.
- [21] SZCZEŚNIAK A., STOLARSKI A., *Analiza wyężenia słupów żelbetowych metodą relaksacji dynamicznej*, Biuletyn WAT, 63, 2, Warszawa, 2014, s. 155-170.
- [22] SZCZEŚNIAK A., STOLARSKI A., *Analysis of critical damping in dynamic relaxation method for reinforced concrete structural elements*. Mathematical and Numerical Approaches, 13th International Conference Dynamical Systems — Theory and Applications, December 7-10, 2015, Lodz, 501-512.
- [23] WOLANSKI A.J., *Flexural behavior of reinforced and prestressed concrete beams using finite element analysis*. Master's Thesis, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, 2004.

A. SZCZEŚNIAK, A. STOLARSKI

Analysis of non-elastic behaviour of reinforced concrete beam

Abstract. Analysis of load carrying capacity and strain, cracking and stress states of reinforced concrete beam was carried out using the dynamic relaxation method. Numerical investigations for reinforced concrete beam symmetrically loaded with two concentrated forces tested experimentally by Buckhouse have been carried out. The states of stress, strain, displacement and cracking were analyzed in specific steps of the beam load increment. Obtained numerical results were compared with the results of experimental studies, numerical solutions by finite element method and theoretical analyzes taken from the literature.

Keywords: mechanics of structures, dynamic relaxation method, reinforced concrete beams, load carrying capacity

DOI: 10.5604/12345865.1211134