

SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI POMIARU NATĘŻENIA OŚWIETLENIA METODĄ ANALITYCZNĄ ORAZ MONTE CARLO

Robert POGORZELSKI

Obwodowy Urząd Miar w Białymstoku (doktorant Politechniki Białostockiej)
tel.: 883 963 305 e-mail: r.pogorzelski@poczta.gum.gov.pl

Streszczenie: W Laboratorium Fotometrycznym Obwodowego Urzędu Miar w Białymstoku rocznie dokonuje się kilkuset wzorcowań mierników natężenia oświetlenia (luksomierzy). Dążąc do podania użytkownikowi jak najszerzej informacji o pomiarze, oprócz ustalenia różnicy pomiędzy wartością wzorca jednostki miary, a wskazaniem przyrządu wzorcowanego, określa się również niepewność dokonanego pomiaru. W pracy zaprezentowano analizę szacowania niepewności pomiaru natężenia oświetlenia przy zastosowaniu metody propagacji niepewności (analityczna) oraz metody propagacji rozkładów (Monte Carlo). Dodatkowo porównano wyniki uzyskane obiema metodami sprawdzając, czy metoda Monte Carlo generuje wiarygodne wyniki i może być stosowana w pracach laboratoriów wzorcujących.

Słowa kluczowe: niepewność pomiaru, prawo propagacji niepewności, metoda Monte Carlo, wzorcowanie.

1. WPROWADZENIE

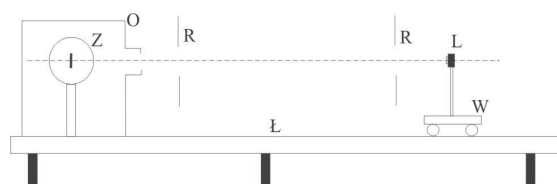
Celem dokonania pomiaru dowolnego menzurandu jest uzyskanie możliwie dokładnego wyniku. Należy jednak mieć świadomość, że wskazanie przez przyrząd pomiarowy wartości mierzonej zawsze obarczone jest niepewnością pomiarową. W związku z tym, pomiar powinno traktować się jako proces wyznaczania wartości mierzonej i jej niepewności. Wyznaczenie niepewności pomiarowej jest konieczną częścią każdej procedury pomiarowej. Wynika to m. in. z wymagań normy PN-EN ISO 10012, w której jest mowa o tym, że niepewność pomiaru powinna być oszacowana dla każdego procesu pomiarowego objętego systemem zarządzania pomiarami. Niepewność pomiaru jest bardzo istotnym parametrem w procesie wzorcowania w laboratoriach pomiarowych, w których ustala się zależności pomiędzy wartościami wielkości mierzonej wskazanymi przez przyrząd pomiarowy, a odpowiednimi wartościami wielkości fizycznych, realizowanymi przez wzorzec jednostki miary wraz z podaniem niepewności tego pomiaru. Współczesne wyrażanie i obliczanie niepewności pomiaru zdefiniowane jest przez pakiet dokumentów wydanych przez Międzynarodowe Biuro Miar. Podstawowym dokumentem jest przewodnik GUM [1] dotyczący wyrażania niepewności pomiaru. Przedstawia on m. in. metodę propagacji niepewności. Drugim z opracowań jest Supplement 1 do przewodnika [2]. Dokument zawiera wytyczne co do metody propagacji rozkładów realizowanej przy zastosowaniu symulacji Monte Carlo.

W pracy zastosowano i porównano obie metody szacowania niepewności pomiaru natężenia oświetlenia.

Zidentyfikowano źródła niepewności, określono odchylenia standardowe wielkości wejściowych oraz rozkłady prawdopodobieństwa. Pomiary zostały wykonane w akredytowanym Laboratorium Fotometrycznym znajdującym się w Obwodowym Urzędzie Miar w Białymstoku.

1.1. Przebieg wzorcowania

Wzorcowanie luksomierzy, zgodnie z możliwościami pomiarowymi laboratorium, można wykonać w zakresie od 5 do 5000 lx. Stanowisko na którym wykonano pomiary przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat stanowiska do wzorcowania luksomierzy
Z - wzorzec światłości, L - głowica fotometryczna wzorcowanego luksomierza, W - wózek pomiarowy, O – osłona, R - przesłony fotometryczne

Na jednym końcu ławy fotometrycznej znajduje się źródło światła. Zmianę natężenia oświetlenia, rejestrowaną przez luksomierz, uzyskuje się przesuwanym wózkiem pomiarowym. Podczas wzorcowania wskazania luksomierza odnosi się do wskazań państwowego wzorca jednostki miary światłości poprzez zastosowanie wzorca roboczego, jakim jest lampa fotometryczna o temperaturze barwowej $T = 2856$ K, posiadająca określone w świadectwie wzorcowania wartości światłości oraz niepewności pomiaru. Wzorce światłości oraz mierniki mierzące parametry wzorców światłości stosowane w laboratorium są regularnie wzorcowane przez Główny Urząd Miar.

W badaniu przyjęto, że niepewność pomiaru wyznaczono dla natężenia oświetlenia wskazywanego przez luksomierz równego $E_{wskazane} = 1000$ lx. Dla tej wartości natężenia oświetlenia odległość zmierzona na ławie fotometrycznej wyniosła $d = 1,751$ m. Pomiar odległości dokonuje się jednokrotnie. Pominięto zatem metodę obliczania niepewności pomiaru na drodze analizy statystycznej serii wyników pomiarów.

2. SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI

2.1. Model pomiaru

Model matematyczny pomiaru określający, relacje pomiędzy wielkościami wejściowymi, a natężeniem oświetlenia, opisuje równanie (1):

$$E_{poprawne} = \frac{I_R \cdot \Omega_0 \cdot \left(\frac{V}{R \cdot J_R}\right)^{m_i} \cdot (1 - c_{rozp})}{(d + d_L + d_W)^2} \cdot \frac{E_{wskazane}}{\alpha_{wskazane}} + \delta p \quad (1)$$

gdzie: $E_{poprawne}$ – wartość poprawna natężenia oświetlenia w punkcie pomiarowym przy ustawieniu $E_{wskazane}$,
 I_R – światłość wzorca światłości,
 Ω_0 – jednostkowy kąt bryłowy,
 d – odległość pomiędzy powierzchnią żarnika wzorca światłości, a powierzchnią światłoczułą głowicy fotometrycznej wzorcowanego luksomierza,
 d_L – poprawka na dokładność ustawienia głowicy fotometrycznej wzorcowanego luksomierza na ławie fotometrycznej,
 d_W – poprawka na dokładność ustawienia wzorca światłości na ławie fotometrycznej,
 $\alpha_{wskazane}$ – odczyt na wzorcowanym luksomierzu odpowiadający natężeniu oświetlenia $E_{wskazane}$,
 c_{rozp} – względny współczynnik światła rozproszonego,
 V – wartość napięcia odczytana z multimetru,
 J_R – wartość prądu elektrycznego wzorca światłości,
 R – opór elektryczny rezystora wzorcowego,
 m_i – współczynnik określający wpływ zmiany parametrów elektrycznych wzorca światłości na parametry świetlne,
 δp – poprawka uwzględniająca spełnienie prawa „odwrotności kwadratów” z dokładnością względną mniejszą niż 1 %.

2.2. Metoda propagacji niepewności

Szacowanie niepewności pomiaru natężenia oświetlenia przeprowadzono w oparciu o wytyczne zawarte w przewodniku GUM [1]. W metodzie tej wykorzystujemy matematyczny model pomiaru (1), a wielkości wejściowe reprezentowane są przez ich wartości oczekiwane i odchylenia standardowe. Wariancję pomiaru natężenia oświetlenia określa następująca zależność:

$$u^2(E_{poprawne}) = c_1^2 \cdot u^2(I_R) + c_2^2 \cdot [u^2(d) + u^2(d_L) + u^2(d_W)] + c_3^2 \cdot u^2(\alpha_{wskazane}) + c_4^2 \cdot u^2(c_{rozp}) + c_5^2 \cdot u^2(V) + c_6^2 \cdot u^2(R) + c_7^2 \cdot u^2(m_i) + c_8^2 \cdot u^2(\delta p) \quad (2)$$

gdzie współczynniki wrażliwości:

$$c_1 = \frac{E_{poprawne}}{I_R}, c_2 = -2 \frac{E_{poprawne}}{d + d_L + d_W}, c_3 = -\frac{E_{poprawne}}{\alpha_{wskazane}}, c_4 = -\frac{E_{poprawne}}{1 - c_{rozp}}, c_5 = -\frac{E_{poprawne} \cdot m_i}{V}, c_6 = -\frac{E_{poprawne} \cdot m_i}{R} \quad (3)$$

$$c_7 = E_{poprawne} \cdot \ln\left(\frac{V}{R \cdot J_R}\right), c_8 = 1$$

Następnie wyznaczono wartości oczekiwane i odchylenia standardowe na podstawie rozkładów wielkości wejściowych. Do wielkości wpływających na wyznaczenie dokładnej wartości natężenia oświetlenia należą:

- światłość wzorca światłości I_R . Niepewność standardową wyznaczono na podstawie danych zawartych w świadectwie wzorcowania wzorca światłości.
- odległość (odczyt - d) pomiędzy powierzchnią żarnika wzorca światłości a powierzchnią światłoczułą głowicy fotometrycznej wzorcowanego luksomierza. Niepewność standardową $u(d)$ dla odległości $d = 1,751$ m obliczono jako pierwiastek sumy kwadratów niepewności związanych z oszacowaniem niepewności odległości pomiędzy powierzchnią żarnika wzorca światłości, a powierzchnią światłoczułą głowicy fotometrycznej wzorcowanego luksomierza wyrażona w metrach $u(d_i)$ ($d_i = 0,0005$ m) oraz na podstawie wzoru ze świadectwa wzorcowania przymiaru wstęgowego kreskowego, służącego jako skala odległości ławy fotometrycznej $u(d_2)$. Przyjęto prostokątny rozkład prawdopodobieństwa oszacowania niepewności odległości.

$$u(d) = \sqrt{u(d_1)^2 + u(d_2)^2} \quad (4)$$

gdzie: $u(d_1) = \frac{d_1}{\sqrt{3}}$, $u(d_2) = \sqrt{0,08^2 + 0,005^2 + d^2}$ mm

gdzie: d – długość odcinka wyrażona w metrach.

- poprawka d_L uwzględniająca dokładność ustawienia głowicy fotometrycznej wzorcowanego luksomierza na ławie fotometrycznej. Zmienność ustalenia odległości d_L na ławie fotometrycznej oszacowano na $d = 0,0005$ m przy założeniu prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa. Niepewność standardową wyznaczono z zależności:

$$u(d_L) = \frac{d}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

- poprawka d_W uwzględniająca dokładność ustawienia żarnika wzorca światłości na ławie fotometrycznej. Zmienność ustalenia odległości d_W na ławie fotometrycznej oszacowano na $d = 0,0005$ m przy założeniu prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa, a niepewność standardową wyznaczono z zależności (5).

- rozdzielczość luksomierza. Natężenie oświetlenia odczytywane jest na wyświetlaczu luksomierza o rozdzielczości $D = 1$ lx. Niepewność standardową przy przyjęciu prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa wyznaczono z zależności:

$$u(\alpha_{wskazane}) = \frac{D}{2\sqrt{3}} \quad (6)$$

- względny współczynnik światła rozproszonego c_{rozp} wyznaczono w oparciu o wzór:

$$c_{rozp} = \frac{\alpha_r}{\alpha_{wskazane} - \alpha_r} \quad (7)$$

gdzie: α_r - wskazanie przyrządu przy zastoniętej przesłonie – przyjęto 0,02 lx,

$\alpha_{wskazane}$ - wskazanie przyrządu przy odsłoniętej przesłonie.

Przyjęto prostokątny rozkład prawdopodobieństwa współczynnika rozproszenia.

g) współczynnik m_i wyznaczany jest na podstawie pomiarów w oparciu o wzór:

$$m_i = \frac{\ln \frac{\alpha}{\alpha_{zn}}}{\ln \frac{i}{i_{zn}}} \quad (8)$$

gdzie: α_{zn} – wskazanie przyrządu przy prądzie znamionowym i_{zn} wzorca światłości,

α – wskazanie przyrządu przy prądzie i .

Niepewność standardową, przy założeniu prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa, obliczono ze wzoru:

$$u(m_i) = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

W równaniu (9) przyjęto, że b – stanowi zmienność wartości współczynnika m_i i wynosi 0,18.

h) wartość prądu elektrycznego J_R podana jest w świadectwie wzorcowania wzorca światłości. Pomiar prądu elektrycznego J_R dokonuje się za pomocą rezystora wzorcowego i miliwoltomierza. Wartość J_R przyjęto za wartość dokładną. Niepewność standardowa $u(J_R)$ wynosi zero.

i) wartość napięcia z multimetru. Niepewność standardową (dla danego zakresu pomiarowego) obliczono na podstawie świadectwa wzorcowania multimetru.

h) niepewność standardową $u(R)$ oporu elektrycznego rezystora wzorcowego oszacowano na podstawie klasy dokładności rezystora 0,5 i przyjęto, że jest 10 – krotnie mniejsza od maksymalnego błęd dopuszczalnego.

i) δp - poprawka uwzględniająca spełnienie prawa "odwrotności kwadratów" z dokładnością mniejszą niż 1 %. Dla $\alpha_{wskazane} = 1000$ lx maksymalna poprawka δp wynosi 1 % wartości $\alpha_{wskazane}$. Przyjęto prostokątny rozkład prawdopodobieństwa wyznaczenia poprawki $u(\delta p)$.

W celu przejrzystości analizy niepewności pomiaru wszystkie zidentyfikowane wielkości wejściowe oraz określone odchylenia standardowe przedstawiono w formie tabeli 1, czyli posłużono się tzw. budżetem niepewności [3].

Tabela 1. Budżet niepewności

Symbol wiel. x_i	Estymata wiel. x_i	Niepewność standardowa $u(x_i)$	Rozk. prawd.	Współczynnik wrażliwości c_i	Udział w niep. złożonej lx
$E_{wskazane}$	1000 lx	—	—	—	—
I_R	3068 cd	23,01 cd	norm.	0,3262 lx/cd	7,5049
d_2	1,751 m	$2,89 \cdot 10^{-4}$ m	prost.	-1142,95 lx/m	-0,3299
d_L	0,0 m	$2,89 \cdot 10^{-4}$ m	prost.	-1142,95 lx/m	-0,3299
d_W	0,0 m	$2,89 \cdot 10^{-4}$ m	prost.	-1142,95 lx/m	-0,3299
d_I	0,0 m	$4 \cdot 10^{-4}$ m	prost.	-1142,95 lx/m	-0,0459
$\alpha_{wskazane}$	1000 lx	0,28868 lx	prost.	-1,00049	-0,2889
V	0,0320 V	$2 \cdot 10^{-6}$ V	prost.	218679 lx/V	0,5248
m_i	7,0	0,103923	prost.	0,0000 lx	0,0000
R	0,004 Ω	$2 \cdot 10^{-6}$ Ω	prost.	$-1,75 \cdot 10^6$ lx/ Ω	-3,5000
J_R	8,0078 A	—	—	—	—
c_{rozp}	0,00016	0,000092	prost.	-1000,81 lx	-0,0925
δp	0,00	5,7735 lx	prost.	1	5,7735
$E_{poprawne}$	1000,49 lx		Niepewność standardowa pomiaru		10,13

Niepewność rozszerzona pomiaru $U(E_{poprawne})$ określona jest jako złożona niepewność standardowa pomiaru pomnożona przez współczynnik rozszerzenia $k = 2$, co odpowiada poziomowi ufności ok. 95 %.

$$U(E_{poprawne}) = k \cdot u(E_{poprawne}) = 2 \cdot 10,13 \approx 20,3 \text{ lx}$$

Względna niepewność rozszerzona określona jest jako stosunek niepewności rozszerzonej pomiaru do wartości poprawnej natężenia oświetlenia w danym punkcie pomiarowym.

$$U_{rel}(E_{poprawne}) = \frac{U(E_{poprawne})}{E_{poprawne}} \cdot 100\% = 2,0 \%$$

Ostateczny zapis wyniku obliczeń wartości natężenia oświetlenia metodą analityczną dla wskazania luksomierza wzorcowanego przy $E_{wskazane} = 1000$ lx ma postać:

$$E_{poprawne} = (1000 \pm 20) \text{ lx}$$

2.3. Metoda propagacji rozkładów

Zasada propagacji rozkładów realizowana jest poprzez model matematyczny pomiaru przy użyciu metody Monte Carlo [2]. Metoda Monte Carlo umożliwia szacowanie wyników na podstawie wielu eksperymentów losowych.

Przyjęto, że funkcja pomiaru natężenia oświetlenia opisana jest zależnością (1). Przyjęto także takie same niepewności standardowe i rozkłady prawdopodobieństwa dla wielkości wejściowych jak w tabeli 1.

Szacowanie niepewności metodą Monte Carlo przeprowadzono w programie Microsoft Excel dla liczby próbek M równej 10^4 . Arkusz kalkulacyjny umożliwia generowanie wartości losowych za pomocą funkcji *los*. Funkcja ta generuje zbiór wartości losowych z zakresu od 0 do 1 o rozkładzie równomiernym [4]. Dowolną wartość centrowanej wielkości wejściowej o rozkładzie prostokątnym wyznaczono stosując zależność:

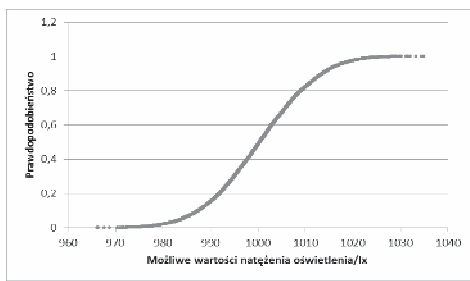
$$\delta x_i = 2\sqrt{3} \cdot (los - 0,5) \cdot u(\delta x_i) \quad (10)$$

gdzie: $u(\delta x_i)$ – niepewność standardowa.

Zbiór wartości o rozkładzie normalnym wyznaczono korzystając z równania:

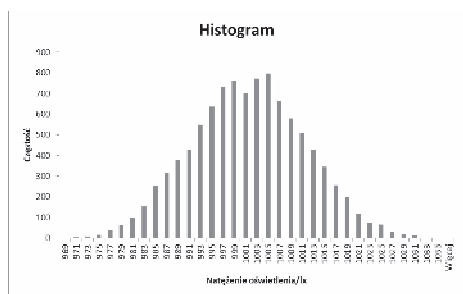
$$\delta x_i = \underbrace{(los + \dots + los - 6)}_{12} \cdot u(\delta x_i) \quad (11)$$

Bazując na wielkościach zapisanych w tabeli budżetu niepewności, w kolejnych kolumnach arkusza wygenerowano zbiór wartości dla wielkości wejściowych zgodnie z przyjętym dla nich rozkładem prawdopodobieństwa. Następnie wyznaczono zbiór możliwych wartości dla wielkości wyjściowej na podstawie równania pomiaru. Dysponując zbiorem 10000 wygenerowanych próbek wyznaczono funkcję gęstości prawdopodobieństwa wielkości wyjściowej natężenia oświetlenia, estymatę wielkości wyjściowej i związaną z nią niepewność standardową oraz przedział rozszerzenia dla prawdopodobieństwa 95 % (y_{low} , y_{high}). Na rysunku 2 wykreślono przebieg dystrybucyjny numerycznej zbioru możliwych wartości wskazania natężenia oświetlenia.



Rys. 2. Dystrybuanta numeryczna rozkładu wartości dla wskazania wzorcowanego luksomierza

Na podstawie uzyskanych wyników wykreślono także histogram otrzymanych wielkości wyjściowych natężenia oświetlenia, zaprezentowany na rysunku 3.



Rys. 3. Histogram dla natężenia oświetlenia 1000 lx

Ostateczny zapis wyniku obliczeń metodą Monte Carlo wartości natężenia oświetlenia wraz z podaniem niepewności pomiaru dla wskazania luksomierza wzorcowanego $E_{wskazane} = 1000$ lx ma postać:

$$E_{poprawne} = 1000,46 \approx 1000 \text{ lx}, \quad u(E_{poprawne}) = 10,15 \approx 10,2 \text{ lx}$$

Przedział rozszerzenia 95 %:

$$[y_{low} = 980,58 \text{ lx}, y_{high} = 1020,20 \text{ lx}]$$

Przyjmując równomiernie rozłożony przedział rozszerzenia wokół wartości estymowanej natężenia, niepewność rozszerzoną wyznaczono z zależności:

$$U(E_{poprawne}) = \frac{y_{high} - y_{low}}{2} = 19,81 \approx 19,8 \text{ lx}$$

Względna niepewność rozszerzona obliczona za pomocą metody Monte Carlo wynosi:

$$U_{rel}(E_{poprawne}) = 2,0 \%$$

2.4. Rezultaty

W tabeli 2 przedstawiono uzyskane wyniki pomiaru natężenia oświetlenia dla $E_{wskazane} = 1000$ lx oszacowane zarówno metodą propagacji niepewności oraz metodą Monte Carlo.

Tabela 2. Wyniki pomiaru natężenia oświetlenia

Estymata dla mierzonego natężenia oświetlenia 1000 lx	
Prawo propagacji	$1000,49 \pm 20,26$ lx
Monte Carlo	$1000,46 \pm 19,81$ lx

Zestawiając wyniki oszacowanej niepewności rozszerzonej (tabela 2) widać, że rezultaty te nieznacznie różnią się między sobą. Różnica między wynikami niepewności pomiaru wynosi 2,2 %.

Biorąc pod uwagę fakt, że w świadectwie wzorcowania wartość natężenia oświetlenia podawana jest co do jedności, a niepewność pomiarowa wyrażana jest w wartościach względnych to różnice w wynikach nie mają wpływu na wynik ostateczny i obie metody dają te same rezultaty.

3. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono zagadnienie szacowania niepewności pomiaru natężenia oświetlenia dwiema metodami: metodą opartą na Przewodniku GUM z zastosowaniem prawa propagacji niepewności oraz metodą numeryczną – symulacji Monte Carlo. Można zauważyć dużą zgodność wyników niepewności pomiaru uzyskanych dla obu metod. Należy jednak mieć na uwadze fakt, że wynik w metodzie Monte Carlo jest rezultatem symulacji. Chcąc uzyskać lepszą dokładność symulacji do obliczeń można wykorzystać 10^5 lub 10^6 próbek. Zdaniem autora metoda Monte Carlo może z powodzeniem być wykorzystywana do szacowania niepewności pomiaru w laboratoriach wzorcujących. Ponadto zastosowanie metody Monte Carlo pozwala ominąć skomplikowany aparat matematyczny, brak jest konieczności obliczania współczynników rozszerzenia, jest prosta w implementacji i można ją stosować przy wykorzystaniu powszechnie dostępnego narzędzia obliczeniowego.

4. BIBLIOGRAFIA

1. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement – JCGM 100:2008.
2. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the Guide to the expression of uncertainty in measurements – Propagation of distribution using Monte Carlo method, JCGM 101:2008.
3. Piotrowski J., Kostyrko K.: Wzorcowanie aparatury pomiarowej, PWN, Warszawa, 2012.
4. Fotowicz P.: Obliczenia niepewności pomiaru metodą Monte Carlo w arkuszu kalkulacyjnym, Metrologia. Biuletyn GUM, nr 2/2010, s. 15-18.

ESTIMATION OF THE UNCERTAINTY OF MEASUREMENT OF ILLUMINANCE USING CLASSIC AND MONTE CARLO METHODS

The Photometric Laboratory in Local Office of Measures in Białystok calibrates luxmeters. To calculate a uncertainty of measurement of illuminance the Monte Carlo method and uncertainty propagation law method are used.

This paper presents calibration process of a luxmeters and describes inputs values which affect on measurement uncertainty. Shown how to use both methods, and how to create uncertainty budget. Uncertainty of measurement calculated by Monte Carlo method was made in Microsoft Excel software.

Comparison of the results of both methods shows that they are similar. Difference between results of measurement uncertainty is 2,2 %. The results show that Monte Carlo Method can be effectively used in calibration laboratories.

Keywords: calibration, illuminance, measurement uncertainty, Monte Carlo method.