



Defekty topologiczne i przemiany fazowe¹

Wykład noblowski wygłoszony 8 grudnia 2016

John Michael Kosterlitz

Uniwersytet Browna, Providence, Rhode Island, USA

Opublikowany w języku polskim za zgodą Nobel Foundation

©the Nobel Foudation 2016

Przekład dokonany przy wsparciu finansowym Fundacji Pro-Physica

Słowa kluczowe: układy dwuwymiarowe, przemiany fazowe indukowane przez defekty topologiczne, wiry w układach spinów, dyslokacyjna teoria topnienia, grupa renormalizacji

Keywords: two-dimensional systems, phase transitions induced by topological effects vortices in spin systems, dislocation theory of melting, renormalization group flow

1. Wprowadzenie

To wielki zaszczyt, mówić dziś do Państwa na temat teoretycznych odkryć dotyczących topologicznych przemian fazowych i topologicznych faz materii. Jako że główny bohater, David Thouless², nie może tu wystąpić osobiście, my, dwaj pomniejsi bohaterowie, Duncan Haldane i ja, zostaliśmy poproszeni, aby zastąpić Davida. Jest to bardzo trudne zadanie. Dręczyło mnie ono przez dłuższy czas, gdyż nie uważałem się za odpowiednią do tego osobę. W końcu czas [dany mi na podjęcie decyzji]³ upłynął i musiałem przygotować coś, co by się nadało. Postanowiłem więc rozpocząć od moich pierwszych kontaktów z Davidem i powiedzieć, jak doszło do tego, że w końcu wspólnie pracowaliśmy nad czymś, co przyniosło Nagrodę Nobla. Następnie podsumuję moje zrozumienie przełomu, jakim było zastosowanie przez Niego topologii do klasycznej (tj. występującej nawet w granicy $\hbar = 0$) przemiany fazowej Berezinińskiego–Kosterlitz–Thoulessa zwanej też przemianą BKT. David pracował również nad wieloma różnymi zastosowaniami topologii do układów kwantowomechanicznych i związanych z topologią zjawiskami, takimi jak kwantowy efekt Halla. O wkładzie, jaki David wniósł do tych zagadnień, powie Państwu Duncan Haldane.

Po raz pierwszy ujrzałem Davida Thoulessa w roku 1961, gdy byłem świeżo upieczonym studentem Uniwer-

sytetu w Cambridge. Wraz z dużą grupą ćwiczeniową oczekiwałem na prowadzącego zajęcia z matematyki dla fizyków, żeby przyszedł i nas oświecił, gdy do sali wkroczył jakiś młody człowiek, zdecydowanie za młody, jak na taki zaawansowany przedmiot. Było jasne, że pomylił sale. Ku naszemu zdumieniu stanął przed nami i zaczął mówić o różnych skomplikowanych kawałkach matematyki, o których większość grupy albo nigdy wcześniej nie słyszała, albo ich nie rozumiała. Z miejsca stało się jasne, że mamy do czynienia z umysłem działającym na zupełnie innym poziomie, niż umysły zasiadających w audytorium. Moje późniejsze kontakty z Davidem tylko spotęgowały to pierwsze wrażenie. Po raz drugi zetknąłem się z nim w roku 1971 na Wydziale Fizyki Matematycznej Uniwersytetu w Birmingham w Anglii, gdzie trafiłem trochę przez przypadek jako postdok zajmujący się fizyką wysokich energii. Po roku przeżywania frustracji szukałem wtedy jakiegoś nowego problemu, którym mógłbym się zająć, a David wprowadził mnie w nowy świat topologii i przemian fazowych w układach dwuwymiarowych.

Jeśli o mnie chodzi, to moje badania wzbudzeń topologicznych rozpoczęły się w roku 1970, gdy byłem zajmującym się fizyką wysokich energii postdokiem w Instytucie Fizyki Teoretycznej na uniwersytecie w Turynie we Włoszech. Będąc bardzo niezorganizowaną osobą nie zdążyłem wysłać w porę mojego zgłoszenia do konkursu na stanowisko w CERN w Genewie i zostałem bez zatrudnienia na następny rok. Po wysłaniu kilku odpowiedzi na ogłoszenia o pracy znalezione w brytyjskich czasopiśmie, otrzymałem stanowisko postdoka na Wydziale Fizyki Matematycznej uniwersytetu w Birming-

1. Nagrodę Nobla z fizyki w roku 2016 podzielili między siebie David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane i J. Michael Kosterlitz. Artykuł jest tekstem jednego z dwóch wykładów wygłoszonych z tej okazji (przyp. red.).

2. David J. Thouless zmarł 06.04.2019 (przyp. red.).

3. Teksty w nawiasach kwadratowych dodał tłumacz z uwagi na zbyt zwięzły, a czasem wręcz niezrozumiały język oryginału (przyp. red.).

ham w Anglii. Nie miałem ochoty jechać do Birmingham, które w owym czasie było dużym miastem przemysłowym w płaskim środku Anglii, w którym budowano wiele samochodów i ciężarówek. Z pewnością nie było to dla mnie najlepsze miejsce do życia, jednak z moją dziewczyną zdecydowaliśmy, że będzie to lepsze niż alternatywa, jaką był brak zatrudnienia. Przez pierwszy rok pracy kontynuowałem tam pewne skomplikowane obliczenia w ramach kwantowej teorii pola, ale przydarzył mi się przykry wypadek: byłem już bliski spisania moich obliczeń do publikacji, gdy na moim biurku wylądował preprint grupy z Berkeley, która zrobiła dokładnie to samo. Gdy taka sytuacja powtórzyła się jeszcze dwa lub trzy razy, straciłem wszelkie złudzenia. W desperacji zacząłem obchodzić cały wydział w poszukiwaniu jakiegoś sensownego problemu z jakiegokolwiek dziedziny fizyki. Pojawiłem się też w gabinecie Davida Thoulessa, by usłyszeć od niego o kilku nowych i tajemniczych pojęciach, takich jak topologia, wiry w substancjach wykazujących nadciekłość i dyslokacje w dwuwymiarowych kryształach. Żeby było jeszcze gorzej, moja znajomość mechaniki statystycznej była niemal zerowa, ponieważ wcześniej nie uczyłem się na wykład z tego przedmiotu, uważając, że jest on nieistotny dla fizyki wysokich energii, którą uważałem za jedyny godny zainteresowania dział fizyki. Ku memu zaskoczeniu pomysły Davida wydały mi się sensowne i, jako nowe i odmienne [od innych], warte rozpatrzenia. Zaczęliśmy pracować nad problemem przemian fazowych, w których pośredniczą defekty topologiczne; mojemu niedoświadczonemu umysłowi wydawało się to po prostu jeszcze jednym zastosowaniem teoriopólowej koncepcji i jako takim wartym, by się im przyjrzeć. Nie zdawałem sobie sprawy ani z tego, jak nowatorskie i istotne okazały się w nadchodzących dekadach te idee oraz ich zastosowania, ani dokąd nas one zaprowadzą.

Teraz chciałbym powiedzieć, jak wydatnie David przyczynił się do zrozumienia przemian fazowych w układach dwuwymiarowych. Jednym z powodów zajęcia się przez nas takimi właśnie układami było to, że wydawały się nam one prostsze niż układy trójwymiarowe. David już wcześniej zajmował się był przemianami fazowymi indukowanymi przez defekty topologiczne w kontekście jednowymiarowego łańcucha spinów Isinga, których oddziaływanie wzajemne zanikało [z odległością] jak $1/r^2$. Model taki można też rozpatrywać w języku defektów topologicznych lub ścian domenowych, których oddziaływanie zmienia się jak $\ln(r/a)$ [1]. Wcześniej David wykazał był, że w [temperaturze krytycznej] T_{cr} namagnesowanie spada do zera w sposób nieciągły, mimo iż nie jest to przemiana fazowa pierwszego rodzaju. Efekt ten został później bardziej ilościowo zbadany przez Andersona i Yuvala [2],

którzy zastosowali do niego jedną z pierwszych wersji grupy renormalizacji. Praca ta w istotny sposób wpłynęła na nasze myślenie o przemianach fazowych indukowanych przez defekty, gdyż zainspirowała nas do szukania innych układów, w których występują punktowe defekty topologiczne, a ich oddziaływania wzajemne zależą od odległości w sposób logarytmiczny. Przykładami takich defektów są punktowe wiry w błonach tworzonych przez atomy ^4He , w błonach nadprzewodzących oraz punktowe dyslokacje w dwuwymiarowych kryształach. To z kolei doprowadziło nas do zastosowania do takich układów modelu gazu coulombowskiego. Ci z Państwa, którzy zwracają uwagę na szczegóły mogą jednak uważać, że analogia ta ma poważną wadę, gdyż nasz wyjściowy jednowymiarowy układ jest różny od innych układów, które można traktować jak gaz coulombowski w dwóch wymiarach. Powodem, dzięki któremu [analogia] z gazem coulombowskim jednowymiarowego układu z oddziaływaniem logarytmicznym działa, są nałożone [na ten układ takie] więzy wymuszające, że ładunki (lub ściany domen) rozmieszczone wzdłuż linii mają naprzemienne znaki. Jeśli więzy te zostałyby zniesione, przemiana fazowa by znikła. Oczywiście nie jest to pierwszy przypadek, gdy poprawna konkluzja została wyprowadzona z błędnych przesłanek.

Jako że standardowym modelem dwuwymiarowego kryształu jest taki układ cząsteczek, że znajomość położenia jednej z nich wyznacza poprzez równość $\mathbf{r}(n, m) = n \mathbf{e}_1 + m \mathbf{e}_2$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$, a \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 są dwoma fundamentalnymi wektorami sieci) położenia wszystkich pozostałych, pierwszą rzeczą, jaką musieliśmy zrozumieć, była rola długozasięgowego uporządkowania w kryształach i substancjach nadciekłych. Problemem jest tu argument Paierlsa [3, 4], który mówi, że w dwuwymiarowym ciele stałym długozasięgowego uporządkowanie nie jest możliwe, ponieważ wzbudzenia fononowe o niskich energiach powodują, iż w układzie o wymiarach $L \times L$ średnie kwadratowe wychylenie cząsteczek z ich położenia równowagi rośnie logarytmicznie wraz ze wzrostem rozmiaru L układu. Poglądowo dwuwymiarowy kryształ można sobie wyobrazić jako płaski elastyczny arkusz, na którym zaznaczona jest sieć punktów reprezentujących atomy lub cząsteczki kryształu. Rozciągnijmy teraz, nie rozdzielając go, jedne obszary tego arkusza, a inne ściśnijmy reprezentując w ten sposób gładkie, elastyczne odkształcenia kryształu. W oczywisty sposób punkty (cząsteczki) oddalą się znacznie (w rzeczy samej o odległości proporcjonalne do $\sqrt{\ln L}$) od swoich wyjściowych położenia, choć struktura sieci pozostanie zachowana. Ścisły dowód niewystępowania długozasięgowego uporządkowania takiego rodzaju został podany przez Mermina [5]. Podobne argumenty pokazują, że spontaniczne nama-

gnesowanie nie występuje w dwuwymiarowym magnetyku Heisenberga [6] oraz że wartość oczekiwana parametru porządku charakteryzującego nadciekłość dwuwymiarowej cieczy Bosego jest równa zeru [7].

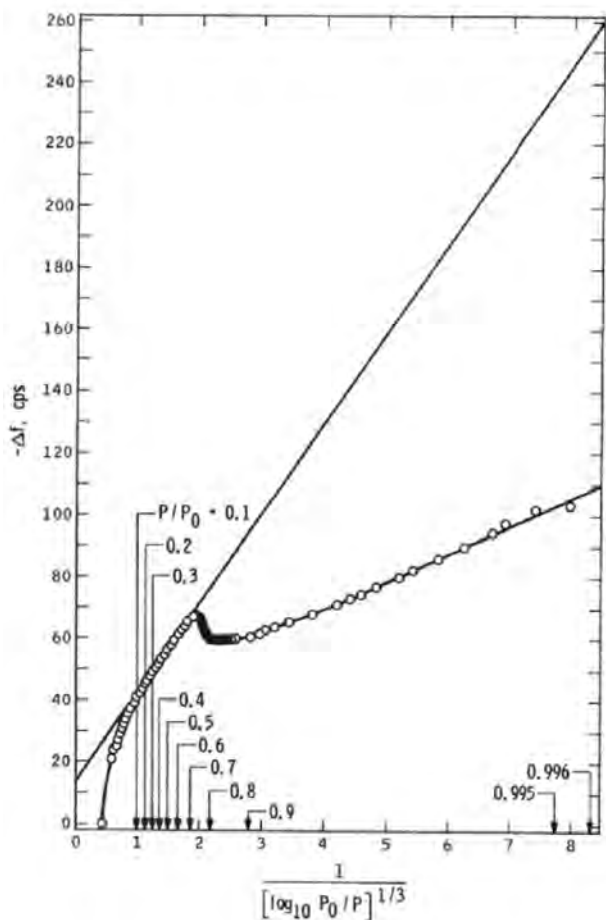
Zgodnie z tym, co się na początku lat siedemdziesiątych powszechnie uważało, oznaczało to, iż [w układach dwuwymiarowych] przemiana fazowa do stanu uporządkowanego nie może zachodzić w żadnej skończonej temperaturze, gdyż stan uporządkowany po prostu nie istnieje! Ta drobna sprzeczność nas jednak nie powstrzymała: Davida — bo rozumiał on subtelność zagadnienia i był w stanie dostrzec wyjście z pozornej sprzeczności, a mnie — bo zbyt mało wiedziałem, aby w ogóle zdawać sobie sprawę, że jakaś sprzeczność istnieje. Patrząc z perspektywy, zrozumiałem, że *wyjątkowo* czasami bycie nieświadomym tego, iż jakiś problem jest nierozwiązywalny pozwala posuwać się do przodu i rozwiązać go mimo to. Na szczęście dla mnie była to właśnie jedna z takich sytuacji. Oczywiście pomogło nam też to, że były pewne numeryczne i eksperymentalne dowody występowania przemian fazowych do bardziej uporządkowanej fazy niskotemperaturowej w dwuwymiarowych

kryształach [8, 9], bardzo cienkich błonach tworzonych przez atomy ^4He [10, 11] i w dwuwymiarowych modelach magnetyków [12, 13, 14]. Najbardziej przekonującym nas dowodem eksperymentalnym był wykres przedstawiony na ryc. 1. Pokazana jest na nim zależność obniżenia Δf częstości rezonansowej f kryształu od powierzchniowej gęstości masy zaadsorbowanej na jego powierzchni błony utworzonej z ^4He . Odchylenie tej zależności od linii prostej świadczy o pojawieniu się stanu nadciekłego. Jest jasne, że gdy gęstość $\rho_s(T)$ zaadsorbowanej masy wzrasta, w dwuwymiarowej błonie zachodzi gwałtowna przemiana; przypuszczalnie gęstość $\rho_s(T)$ masy ma przy tym skończoną nieciągłość. Takie zachowanie wydawało się bardzo dziwne, gdyż zgodnie z powszechną wiedzą przy przechodzeniu do fazy uporządkowanej gęstość ρ_s powinna była narastać w sposób ciągły od zera. Wymagało więc ono wyjaśnienia, które musiało być oczywiście różne od tego, co było wcześniej znane.

2. Przełom

Rozwiązanie tej zagadki jest takie, że w niektórych układach dwuwymiarowych może istnieć bardziej subtelny typ uporządkowania, nazywany uporządkowaniem topologicznym. Najprostszym przykładem [takiego układu] jest ferromagnetyk Isinga tworzony przez zbiór spinów $S_a = \pm 1$ umieszczonych w węzłach D -wymiarowej sieci kubicznej. Reguły mechaniki statystycznej są następujące: (i) każda konfiguracja o energii E układu może wystąpić z prawdopodobieństwem $\exp(-E/k_B T)$, (ii) należy obliczyć funkcję podziału $Z(T) = \sum_{\text{konfig.}} \exp(-E/k_B T)$, w której zawarta jest cała potrzebna informacja o termodynamice układu. Najbardziej prawdopodobnymi wzbudzeniami są więc te o niskich energiach. To one są odpowiedzialne za niewystępowanie prawdziwego długozasięgowego uporządkowania, ale poza tym nie mają żadnych innych konsekwencji. Aby mówić o niszczeniu stanu nadciekłości albo o topieniu się dwuwymiarowego kryształu musimy uwzględnić bardzo mało prawdopodobne defekty topologiczne o wysokich energiach. Takimi defektami są w nadcieczy wiry, a w kryształach dyslokacje [15, 16, 17]. Trzeba tu zauważyć, że podobne idee proponował już nieco wcześniej Bierzeziński [18, 19], ale kiedy pracowaliśmy nad tym zagadnieniem nie wiedzieliśmy o tym. Z jakiegoś powodu nasza praca przyciągnęła więcej uwagi niż ta Bierzezińskiego.

Można oczywiście zadać pytanie, jaki związek ma topologia, która jest badaniem sfer mających N dziur, z układami, którymi się zajmowaliśmy i które wszystkie są płaskimi jednospójnymi dwuwymiarowymi powierzchniami nie mającymi żadnych dziur. Topologia, z której korzystamy jest wyznaczana przez fizykę układu



Ryc. 1. Na osi poziomej odłożona jest miara całkowitej gęstości powierzchniowej zaadsorbowanej błony, a na osi pionowej wielkość $-\Delta f$ będąca miarą zaadsorbowanej masy, która odłączyła się od oscylującego podłoża. Przedruk za zgodą z pracy M. Chestera, L.C. Yanga i J.B. Stephensena *Phys. Rev. Lett.* 31, 211 (1972) [© by APS]

i energii jego konfiguracji. Przemiany fazowe można sobie wyobrazić jako przejście [układu] od konfiguracji należącej do jednego sektora topologicznego do konfiguracji należącej do innego sektora; sektory te są zdefiniowane przez wartości pewnych niezmienników topologicznych. Rolę topologii można omówić porównując dwuwymiarowy magnetyk tworzony przez mające postać płaskich rotatorów [klasyczne] spiny o dwóch składowych (tzw. model płaskich rotatorów) z modelem Heisenberga, w którym spiny mają trzy składowe. Stan i -tego płaskiego rotatora można zadać pisząc

$$\mathbf{s}_i = (s_{ix}, s_{iy}) = s (\cos \phi_i, \sin \phi_i),$$

$$\Psi_i = s_{ix} + i s_{iy} = s e^{i\phi},$$

gdzie s jest wartością bezwzględną spinów, przyjmowaną zwykle za jednostkową. Rozpatrzmy teraz duży układ o rozmiarach $L_x \times L_y$ narzucając nań tzw. periodyczne warunki brzegowe (podobne rozumowanie można przeprowadzić także w przypadku innych warunków brzegowych). Kierunek namagnesowania w jakimś obszarze jest w przypadku modelu płaskich rotatorów wyznaczony przez kąt ϕ , który zmienia się wolno z położeniem. Mimo iż wartość tego kąta fluktuuje w dużym zakresie, jeśli układ jest duży, liczba wielokrotności 2π , o jaką kąt ϕ zmienia się wzdłuż drogi obiegającej cały układ⁴ jest *topologicznym* niezmiennikiem: liczby n_x i n_y dane przez

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{L_x} dx \frac{\partial \phi}{\partial x} = n_x,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{L_y} dy \frac{\partial \phi}{\partial y} = n_y,$$

definiują [więc] poszczególne stany metastabilne układu. Przejścia od jednego stanu metastabilnego do drugiego mogą zachodzić tylko wtedy, gdy para wirantywir utworzy się, rozdzieli i zniknie wskutek rekombinacji po obiegnięciu układu dookoła przez wir lub antywir. Proces ten powoduje zmianę n_x lub n_y o jedność; takiej zmianie stara się jednak zapobiec bariera energetyczna, której wysokość jest proporcjonalna do logarytmu rozmiarów układu.

Analogiczny dwuwymiarowy układ, składający się ze spinów mających po trzy składowe

$$\mathbf{s}_i = (s_{ix}, s_{iy}, s_{iz})$$

$$= s (\sin \theta_i \cos \phi_i, \sin \theta_i \sin \phi_i, \cos \theta_i),$$

nazywa się modelem Heisenberga. Wielkość taka jak

$(1/2\pi) \int_0^{L_x} dx (\partial \phi / \partial x)$ nie jest w tym przypadku topologicznym niezmiennikiem. Każda zmiana o 2π kąta azymutalnego ϕ wzdłuż drogi obiegającej cały układ może być zlikwidowana przez ciągłą zmianę kąta biegunowego θ . W rzeczy samej konfigurację dwuwymiarowego modelu Heisenberga charakteryzuje tylko jeden niezmiennik topologiczny

$$N = \frac{1}{4\pi} \int dx dy \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right),$$

przyjmujący wartości całkowite $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Jeśli traktujemy kierunek namagnesowania w każdym punkcie dwuwymiarowej powierzchni jak odwzorowanie tej przestrzeni w powierzchnię sfery jednostkowej, to niezmiennik N zlicza, ile razy przestrzeń „nawija się” na tę sferę. Niezmiennik ten nie ma żadnego znaczenia w mechanice statystycznej, bo wysokość bariery energetycznej rozdzielającej konfiguracje o różnych jego wartościach jest [tylko] rzędu jedności. Między różnymi sektorami topologicznymi (charakteryzowanymi różnymi wartościami liczby N) nie istnieje więc [praktycznie] żadna bariera, czego konsekwencją jest brak stanu uporządkowanego dwuwymiarowego magnetyka Heisenberga o $n = 3$ (n oznacza liczbę składowych spinu); w przypadku zaś dwuwymiarowego modelu płaskich rotatorów sektory topologiczne charakteryzowane wartościami n_x i n_y są rozdzielone nieskończoną [w granicy nieskończonego układu, tj. w tzw. granicy termodynamicznej] barierą energetyczną, czego konsekwencją jest występowanie przemiany fazowej, gdy fluktuacje zmieniają konfigurację [dużego, ale skończonego] układu z należącej do jednego sektora topologicznego na należącej do innego.

Można to zilustrować pokazując, jak konfigurację [spinów trójskładnikowego modelu Heisenberga] o $N = 1$ da się w sposób ciągły zdeformować do konfiguracji o $N = 0$. Prosty przykład konfiguracji o $N = 1$ jest taka, w której kąt θ jest ciągłą funkcją zmiennej $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i zmienia się od $\theta = 0$ w $r = 0$ do $\theta = \pi$ przy $r = a$ i pozostaje równy π , gdy $r > a$. Kąt ϕ jest dany przez $\phi(x, y) = \arctg(y/x)$. Energia takiej konfiguracji, w której kąt θ zmienia się wolno z położeniem, jest równa

$$E = \frac{1}{2} J s^2 \int dx dy [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \phi)^2]$$

$$= \pi J s^2 \int_0^a dr r \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right].$$

Nawet jeśli kąt θ zmienia się pomiędzy $r = 0$, a $r = a$ liniowo, energia E pozostaje skończona i nie zależy od a . Oczywiście powyższy wzór na energię E przestaje być słuszny, gdy wartość a jest mała, ale wtedy liczba spinów

4. To znaczy wzdłuż drogi biegnącej od jednej krawędzi do przeciwległej; ponieważ narzucone są periodyczne warunki brzegowe, można uważać, że spiny tworzą sieć na torusie — wtedy taka droga obiega torus dookoła (przyp. tłum.).

mieszczących się w kole o promieniu a jest mała, więc każda bariera energetyczna [z nimi związana] nie może być wysoka i wartość topologicznego niezmiennika N może zostać zmieniona przez małe fluktuacje termiczne. Konkluzja jest więc taka, że przy skończonych [niezerowych] temperaturach uporządkowane stany dwuwymiarowego modelu płaskich rotatorów i pokrewnych mu modeli mogą istnieć, a stany uporządkowane trójściłkowego modelu Heisenberga nie mogą.

Zgadza się to z wynikami obliczeń numerycznych [14], późniejszymi wynikami uzyskanymi przez Poliakowa za pomocą grupy renormalizacji [20] i eksperymentami wykonanymi dla nadcięży [10, 11]. Zauważmy też, iż obliczenia Poliakowa zostały wykonane przy ograniczeniu się do pojedynczego sektora topologicznego o $N = 0$, tak że oba argumenty niezależnie potwierdzają niewystępowanie przemiany fazowej w dwuwymiarowym modelu Heisenberga.

3. Wiry w dwuwymiarowym modelu płaskich rotatorów

Rola jaką defekty topologiczne odgrywają w przemianach fazowych zachodzących w układach dwuwymiarowych została przez nas przedyskutowana w pracy [15] z 1972 roku, w której podaliśmy argument oparty na energii swobodnej defektu. Energię swobodną układu płaskich rotatorów oraz energię błony utworzonej z nadcięży można zapisać wzorem

$$\frac{H}{k_B T} = \frac{K_0(T)}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{a_0^2} (\nabla \theta(\mathbf{r}))^2,$$

w którym a_0 jest stałą sieci lub jakąś skalą mikroskopowego obciążenia, a

$$K_0(T) = \begin{cases} J/k_B T & \text{płaskie rotatory,} \\ \hbar^2 \rho_s^0(T)/m^2 k_B T & \text{błona z nadcięży.} \end{cases} \quad (1)$$

J jest tu tzw. energią oddziaływania wymiennego dwóch sąsiednich spinów o jednostkowej długości, tak więc

$$\begin{aligned} H[\{\mathbf{s}\}] &= \frac{J}{2} \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} [s(\mathbf{r}) - s(\mathbf{r}')]^2 \\ &= J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} [1 - \cos(\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}'))]. \end{aligned}$$

W przypadku błony utworzonej z ^4He

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{s_0^2} \rho_s^0(T, \mathbf{r}) \mathbf{v}_s^2,$$

gdzie $\mathbf{v}_s = (\hbar/m)\nabla\theta$ jest prędkością przepływu nadcięży, $\theta(\mathbf{r})$ jest fazą parametru porządku $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| \exp(i\theta(\mathbf{r}))$ charakteryzującego nadcięży, a $\rho_s^0(\mathbf{r})$ jest zależną od położenia niezrenormalizowaną gęstością nadcięży. Gęstość ta jest równa zeru w rdzeniu

wirów, a w pozostałych miejscach jest stała. Okazuje się, że jej dokładna zależność od położenia jest nieistotna, bo konsekwencje ma tylko fakt, że rdzeń każdego wiru wnosi pewną skończoną energię E_c . Powód fizyczny tego jest taki, że na utworzenie się rdzenia wiru potrzebny jest pewien wydatek energii swobodnej, bo rdzeń jest miejscem, w którym parametr porządku charakteryzujący nadcięży zeruje się. Możemy teraz zobaczyć, jak pojawia się tu topologia: każdy wir jest równoważny dziurze w [dwuwymiarowej] powierzchni; nadcięży pokrywa więc dwuwymiarową powierzchnię, mającą pewną liczbę otworów i $\oint_C d\theta = 2\pi n$ [(całka po zamkniętej krzywej otaczającej otwór)], tak iż wir można nazwać topologicznym defektem.

Ponieważ energia wzajemnego oddziaływania każdej pary wirów zależy od ich odległości logarytmicznie, hamiltonian takiego układu

$$\begin{aligned} \frac{H}{k_B T} &= -\pi K_0(T) \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} n(\mathbf{R}) n(\mathbf{R}') \ln \left(\frac{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}{a} \right) \\ &\quad - \ln y_0 \sum_{\mathbf{R}} n^2(\mathbf{R}), \end{aligned}$$

jest dokładnie hamiltonianem elektrycznie obojętnej plazmy coulombowskich ładunków. Można też ograniczyć się do rozpatrzenia tylko najmniejszych wartości $n = 0, \pm 1$ ładunku, gdyż [przyczynki wnoszone przez konfiguracje] o większej jego wartości są tłumione przez wyższe potęgi parametru $y_0 = \exp(-E_c/k_B T) \ll 1$ zwanego lotnością. Nasza pierwsza próba otrzymania rozwiązania tak postawionego problemu polegała na rozpatrzeniu pojedynczego odizolowanego wiru o jednostkowym krążeniu w układzie o rozmiarach $L \times L$. Ponieważ wir ma energię $\Delta E/k_B T = \pi K_0(T) \ln(L/a)$ i entropię $\Delta S = k_B \ln(L^2/a^2)$, jego energia swobodna wynosi $\Delta F = \Delta E - T\Delta S = k_B T(\pi K_0(T) - 2) \ln(L/a)$. Przy niskiej temperaturze T takiej, że $2k_B T < \pi J$, $\Delta F \rightarrow \infty$ i prawdopodobieństwo $P \propto \exp(-\Delta F/k_B T)$ powstania wiru dąży do zera, natomiast gdy $2k_B T > \pi J$, prawdopodobieństwo to dąży do jedności i [w układzie] powstanie skończona gęstość swobodnych wirów. Zdaliśmy sobie sprawę z Davidem, że możemy charakteryzować plazmę tworzoną przez n coulombowskich ładunków $q = +1$ i n ładunków $q = -1$ wprowadzając zależną od odległości funkcję dielektryczną $\epsilon(r)$ tak, by siła działająca pomiędzy parą ładunków próbnych rozdzielonych na odległość r była równa $2\pi K_0/r\epsilon(r) = 2\pi K(r)/r$. Energia [oddziaływania] takiej pary jest równa $E(r) = \int_a^r dr' K(r')/r' = U(r) \ln(r/a)$. Samozgodne równanie na $K(l) \equiv K(r = e^l)$ przybiera wtedy postać

$$K^{-1}(l) = K^{-1}(0) + 4\pi^3 y_0^2 \int_0^l dl' e^{4l' - 2\pi U(l')}.$$

To samozgodne równanie całkowe na efektywną ener-

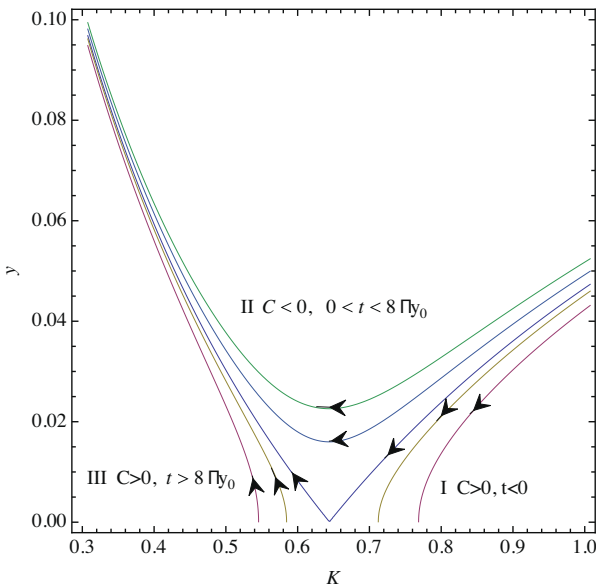
gię oddziaływania [15] wyprowadzili Kosterlitz i Thouless [16].

Jest jasne, iż przejście od fazy, w której występują związane dipole, do fazy, w której ładunki są swobodne, będzie zachodzić, gdy $\pi K(\infty) = 2$. Żeby jednak wyznaczyć zachowanie się układu przy temperaturach bliskich temperaturze krytycznej T_{cr} , konieczne jest rozwiązanie samozgodnego równania na $K(l)$ i to było tu głównym problemem. Kosterlitz i Thouless dokonali niestety niepotrzebnego przybliżenia, zastępując $U(r)$ przez $K(r)$ i znaleźli samozgodne rozwiązanie na $K(r)$ [w tym przybliżeniu]. Przybliżenie było uzasadnione tym, że $U(r) - K(r) \ll 1$, niemniej jednak dało niepoprawny wynik. Właściwe podejście podał Young [21]. Pokazał on, że równanie otrzymane przez Kosterlitz i Thoulessa jest równoważne równaniom grupy renormalizacji Kosterlitz [17]:

$$\frac{dK^{-1}}{dl} = 4\pi^3 y^2 + \mathcal{O}(y^4),$$

$$\frac{dy}{dl} = (2 - \pi K) y + \mathcal{O}(y^3).$$

Co godne podkreślenia, powyższe przybliżone (przez ograniczenie do najniższego rzędu w parametrze lotności y wiru) równania grupy renormalizacji w sposób nieunikniony przewidują ściśle, wartość eksperymentalnie mierzalnej wielkości. Otrzymywane z nich trajektorie przebiegane⁵ przez parametry K i y pokazano na ryc. 2. Jeśli liczby wyznaczone eksperymentalnie są inne



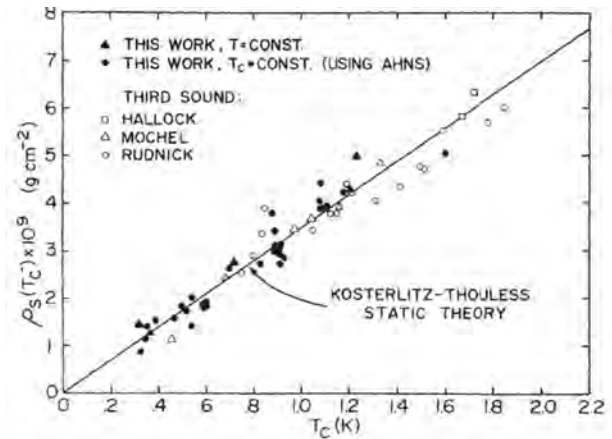
Ryc. 2. Dawane przez podane w tekście równania grupy renormalizacji biegnięcie parametrów dwuwymiarowego modelu płaskich rotatorów. Należy zauważyć, że gdy $T \leq T_{cr}$, $y(\infty) = 0$, a $K^{-1}(\infty) = \pi/2$.

5. W języku grupy renormalizacji mówi się o „biegnięciu” parametrów K i y (przyp. tłum.).

niż przewidziane teoretycznie, to albo eksperyment jest błędny, albo błędna jest cała teoria. Kluczowy eksperyment został wykonany przez Bishopa i Reppy'ego w roku 1978 [23]. Ku naszej wielkiej uldze i zadowoleniu teoretyczne przewidywanie [24]

$$\frac{\rho_s^R(T_{cr}^-)}{T_{cr}} = \frac{2m^2 k_B}{\pi \hbar^2} = 3,491 \times 10^{-8} \text{ g cm}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

zostało potwierdzone doświadczalnie [23, 25]. Dane pochodzące z kilku różnych eksperymentów [26–30] przedstawiono na ryc. 3. Jest interesujące zauważyć, iż dane eksperymentalne zostały otrzymane i wykreślone zanim autorzy dowiedzieli się o naszym przewidywaniu. Można więc uznać je za doświadczalne potwierdzenie słuszności teorii BKT (Bierezińskiego–Kosterlitz–Thoulessa).



Ryc. 3. Nieciągłość gęstości $\rho_s(T^-)$ nadciężu jako funkcja temperatury otrzymana z doświadczeń z trzecim dźwiękiem i skrętnościowymi oscylacjami. Ciągła linia pokazuje przewidywanie teorii statycznej. Wykres przedrukowany za pozwoleniem z pracy D.J. Bishopa i J.D. Reppy'ego *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1727 (1978) [© by APS]

4. Topienie się dwuwymiarowych kryształów

Gruntowne eksperymentalne badanie zjawiska topienia się dwuwymiarowego [kryształu] zostało przeprowadzone przez grupę Mareta [32, 33, 34]. Uzyskane ilościowe [dane] zgadzają się z wykorzystującą topologiczne defekty teorią topienia się dwuwymiarowych kryształów podaną przez Younga, Halperina i Nelsona [35, 36]. Teoria ta wychodzi od wyrażenia

$$F = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} (2\mu_0 u_{ij}^2 + l u_{kk}^2),$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right),$$

w którym u_{ij} jest tensorem naprężeń, a u_i jest polem odkształceń, na liniową sprężystość trójkątnej sieci, która w dwóch wymiarach jest typową strukturą sieciową. Tensorowe pole naprężeń u_{ij} można rozłożyć na część

regularną ϕ_{ij} i część osobliwą $u_{ij}^{\text{sing}}(\mathbf{r})$, która jest skutkiem istnienia dyslokacji [37]. Dyslokacje charakteryzuje całka

$$\oint_C d\mathbf{u} = a_0 \mathbf{b}(\mathbf{r}) = a_0 (n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_1 + m(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_2),$$

z wektora $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ odkształcenia obliczona po krzywej C obejmującej topologiczny defekt lub dyslokację. $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ jest tu bezwymiarowym wektorem Burgersa, a_0 jest stałą sieci krystalicznej, a n i m są liczbami całkowitymi. W ramach teorii sprężystości wykorzystującej przybliżenie continuum można pokazać [36], że

$$u_{ij}^{\text{sing}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\mu} \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_l} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \times a_0 \sum_{\mathbf{r}'} b_m G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

$$G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{K_0}{4\pi} \sum_{n=1}^2 \epsilon_{nm} (r - r')_n \left[\ln \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right) + C \right].$$

Otrzymuje się stąd wzór na energię zbioru dyslokacji wyrażoną przez wektory Burgersa $\mathbf{b}(\mathbf{r})$:

$$\frac{H_D}{k_B T} = -\frac{K_0(T)}{8\pi} \int d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}' \left(\mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}') \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} - \frac{[\mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')][\mathbf{b}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \right).$$

W naszej pracy pominięliśmy drugi człon w tym wzorze przyjmując, że jest on mniej istotny niż wyraz z logarytmem. Był to nieszczęśliwy błąd. Został on naprawiony przez Halperina i Nelsona, którzy przewidzieli istnienie obecnie słynnej heksatycznej fazy płynu o sześciokrotnej symetrii orientacyjnej. My przyjęliśmy, że rozdzielanie się dyslokacji prowadzi do powstania izotropowego płynu bezpośrednio, co jak teraz wiadomo, jest nieprawdą. Proces topienia się dwuwymiarowych kryształów przebiega w dwóch etapach. Przy temperaturze T_m kryształ topi się przez rozdzielanie się dyslokacji przechodząc w heksatyczny płyn i dopiero przy temperaturze $T_i > T_m$ zachodzi przemiana, w której algebraiczny porządek ukierunkowania zostaje zniszczony przez rozdzielanie się dysklinacji, co prowadzi do oczekiwanej przy wysokiej temperaturze fazy izotropowego płynu [35, 36].

Przewidywania tej teorii są podobne do przewidywań dotyczących błon tworzonych przez nadciekły ^4He . Odpowiedni skok zrenormalizowanego (tj. mierzonego) modułu Younga jest dany wzorem

$$\tilde{K}_R(T_m^-) = \lim_{T \rightarrow T_m^-} \frac{4\tilde{\mu}_R(T) (\tilde{\mu}_R(T) + \tilde{\lambda}_R(T))}{2\tilde{\mu}_R(T) + \tilde{\lambda}_R(T)} = 16\pi.$$

$\tilde{\mu}_R(T)$ jest tu wartością zrenormalizowanej wielkości $\mu/k_B T$. Jednym z interesujących, choć niesprawdzal-

nych eksperymentalnie przewidywań tej teorii jest funkcja struktury

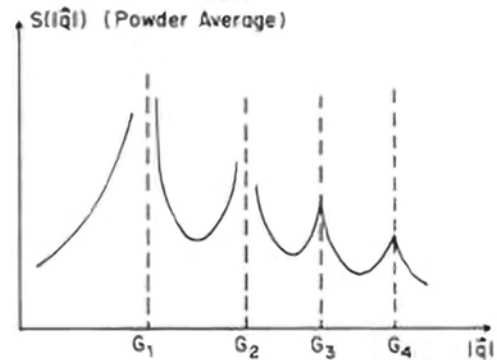
$$S(\mathbf{q}) = \langle |\rho(\mathbf{q})|^2 \rangle = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \langle e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{0}))} \rangle,$$

[która determinowałaby] rozpraszanie promieni X [na dwuwymiarowym kryształ]. Nie ma ona braggowskich maksimów typu funkcji delta; zamiast tego ma maksimum wyrażające się wzorem

$$S(\mathbf{q}) \sim |\mathbf{q} - \mathbf{G}|^{-2+\eta_G(T)},$$

$$\eta_G(T) = \frac{k_B T |\mathbf{G}|^2}{4\pi} \frac{3\mu_R(T) + \lambda_R(T)}{\mu_R(T)(2\mu_R(T) + \lambda_R(T))}.$$

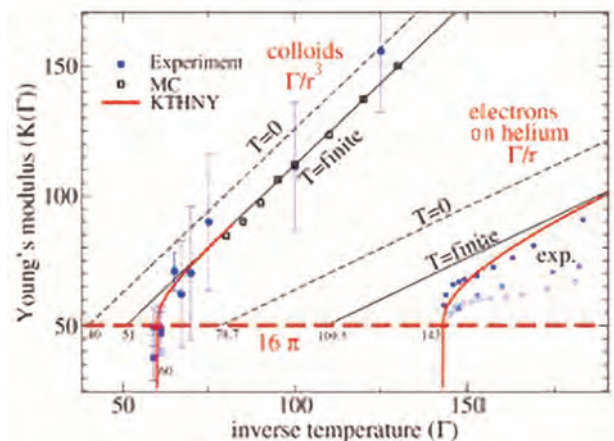
Widać, że przy małych wartościach $|\mathbf{G}|$ ta funkcja staje się nieskończona, gdy $\mathbf{q} = \mathbf{G}$. Przewidywany kształt funkcji struktury, która by była mierzona przez rozpraszanie promieni X , jest więc taki jak pokazany na ryc. 4. Jest to jedno z charakterystycznych przewidywań dyslokacyjnej teorii topnienia. Niestety nie można go zweryfikować eksperymentalnie, gdyż aktualnie dostępne rozmiary układów i ich jakość nie są jeszcze wystarczające.



Ryc. 4. Schematyczny wygląd funkcji struktury $S(\mathbf{q})$ dwuwymiarowego kryształu. Gdy $T \leq T_m$ jest ona rozbieżna przy małych wartościach $|\mathbf{G}|$, jak $|\mathbf{q} - \mathbf{G}|^{-2+\eta_G}$; przy dużych zaś wartościach $|\mathbf{G}|$ ma „dziubki”, czyli skończone nieciągłości pochodnej. Gdy $T > T_m$, wszystkie jej maksima mają skończoną wysokość, a wysokość maksymalna jest równa $\sim \xi_+^{-2+\eta_G}(T)$. Wykres przedrukowany za zgodą z pracy [34] © by CUP⁶

Jednym z głównych mierzalnych przewidywań dyslokacyjnej teorii topnienia jest wartość zrenormalizowanego (tj. mierzonego) modułu Younga. Zgodność teorii i danych doświadczalnych pokazana na ryc. 5 jest tu godna uwagi. Choć przewidywania tej teorii otrzymano już w latach siedemdziesiątych [35, 36], to pomiary [31, 32] zostały wykonane dopiero kilka dziesięcioleci później z powodu trudności w zrealizowaniu odpowiednich układów eksperymentalnych. Układy dwuwymiarowe są bowiem — ogólnie rzecz ujmując — bardzo podatne na zaburzenia pochodzące od podłoża, na którym są one realizowane, a którego wpływu teoria nie uwzględnia.

6. Redakcja PF przeprasza za nie najlepszą czytelność niektórych elementów rycin w tym artykule — takiej jakości ilustracje zawiera oryginalny wykład udostępniony przez Nobel Foundation.



Ryc. 5. Moduł Younga $K_R(T)$ jako funkcja odwrotności efektywnej temperatury Γ . Linia ciągła jest otrzymanym przez Halperina i Nelsona przewidywaniem teorii dyslokacyjnej; punkty są wynikami doświadczalnymi. Przedruk za zgodą z *J. Phys. Condens. Matter* 17 (2005) S3579-S3586 doi: 10.1088/0953-8984/17/45/051 [© by IOP, 2005]

W naszych oryginalnych pracach rozpatrywaliśmy topienie się kryształów, ale nie przedyskutowaliśmy fazy płynnej modelowanej za pomocą periodycznej sieci o odpowiedniej koncentracji swobodnych dyslokacji. Ciało stałe o periodycznej strukturze może wykazywać dwa rodzaje uporządkowania: uporządkowanie translacyjne i uporządkowanie kierunkowe charakteryzujące orientację osi kryształu. Odpowiadającymi im parametrami porządku są gęstość $\rho(\mathbf{r})$ i kierunkowy parametr porządku $\psi_6(\mathbf{r})$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{G}} |\rho_{\mathbf{G}}(\mathbf{r})| e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r})},$$

$$\psi_6(\mathbf{r}) = \exp(6i\theta(\mathbf{r})).$$

Defektami topologicznymi są (i) dyslokacje odpowiedzialne za topienie się ciała stałego polegające na przejściu do fazy uporządkowanego heksatycznego płynu oraz (ii) dysklinacje (wirry) odpowiedzialne za przejście do fazy wysokotemperaturowej, którą jest płyn izotropowy [35, 36].

Teoria ta została opracowana przez Younga [35] oraz przez Halperina i Nelsona [36]. Daje ona bardzo szczegółowe przewidywania, które zostały potwierdzone przez eksperyment [31, 32]. Podsumowuje je wykres pokazany na ryc. 5. Jednym z najbardziej czułych testów tej teorii są, jak dotąd, wyniki Kapfera i Krautha [38], którzy wykonali wielkoskalowe symulacje uwzględniające 10^6 cząstek oddziałujących wzajemnie za pośrednictwem odpychającego potencjału $V(r) = \epsilon(\sigma/r)^n$. Ustalili oni, że w przypadku potencjałów długozasięgowych (o $n < 6$) topienie się kryształu rzeczywiście zachodzi tak, jak to przewiduje scenariusz Kosterlitz–Thouless–Halperina–Nelsona–Younga poprzez pośrednią fazę heksatycznego płynu. Wynik ten obejmuje eksperymenty z koloidami (odpowiadającymi

potencjałowi o $n = 3$) [31, 32], a także eksperymenty z elektronami na powierzchni utworzonej z ^4He (potencjał o $n = 1$) [39]. Natomiast gdy $n > 6$, przemiana płynu heksatycznego w izotropowy staje się przemianą pierwszego rodzaju. Wynik ten zgadza się z symulacjami [dynamiki] gazu twardych kul (model ten odpowiada oddziaływaniu o $n = \infty$). Należy też zauważyć, że symulacje te zostały wykonane dla układów większych niż [rzeczywiste] układy eksperymentalne.

Teoria Beriezińskiego–Kosterlitz–Thoulessa została też zastosowana do zjawiska nadprzewodnictwa cienkich błon. W naszej oryginalnej pracy stwierdziliśmy, że prawdziwe nadprzewodnictwo w dwuwymiarowych nadprzewodzących błonach nie może występować z powodu skończonej wartości głębokości wnikania $\lambda(T)$, która ogranicza zasięg logarytmicznego wzajemnego oddziaływania wirów. Oddziaływanie wirów rozdzielonych odległością [rzędu] $\lambda(T)$ zachowuje się jak $1/r$, czyli są one zawsze, przy dowolnej temperaturze $T > 0$, swobodne, co niszczy nadprzewodnictwo. Mimo iż nasz argument jest poprawny, w wielu nadprzewodnikach będących cienkimi błonami głębokość wnikania może być rzędu $\mathcal{O}(1 \text{ cm})$, co jest typowym rozmiarem układu. Ponieważ stosuje się niewielkie prądy, a głębokość ta jest [z praktycznego punktu widzenia] tak duża, że zachowanie się układu nie różni się od zachowania odpowiadającego granicy $\lambda = \infty$ [40, 41]. Teoria ta została zastosowana także do dwuwymiarowych warstw zimnych atomów [42, 43]. Jej zgodność [z wynikami doświadczalnymi] jest w tym przypadku rozsądna i może być w przyszłości jeszcze lepsza.

Literatura

1. D. J. Thouless, *Phys. Rev.* **187** 732 (1969).
2. P. W. Anderson, G. Yuval, D. R. Hamann *Phys. Rev. B* **1** 4464 (1970).
3. R. E. Peierls, *Helv. Phys. Acta.* **7 Suppl.** II 81–3 (1934).
4. R. E. Peierls, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **5** 177–222 (1935).
5. N. D. Mermin, *Phys. Rev.* **176** 250–4 (1968).
6. N. D. Mermin, H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17** 1133–6 (1966).
7. P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158** 383–6 (1967).
8. B. J. Alder, T. E. Wainwright, *J. Chem. Phys.* **33** (1960).
9. B. J. Alder, T. E. Wainwright, *Phys. Rev.* **127** 359–61 (1962).
10. M. Chester, L. C. Yang, J. B. Stephens, *Phys. Rev. Lett.* **29** 211–4 (1972).
11. M. Chester, L. C. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **31** 1377–80 (1973).
12. H. E. Stanley, T. A. Kaplan, *Phys. Rev. Lett.* **17** 913–5 (1966).

13. H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **20** 589–92 (1968).
14. M. A. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **23** 861–3 (1969).
15. J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **5** L124–6 (1972).
16. J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6** 1181–203 (1973).
17. J. M. Kosterlitz, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **7** 1046–60 (1974).
18. V. L. Berezinskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **59** 907 (1970); *JETP* **32** 493 (1971).
19. V. L. Berezinskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **61** 1144 (1971); *JETP* **34** 601 (1972).
20. A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B.* **59** 79–81 (1975).
21. A. P. Young, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **11** L453–5 (1978).
22. J. M. Kosterlitz, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **7** 1046–60.
23. D. J. Bishop, J. D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.* **40** 1727–30 (1978).
24. D. R. Nelson, J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **39** 1201 (1977).
25. D. J. Bishop, J. D. Reppy, *Phys. Rev. B.* **22** 5171 (1980).
26. I Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **40** 1454 (1978).
27. J. Maps, R. B. Hallock, *Phys. Rev. Lett.* **47** 1533 (1981).
28. J. Maps, R. B. Hallock, *Phys. Rev. B.* **27** 5491 (1983).
29. J. E. Rutledge, W. L. McMillan, J. M. Mochel, *Phys. Rev. B.* **18** 2155 (1978).
30. A. L. Buck, J. M. Mochel, *Physica B.* **107** 403 (1980).
31. J. Zanghellini, P. Keim, H. H. von Grünberg, *J. Phys: Condens. Matter* **17** S3579 (2005).
32. H. H. von Grünberg, P. Keim, G. Maret, *Soft Matter vol 3: Colloidal Order from Entropic and Surface Forces*, eds. G. Gomper, M. Schick (Weinheim: Wiley) pp. 40–83 (2007).
33. U Gasser, C. Eisenmann, G. Maret, P. Keim, *Chem. Phys. Chem.* **11** 963 (2010).
34. D. R. Nelson, *Defects and Geometry in Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press (2002).
35. A. P. Young, *Phys. Rev. B.* **19** 1855 (1979).
36. B. I. Halperin, D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **41** 121 (1978); *Phys. Rev. B.* **19** 2457 (1979).
37. F. R. N. Nabarro, *Theory of Dislocations* Oxford University Press (1967)
38. S. C. Kapfer, W. Krauth, *Phys. Rev. Lett.* **114** 035702 (2015).
39. C. C. Grimes, G. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **42** 795 (1979).
40. D. J. Resnick, J. C. Garland, J. T. Boyd, S. Shoemaker, R. S. Newrock, *Phys. Rev. Lett.* **47** 1542 (1981).
41. A. F. Hebard, A. T. Fiory, *Phys. Rev. Lett.* **50** 1603 (1983).
42. Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Chenau, B. Battelier, J. Dalibard, *Nature* **441** 1118 (2006).
43. M. Holzmann, G. Baym, J-P Blaizot, F. Laloë, *Proc Natl Acad Sci* **104** 1476 (2007).

Przekład Piotr Chankowski