Tomasz NEUMANN

LINGWISTYCZNE PODEJŚCIE DO ZADANIA WYBORU TRASY

Streszczenie

W artykule przedstawiono algorytm umożliwiający znalezienie najkrótszej ścieżki w grafie skierowanym. Do opisu krawędzi grafów zaproponowano użycie wyrażeń lingwistycznych. Do obliczeń zaproponowano wykorzystanie prostej defuzyfikacji wartości rozmytych do wartości ostrych. Pokazano, że taka metoda w przypadku znajdowania najkrótszej ze ścieżek może znaleźć zastosowanie.

WSTĘP

W systemach zarządzania transportem jedną z najbardziej istotnych kwestii jest zapewnienie najkrótszej drogi pomiędzy punktem źródłowym a punktem docelowym. W opisie strukturze pomiędzy punktami pośrednimi odległości przyjmować mogą nie tylko oczywiste wartości związane z fizyczną odległością, lecz często reprezentowane są wartościami czasu, jaki potrzebny jest na pokonanie danego odcinka lub też kosztu związanego z transportem [1]. Wielkości te mogą być przedstawione za pomocą wartości liczbowych, scharakteryzowane mogą być również za pomocą wyrażeń lingwistycznych.

Jednym z podejść wyszukiwania połączeń pomiędzy punktami jest wykorzystanie grafowego opisu połączeń. Podczas rozwiązywania tak przedstawionego problemu analizuje się skierowany graf acykliczny G składający się ze zbioru wierzchołków $V=\{1,2,...,N\}$, zbioru uporządkowanych par nazwanych krawędziami skierowanymi, który jest podzbiorem zbioru będącego iloczynem kartezjańskim, tj. $A \subseteq N \times N$. Każda krawędź opisana jest wierzchołkami (i,j), gdzie $i,j \in N$ dla których dana krawędź stanowi połączenie. Przyjmuje się, że ruch po grafie możliwy jest tylko w kierunku wskazanym przez krawędzie, zatem krawędź (i,j) stanowi połączenie od wierzchołka i do wierzchołka j. W klasycznej teorii grafów wartości przypisane poszczególnym krawędziom, określane mianem wag, reprezentowane są jako liczbowe wartości rzeczywiste. Wydaje się, że praktyczne zastosowanie wymaga wykorzystanie do ich opisu innych parametrów, które niekoniecznie będą precyzyjne. Wagi mogą być opisane wartościami przybliżonymi dotyczącymi chociażby kosztów przejścia pomiędzy danymi wierzchołkami, nieprecyzyjnie określonymi przedziałami czasu potrzebnego na przejście odcinka czy też niedokładnie określonymi wymaganiami dotyczącymi bezpieczeństwa. Konieczne jest zatem sięgnięcie do innych operatorów stosowanych chociażby w teorii zbiorów rozmytych [2].

Teoria zbiorów rozmytych umożliwia operowania na wartościach nieprecyzyjnych, niejasnych oraz niepewnych. Wydaje się, że możliwe jest wykorzystanie operatorów znanych z teorii zbiorów rozmytych do rozwiązywania problemu najkrótszej ścieżki.

Jedną z najczęściej wykorzystywanych metod rozwiązywania problemu najkrótszej ścieżki jest algorytm Dijkstry. Dla acyklicznych grafów skierowanych posiadających niewielką liczbę wierzchołków i dla ostrych, rzeczywistych wag opisujących poszczególne krawędzie, możliwe jest dość łatwe zaimplementowanie wspomnianego algorytm. O ile oczywiste jest sumowanie i porównywanie wartości rzeczywistych stosowanych w klasycznym podejściu, o tyle operowanie na wartościach rozmytych wymaga określenia stosowanych w danym podejściu metod. Z punktu widzenia algorytmu istotne wydaje się określenie zasad sumowania liczb rozmytych jak również ich porównywania. Jedną z najprostszych metod jest klasyczna defuzyfikacja liczb rozmytych do odpowiadających im wartości ostrych. Takie podejście wydaje się znacznym uproszczeniem rozważanego problemu, jednakże łatwość dokonywanych obliczeń spowodowała wybranie właśnie tej metody to przedstawienie zagadnienia.

1. CHARAKTERYSTYKA METODY

Proponowana w pracy metoda określania najkrótszej ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami w grafie skierowanym opiera się na dobrze znanym algorytmie grafowym Dijkstry rozszerzonym o operowanie na danych wejściowych opisanych wartościami rozmytymi. W rozdziale tym przedstawiono podstawy teoretyczne wykorzystywane w rozszerzonej wersji algorytmu Dijkstry.

1.1. Podstawowe definicje

W pierwszej części artykułu przedstawione zostaną definicje niektórych z ważnych określeń, wykorzystywanych w dalszej części artykułu. Przedstawiono definicje zbioru rozmytego, opisano jedną z podstawowych funkcji przynależności, scharakteryzowano jedną z prostych metod defuzyfikacji.

Zbiór rozmyty

Zbiorem rozmytym A w pewnej niepustej przestrzeni X nazywamy zbiór uporządkowanych par

$$A=\{(x,\mu_A(x)):x\in X\} \tag{1}$$

gdzie $\mu_A : X \to [0,1]$ jest funkcją, która przypisuje każdemu elementowi $x \in X$ przynależności zbioru A.

Jednocześnie z określeniem zbioru rozmytego A definiuje się pewne charakterystyki, takie jak normalność, wypukłość czy nośnik:

– zbiór rozmyty A nazywamy normalnym jeżeli

$$\exists x \in X : \mu_A(x)=1 \tag{2}$$

– zbiór rozmyty A jest wypukły gdy

$$\forall x, y \in X,\quad \forall \lambda \in [0,1]: \mu_A(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \tag{3}$$

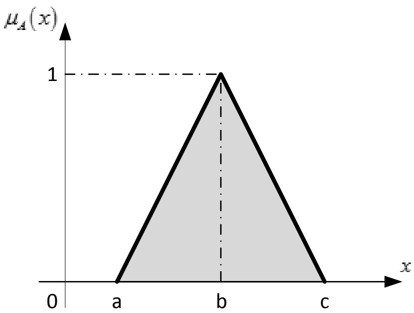
– nośnikiem zbioru rozmytego A nazywamy następujący zbiór nierozmyty

$$\operatorname{supp} A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \tag{4}$$

Trójkątna liczba rozmyta

Trójkątna liczba rozmyta oznaczana jest jako schemat trójki liczb przedstawianych następująco $A = (a, b, c)$, gdzie $a < b < c$. Wartości te należy utożsamiać z pojęciem funkcji przynależności μ_A, która jest zdefiniowana na zbiorze liczb rzeczywistych w sposób następujący:

$$\mu_A = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & x > c \end{cases} \tag{5}$$



Rys. 1. *Trójkątna liczba rozmyta*

Defuzyfikacja liczby rozmytej

W niniejszym artykule proponuje się dokonanie wyszukania ścieżki na podstawie rozmytych wartości wejściowych z wykorzystanie wyostrzenia (defuzyfikacji) liczby rozmytej do wartości ostrej. Proponuje się uśrednienie wartości rozmytej opisanej trójkątną funkcją przynależności do wartości ostrej [3]. Jeśli zatem należy dokonać wyostrzenia liczby rozmytej A opisanej jako (a, b, c) to wartość wyostrzoną reprezentować będzie wyrażenie:

$$A_R = \frac{a + 4 \cdot b + c}{6} \tag{6}$$

Wykorzystując przedstawioną wyżej zależność możliwe jest określenie ogółu operacji operowania wartościami rozmytymi. Mając do dyspozycji dwie liczby rozmyte, przedstawione kolejno jako $A = (a, b, c)$ oraz $B = (\mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f})$ określić można zależności:

$$A + B \rightarrow A_R + B_R = \frac{a + 4 \cdot b + c}{6} + \frac{d + 4 \cdot e + f}{6} \tag{7}$$

$$A \cdot B \rightarrow A_R \cdot B_R = \frac{a + 4 \cdot b + c}{6} \cdot \frac{d + 4 \cdot e + f}{6} \tag{8}$$

1.2. Algorytm Dijkstry

Jak wspomniano we wstępie niniejszego opracowania w prezentowanej metodzie wykorzystano algorytm Dijkstry. Algorytm ten opracowany został przez holenderskiego informatyka Edsgera Dijkstrę w 1959 r. [4], służy do znajdowania najkrótszej ścieżki z pojedynczego źródła do pojedynczego celu w grafie o nieujemnych wagach krawędzi. Informatyczny pseudokod algorytmu przedstawiono na rysunku 2.

```
inicjalizacja
dla każdego wierzchołka v w V[G] wykonaj
    określenie maksymalnej odległości od źródła do wierzchołka
    d[v] := nieskończoność
    określenie poprzedniego wierzchołka w optymalnej ścieżce od źródła
    poprzednik[v] := niezdefiniowane
określenie odległości od źródła do celu
d[s] := 0
określenie wszystkich wierzchołków grafu
Q := V
dopóki Q niepuste wykonaj
    zdejmij najbliższy nierozważany wierzchołek z tablicy wierzchołków
    u := Zdejmij_Min(Q)
    dla każdego nierozpatrywanego wierzchołka
    dla każdego wierzchołka v - sąsiada u wykonaj
        oblicz nową odległość
        odległość := d[u] + w(u, v)
        sprawdź, czy przejście przez wierzchołek nie jest rozwiązaniem krótszym
        jeżeli odległość < d[v] to
            pamiętaj nową odległość
            d[v] := odległość
            zapamiętaj wierzchołek poprzedni
            poprzednik[v] := u
            zaktualizuj tabelę wierzchołków
            Dodaj(Q, v)
```

Rys. 2. *Pseudokod algorytmu Dijsktry*

Wynikiem działania algorytmu jest zbiór wszystkich tras pomiędzy wierzchołkiem początkowym (źródłowym) a wszystkimi wierzchołkami pozostałymi. Zatem istotą algorytmu Dijkstry jest znalezienie wszystkich najkrótszych ścieżek pomiędzy źródłem, a każdym innym wierzchołkiem wchodzącym w skład grafu. Oprócz znalezienia najkrótszych ścieżek dla każdej z nich obliczany jest również koszt jej przejścia.

W zależności od wartości opisujących krawędzie grafu, obliczona wartość kosztu może dotyczyć: najkrótszej odległości pomiędzy wierzchołkami, najkrótszego czasu przejścia, najmniejszej liczby wierzchołków pośredniczących, itp. Zatem algorytm znajdowania ścieżek przejść pomiędzy wierzchołkami grafu zaliczyć można do zbioru jednokryterialnych problemów decyzyjnych [5].

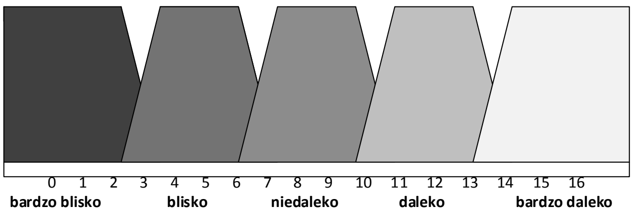
Istotnym rozszerzeniem znanej metody jest wykorzystanie w aparacie matematycznym liczb rozmytych zamiast liczb ostrych. Uogólniając zmiana algorytmu wymaga uwzględnienie operacji defuzyfikacji wartości przedziałowych w operacji obliczania odległości wyróżnionej na rysunku 2.

2. PODEJŚCIE LINGWISTYCZNE

Zastosowanie zbiorów rozmytych do opisy rzeczywistych wydarzeń umożliwia stworzenie rozmytego modelu systemu, reprezentującego istotne cechy za pomocą aparatu teorii zbiorów rozmytych. Najważniejszą cechą takich systemów jest to, że ich podstawą jest pojęcie kodowania rozmytego informacji. Systemy rozmyte operują na zbiorach rozmytych zamiast na liczbach, co umożliwia uogólnienie informacji.

Schemat takiego modelowania polega na przetworzeniu zmiennych ilościowych na pojęcia lingwistyczne, następnie modelowaniu systemu na podstawie bazy reguł, która może odzwierciedlać naszą wiedzę o systemie, a na koniec przetworzeniu wyjść z powrotem na zmienne ilościowe.

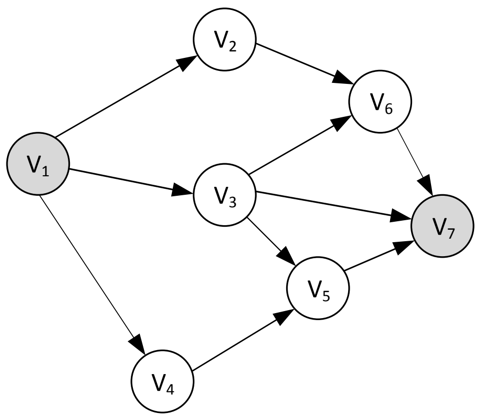
Wraz z wykorzystaniem zbiorów rozmytych do opisu rzeczywistych zdarzeń zaczęto używać wyrażeń słownych. Wyrażenia te, będące słowami lub zdaniami języka naturalnego stosowane są w aparacie matematycznym zarówno podczas dokonywania obliczeń, podczas wprowadzania danych jak również ich uzyskiwaniu. Przykładem może być tutaj opis systemu monitorującego, określony jako zbiór wyrażeń typu „nieakceptowalny", „akceptowalny", „wystarczający", „dobry" oraz „bardzo dobry". Zmienna lingwistyczna opisująca pożądany stan systemu może przyjmować jedną z podanych wartości. Opisana może być nie tylko za pomocą wyrażanie języka naturalnego, również za pomocą zbioru rozmytego. [6] Przykład zbioru wartości lingwistycznych oraz odpowiednich zbiorów rozmytych przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. *Charakterystyka wartości lingwistycznych*

3. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Rozważmy przykład przedstawiony na rysunku 4. W przykładzie przedstawiony jest graf z punktem źródłowym W_1 oraz jednym celem oznaczonym W_7. Krawędzie pomiędzy wierzchołkami grafów opisane zostały wartościami rozmytymi przedstawionymi w tabeli 1. Wyniki obliczeń dokonano przy użyciu autorskiej aplikacji [7].



Rys. 4. *Graf połączeń*

Tab. 1. *Długość krawędzi w grafie*

Lp.	Krawędź między wierzchołkami	Opis za pomocą wartości lingwistycznych	Długość przedstawiona liczbą rozmytą
1	V_1V_2	blisko	(1,2,3)
2	V_1V_3	bardzo daleko	(3,5,7)
3	V_1V_4	niedaleko	(2,3,4)
4	V_2V_6	niedaleko	(1,3,5)
5	V_3V_5	daleko	(3,4,5)
6	V_3V_6	daleko	(1,4,7)
7	V_3V_7	daleko	(2,4,6)
8	V_4V_5	bardzo daleko	(3,5,7)
9	V_5V_7	blisko	(1,2,3)
10	V_6V_7	bardzo daleko	(2,5,8)

W analizowanym przypadku znaleźć można pomiędzy węzłem źródłowym a celem pięć różnych tras. Częściowo wśród każdej z nich znaleźć można wspólne krawędzie. Poniżej wskazano sposób obliczeń przedstawiony w zaprezentowanej metodzie. Dokonano przykładowych dwóch obliczeń długości tras pomiędzy wierzchołkiem źródłowym (V_1) a wierzchołkiem celu (V_7).

$$V_1V_7 = V_1V_3 + V_3V_7 =$$
$$= \frac{3+4\cdot5+7}{6} + \frac{2+4\cdot4+6}{6} =$$
$$= \frac{30+24}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

$$V_1V_7 = V_1V_2 + V_2V_6 + V_6V_7 =$$
$$\frac{1+4\cdot2+3}{6} + \frac{1+4\cdot3+5}{6} + \frac{2+4\cdot5+8}{6} =$$
$$= \frac{12+18+30}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

$$V_1V_3 + V_3V_7 < V_1V_2 + V_2V_6 + V_6V_7$$

Powyżej przedstawiono problem przejścia od węzła V_1 do węzła V_7. W analizowanych przypadkach wybrano dwie trasy. Pierwsza trasa składa się z dwóch krawędzi, przedstawić ją można jako $V_1 \to V_3 \to V_7$, druga zaś składa się z trzech krawędzi opisanych jako $V_1 \to V_2 \to V_6 \to V_7$. Uzyskany liczbowy wynik pokazuje, że krótszą jest droga prowadząca przez dwie krawędzie.

Niewątpliwą zaletą takiego podejścia do wyznaczania najkrótszej ścieżki w grafie skierowanym z krawędziami opisanymi liczbami rozmytymi jest prostota obliczeń. Defuzyfikacja wartości rozmytych, a następnie możliwość operowania na wartościach ostrych sprowadza rozwiązanie również do wartości ostrej. Zdecydowanie łatwiejsze jest dokonanie analizy wyników w takim przypadku. Niejednokrotnie w problemach znajdowania najkrótszych ścieżek w grafie skierowanym takie podejście będzie wystarczające. Operowanie na wartościach rozmytych chociaż wydaje się bardziej efektowne nie przyniesie większych korzyści. Uzyskane wyniki końcowe w wyniku wielokrotnego dodawania wartości rozmytych spowoduje znaczne zwiększenie rozmytości ostatecznego wyniku. Sytuacja taka może powodować problemy z interpretacją ostatecznego wyniku.

Prezentowana metoda została zaimplementowana w środowisku komputerowym. W dużej mierze wykorzystano aplikację komputerową wykorzystaną we wcześniejszych badania autora [5,7]. Dogłębniejsza analiza uzyskanych wyników przedstawiona zostanie w dalszym cyklu publikacyjnym.

PODSUMOWANIE

Problemy wyznaczania najkrótszych dróg są jednymi z podstawowych i najczęściej spotykanych zagadnień w rozważaniach dotyczących sieci transportowych. Jak krótko przedstawiono w niniejszym artykule możliwe jest rozwiązanie wspomnianych zagadnień na wiele sposobów. W niniejszej pracy zaprezentowano wstęp do rozważań na temat wykorzystania dobrze znanych metody operujących na wartościach lingwistycznych. W tym celu wykorzystaną jedną z prostych metod przejścia z wartości lingwistycznej na wartości rozmytą, a następnie defuzyfikację liczb rozmytych do wartości ostrych. Prostota implementacji takich liczb oraz szybkość dokonywania obliczeń pozwalają stwierdzić, że takie podejście ma szanse wykorzystania w wielu aspektach znajdowania najkrótszej ścieżki pomiędzy źródłem a celem.

BIBLIOGRAFIA

[1] Kobayashi E., Asajima T., Sueyoshi N. Advanced Navigation Route Optimization for an Oceangoing Vessel. *TransNav Int J Mar Navig Saf Sea Transp* 2011; 5(3): 377–83.

[2] Neumann T. Algorytm wyznaczania najkrótszej ścieżki w grafie skierowanym w zbiorze liczb rozmytych. *Logistyka* 2014; 6.

[3] Chou CC. The canonical representation of multiplication operation on trian-gular fuzzy numbers. *Comput Math Appl* 2003; 45: 1601–10.

[4] Dijkstra EW. A note on two problems in connexion with graphs. *Numer Math* 1959; 1: 269–71.

[5] Neumann T. Planowanie trasy statku. Trasa najkrótsza, najszybsza czy może najlepsza? *Logistyka* 2014; 3: 4615–9.

[6] Neumann T. Good choice of transit vessel route using Dempster-Shafer Theory. Omsk: IEEE; 2015. p. 1–4.

[7] Neumann T. Komputerowe narzędzie wspomagające analizę lokalizacji stacji obserwacyjnych rejonów morskich. *Logistyka* 2010; 6.

ALGORITHM FOR THE SHORTEST PATH IN THE DIRECTED GRAPH IN A SET OF FUZZY NUMBERS

Abstract

The paper presents an algorithm that allows finding the shortest path in a directed graph. To describe the edges of the graph proposed to use linguistic values. For the calculation proposed to use a simple defuzzification to the sharp values. It has been shown that this technique for finding the shortest path can be used.

Autor:
dr inż. **Tomasz Neumann** – Akademia Morska w Gdyni, Wydział Nawigacyjny, Katedra Nawigacji