

Article citation info:

Lozia Z. The use of a linear quarter-car model to optimize the damping in a passive automotive suspension system – a follow-on from many authors' works of the recent 40 years. The Archives of Automotive Engineering – Archiwum Motoryzacji. 2016; 71(1): 37-69, <http://dx.doi.org/10.14669/AM.VOL71.ART3>

Zastosowanie liniowego modelu „ćwiartki samochodu” do optymalizacji tłumienia w pasywnym zawieszeniu samochodu – wykorzystanie prac wielu autorów z okresu ostatnich 40 lat

ZBIGNIEW LOZIA¹

Politechnika Warszawska

Streszczenie

W pracy wykorzystano ponad 40-letnie osiągnięcia wielu autorów zagranicznych i polskich w zakresie metod optymalizacji parametrów zawieszenia samochodu. Zaprezentowano, rozwiniętą przez autora, metodykę obliczeń optymalizacyjnych na przykładzie tłumienia wiskotycznego pasywnego zawieszenia pojazdu poruszającego się po nierównej, losowej nawierzchni drogi. Wykorzystano liniowy model zawieszenia ćwiartki samochodu oraz analizę transmitancji widmowych w wyznaczaniu wskaźników dyskomfortu i niebezpieczeństwa. Wyniki zaprezentowano w postaci bezwymiarowej funkcji celu, która stanowiła kryterium optymalizacji ze względu na komfort jazdy i bezpieczeństwo. Uwzględniono także ograniczenie ugięć zawieszenia. Graficzna postać tej funkcji, gdzie zmienną niezależną jest bezwymiarowy współczynnik tłumienia zawieszenia, przypomina poglądowe, jakościowe zależności przytaczane w wielu pracach innych autorów, co ułatwia interpretację wyników końcowych optymalizacji.

Słowa kluczowe: optymalizacja, zawieszenie samochodu, model ćwiartki samochodu, tłumienie w zawieszeniu

1. Wprowadzenie

W dynamice samochodu wyróżnia się dwa główne nurty badań. Pierwszy dotyczy ruchu elementów pojazdu w kierunku pionowym (ang. *ride*) i zajmuje się głównie ruchem drgającym postępowym i kątowym w płaszczyźnie pionowej równoległej lub prostopadłej do płaszczyzny symetrii samochodu. Drugi to badania ruchu pojazdu w płaszczyźnie równoległej do drogi –

¹ Politechnika Warszawska, Wydział Transportu, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, Polska, e-mail: lozia@wt.pw.edu.pl

to kierowalność i stateczność z uwzględnieniem oddziaływania kierowcy (w języku angielskim pojęcia te łączy określenie *handling*). Obecnie oba te zagadnienia opisuje się łącznie, wykorzystując złożone modele symulacyjne [15, 17]. Przez lata rozpatrywano je jednak oddzielnie, co tłumaczono chęcią uniknięcia modeli zbyt trudnych do analizy [3]. Było to spowodowane stopniowym rozwojem metod i narzędzi badań dynamiki samochodów. Historię tę opisał skrótowo Crolla w pracy [3], odwołując się do wystąpień konferencyjnych Segela i publikacji firmowanych przez The Institution of Mechanical Engineers. Dopiero w latach 50-tych XX wieku zaczęto stosować aparat matematyczny umożliwiający rozważania o charakterze analitycznym, z ograniczonymi możliwościami obliczeniowymi. Wprowadzenie technik komputerowych oraz metod badań liniowych i nieliniowych układów mechanicznych o wymuszeniu zdeterminowanym lub losowym dało możliwość stosowania rozleglejszych obliczeń z użyciem prostych lub bardziej złożonych modeli matematycznych. Szczególnie istotne są tu prace o charakterze monograficznym, stanowiące podstawę w trakcie budowy i analizy własności modeli o różnym stopniu skomplikowania. Autorzy z Europy Zachodniej i Ameryki Północnej w ten sposób traktują przede wszystkim prace Meirovitcha [16], Newlanda [20], Mitschke [17, 18] i Wonga [32]. W Polsce, oprócz wspomnianych, duże znaczenie przywiązuje się do prac Rotenberga [25], Kamińskiego i Pokorskiego [9], Osieckiego [21, 22, 23], Kasprzyka i Prochowskiego [10, 11].

Dopiero w latach 70-tych XX wieku pojawiły się publikacje poparte bogatymi wynikami obliczeń z użyciem komputerów. Prace te trwają do dzisiaj i obejmują szerokie spektrum zagadnień z obszaru dynamiki samochodu.

Niniejsza publikacja sumuje ponad 40-letnie osiągnięcia wielu autorów zagranicznych i polskich w zakresie metod optymalizacji parametrów pasywnego zawieszenia samochodu. Szczegółowo opisana będzie optymalizacja liniowego tłumienia w zawieszeniu pojazdu poruszającego się po nierównej, losowej nawierzchni drogi.

2. Przegląd literaturowy dotyczący modelu „ćwiartki samochodu” i jego zastosowań w optymalizacji parametrów zawieszenia samochodu

Model ćwiartki samochodu (rys. 2) to układ o dwóch stopniach swobody, opisujący drgania pionowe części bryły nadwozia („masy resorowanej”) położonej nad jednym (tutaj jednym z czterech) kół samochodu oraz drgania mas związanych z kołem jezdny („masa nieresorowana”). Oba elementy masowe są połączone równoległe działającym układem sprężyna-tłumik, obrazującym własności sprężysto-tłumiące zawieszenia danego koła. Masa nieresorowana oddziałuje z podłożem poprzez element sprężysto-tłumiący lub tylko sprężysty, odzwierciedlający własności sprężysto-tłumiące lub tylko sprężyste koła jezdne w kierunku promieniowym. Niekiedy model przedstawiony na rys. 2 obrazuje nie ćwiartkę, ale „połówkę samochodu”. Struktura jest taka sama, natomiast podwajane są wartości parametrów. Modele o opisanej budowie pojawiły się w latach 70-tych XX wieku (na przykład prace [10, 17, 25, 26]). Wykorzystywane były w wielu publikacjach z lat 80-tych (np. [9, 14, 18, 28, 29]) i 90-tych XX wieku (np. [4, 11, 19]). W wieku XXI są wciąż przydatne w bardziej złożonych i rozleglejszych analizach, w tym w pracach syntezujących wyniki w postaci zaleceń dla konstruktorów pojazdów (np. [5, 6, 12, 24, 27, 30, 31, 32,]). Są to zarówno modele liniowe jak i nieliniowe. Dotyczą analizy zawieszonych pasywnych, półaktywnych i aktywnych. Części prac, obok badań modelowych, towarzyszą badania eksperymentalne układów o strukturze zbliżonej do „ćwiartki samochodu” [12, 24, 30].

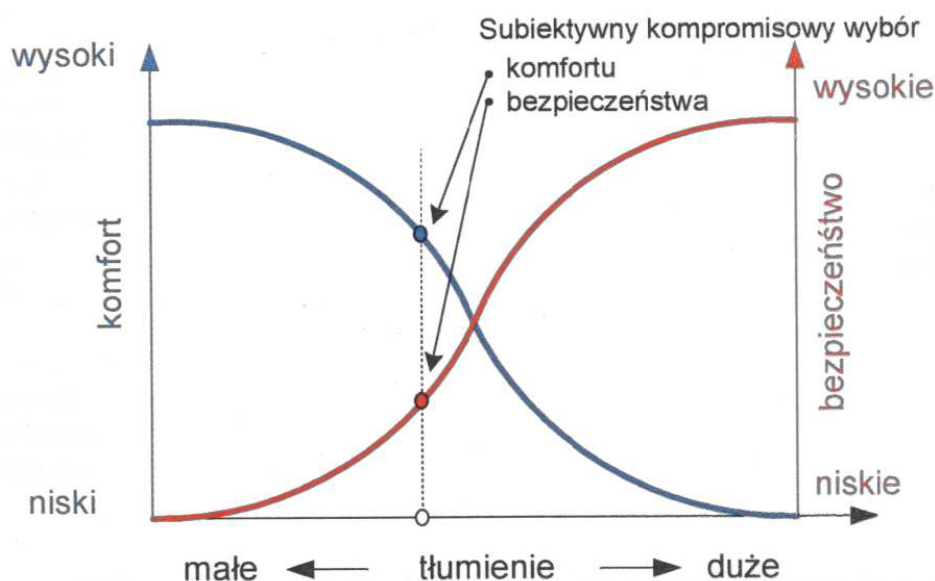
W XXI wieku model „ćwiartki samochodu” jest stosowany w wyrafinowanych algorytmach optymalizacyjnych, z poszukiwaniem rozwiązań Pareto- optymalnych [13, 33, 34], z uwzględnieniem losowego charakteru wybranych parametrów modelu (masy resorowanej wynikającej z trudnego do przewidzenia obciążenia pojazdu oraz sztywności opony zależnej od zmieniającego się w trakcie eksploatacji pojazdu ciśnienia pompowania, np. [5]), w ocenie rozwiązań zawieszek o zmiennym tłumieniu, zawieszek półaktywnych i aktywnych (np. [3, 4, 5, 6, 27, 28, 29, 30, 31, 32]).

Autorzy zdecydowanej większości prac opisujących wspomniane zadanie optymalizacji wymieniają trzy główne kryteria oceny, dotyczące: minimalizacji miar dyskomfortu kierowcy i pasażerów oraz zmian reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą, a także z ograniczenia ruchu roboczego zawieszenia [3, 4, 5, 6, 10, 11, 17, 18, 19, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. W publikacji [28] podsumowano dotychczasowe (do roku 1987) prace dotyczące wpływu tłumienia wiskotycznego w zawieszeniu na miary dyskomfortu i bezpieczeństwa (zmian siły promieniowej w oponie). Wskazano na sprzeczność wymagań – zobrazowano to w pracach [24, 30] – patrz np. rys. 1, gdzie autor zaznaczył przykładowy subiektywny wybór poziomu tłumienia. Rysunek ten ma charakter poglądowy i jako taki jest stosowany w praktyce. Jego treść jest jednak tak sugestywna, że autor niniejszej publikacji będzie dążył do wyrażenia kryteriów optymalizacji w formie zbliżonej do rys. 1, ale z wykorzystaniem mierzalnych miar oceny. Wzrost tłumienia wiskotycznego w zawieszeniu pogarsza komfort, ale polepsza bezpieczeństwo. Wątpliwości budzą wartości odpowiadające bardzo małemu i bardzo dużemu tłumieniu. Sugerują, że najwyższy komfort odpowiada bardzo małemu tłumieniu a wysoki poziom bezpieczeństwa – bardzo dużemu tłumieniu. Autor niniejszej pracy uznał, że te fragmenty krzywych poglądowych z rys. 1 powinny być zweryfikowane w trakcie obliczeń. Przytoczone wcześniej prace prezentują wyniki, które mówią także, że wzrostowi tłumienia wiskotycznego towarzyszy zmniejszenie zakresu ruchu roboczego zawieszenia.

Większość autorów przytaczanych prac przyjmuje jako wymuszenie gaussowski stacjonarny proces losowy w dziedzinie długości fali L [m], liczby falowej $1/L$ [1/m] lub częstości kołowej drogi $\Omega = 2 \cdot \pi/L$ [rad/m]. Zakres branych pod uwagę długości fal to: 0,26–66,8 m [25], 0,1–100 m [28] lub 0,3–100 m [17, 18]. Uwzględniane są wygładzające własności ogumienia [2, 3, 14, 15]. Rozważany zakres prędkości sięga nawet 10–50 m/s (36–180 km/h) [6]. W wyniku wyboru zakresu długości fal nierówności i prędkości pojazdu określane jest pasmo częstotliwości drgań brył modelu. Jest ono jednak ograniczane ze względu na własności badanego obiektu lub analizowanego zjawiska (komfortu czy też oddziaływania koła z podłożem). W przytaczanych publikacjach wybierano pasma:

- od 0–8 Hz do 0–14 Hz [26];
- 0,25–15 Hz [29];
- 0–20 Hz [19, 31];
- 0–25 Hz lub 0–30 Hz [17, 18, 30];
- 0–50 Hz lub 1–60 Hz [32];
- 1–80 Hz [30];
- 0–90 Hz lub nawet 0,8–150 Hz [25];
- 0,1–100 Hz [27].

Istotnym ograniczeniem analiz do 80 Hz jest pojawianie się, dla wyższych od podanej granicy częstotliwości, zjawisk związanych z rezonansem szkieletu opony, co powoduje, że prosty model jej własności sprężystych nie może być stosowany [28]. Ważnym jest też fakt podawania przez normy ISO, dotyczące komfortu drgań [7], wartości granicznych w paśmie 0–80 Hz.



Rys. 1. Symboliczna ilustracja kompromisu pomiędzy spełnieniem wymagań komfortu i bezpieczeństwa jazdy przy wyborze stałego tłumienia w zawieszeniu [30]

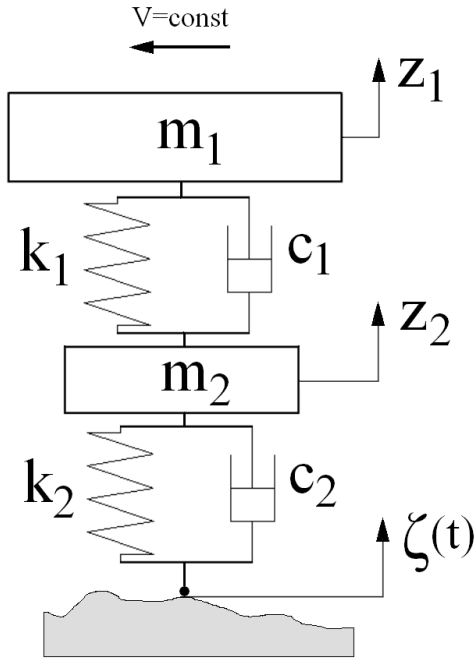
3. Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metodyki dotyczącej optymalizacji parametrów pasywnego zawieszenia samochodu. Zaprezentowany będzie liniowy model „ćwiartki samochodu” oraz przykładowe postępowanie prowadzące do wyznaczenia współczynnika tłumienia zawieszenia. Praca sumuje doświadczenia autorów przytaczanych wyżej prac, wprowadzając łatwiejsze interpretacje geometryczne wartości optymalnych.

Przyjęta metodyka obliczeń ma szersze możliwości zastosowań, w tym szczególnie do wyznaczenia optymalnych wartości pozostałych parametrów analizowanego modelu.

4. Model „ćwiartki samochodu” i jego równania ruchu w dziedzinie czasu i częstotliwości

Rys. 2 przedstawia reprezentację fizyczną modelu „ćwiartki samochodu”. Składa się z dwóch elementów masowych: „masy resorowanej” o masie m_1 [kg] i „masy nieresorowanej” o masie m_2 [kg]. Sztywność zawieszenia oznaczono k_1 [N/m], a sztywność promieniową koła ogumionego (pneumatyka) k_2 [N/m]. c_1 [N·s/m] to współczynnik tłumienia wiskotycznego zawieszenia, a c_2 [N·s/m] to współczynnik tłumienia wiskotycznego reprezentujący zastępcze własności tłumiące pneumatyka w kierunku promieniowym. $\zeta(t)$ [m] to zmienne w czasie wymuszenie kinematyczne, pochodzące od nierównej nawierzchni drogi. Samochód, a więc i opisywany model, poruszają się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością V [km/h], v [m/s].



Rys. 2. Model „ćwiartki samochodu” (opis oznaczeń w tekście)

Równania ruchu można wyprowadzić z zasady kinetostatyki, z uwzględnieniem sił bezwładności elementów masowych modelu. Mają postać przedstawioną zależnością (1).

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{z}_1 + c_1 \cdot \dot{z}_1 + k_1 \cdot z_1 - c_1 \cdot \dot{z}_2 - k_1 \cdot z_2 = 0 \\ m_2 \cdot \ddot{z}_2 + (c_1 + c_2) \cdot \dot{z}_2 + (k_1 + k_2) \cdot z_2 - c_1 \cdot \dot{z}_1 - k_1 \cdot z_1 = c_2 \cdot \dot{\zeta} + k_2 \cdot \zeta \end{cases} \quad (1)$$

Ich formę macierzową prezentuje zależność (2), w której wskazano oznaczenia macierzy: bezwładności \mathbf{M} , tłumienia wiskotycznego \mathbf{C} , sztywności \mathbf{K} , oddziaływania wymuszenia poprzez tłumienie w pneumatyku \mathbf{C}_ζ , oddziaływania wymuszenia poprzez sztywność promieniową pneumatyka \mathbf{K}_ζ . Wektory współrzędnych (przemieszczeń), prędkości i przyspieszeń uogólnionych oznaczono (odpowiednio) $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$. Zależność (równanie) (3) wykorzystuje te oznaczenia. Jest to najbardziej zwięzła forma zapisu równania (1).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_\zeta} \cdot \underbrace{\dot{\zeta}}_{\dot{\zeta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_\zeta} \cdot \underbrace{\zeta}_{\zeta} \quad (2)$$

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{C}_\zeta \cdot \dot{\zeta} + \mathbf{K}_\zeta \cdot \zeta \quad (3)$$

Dokonano transformaty Laplace'a równania (3), przy zerowych warunkach początkowych. Po przekształceniach otrzymano równanie (4), gdzie dziedzina $s = r + i \cdot \omega$ ma część rzeczywistą r i urojoną ω , $i^2 = -1$ (ω to częstość [rad/s]).

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{s}^2 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{s}) = (\mathbf{C}_\zeta \cdot \mathbf{s} + \mathbf{K}_\zeta) \cdot \zeta(\mathbf{s}) \quad (4)$$

Jego rozwiązanie ma postać (5)

$$\mathbf{q}(\mathbf{s}) = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{s}^2 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{K})^{-1} \cdot (\mathbf{C}_\zeta \cdot \mathbf{s} + \mathbf{K}_\zeta) \cdot \zeta(\mathbf{s}) \quad (5)$$

Transmitancja operatorowa (funkcja przejścia) dla przemieszczeń (6) jest stosunkiem transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego (wymuszenia) układu przy zerowych warunkach początkowych.

$$\mathbf{H}_q(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{q_1}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{H}_{q_2}(\mathbf{s}) \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{s})}{\zeta(\mathbf{s})} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{s}^2 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{K})^{-1} \cdot (\mathbf{C}_\zeta \cdot \mathbf{s} + \mathbf{K}_\zeta) \quad (6)$$

Transmitancja operatorowe dla prędkości i przyspieszeń są przedstawione zależnościami (odpowiednio) (7) i (8).

$$\mathbf{H}_{\dot{q}}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\dot{q}_1}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{H}_{\dot{q}_2}(\mathbf{s}) \end{bmatrix} = \frac{\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{s})}{\zeta(\mathbf{s})} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{H}_q(\mathbf{s}) \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_{\ddot{q}}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\ddot{q}_1}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{H}_{\ddot{q}_2}(\mathbf{s}) \end{bmatrix} = \frac{\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{s})}{\zeta(\mathbf{s})} = \mathbf{s}^2 \cdot \mathbf{H}_q(\mathbf{s}) \quad (8)$$

Od transformaty Laplace'a łatwo można przejść do transformaty Fouriera. Transmitancje operatorowe stają się transmitancjami widmowymi. Formalnie wyraża się to przejściem od dziedziny s do argumentu $i \cdot \omega$, przyjmując w zależności $s = r + i \cdot \omega$ zerową część rzeczywistą r . Po tym podstawieniu zależności (4)–(8) pozostają w mocy.

5. Losowe wymuszenie pochodzące od nierówności nawierzchni drogi

Założono, że nawierzchnia drogi jest nieodkształcalna. Jest realizacją procesu losowego stacjonarnego, gaussowskiego. W normie ISO [8] przedstawiona jest propozycja klasyfikacji dróg: od A do H; od bardzo dobrej (A), przez dobrą (B), średnią (C), złą (D) do bardzo złych (E oraz pozostałe: F, G, H). Droga danej klasy jest opisywana w ISO [8] funkcją gęstości widmowej mocy $S_d(\Omega)$ [m^3/rad] pojedynczego wzdłużnego śladu równoległego do osi drogi:

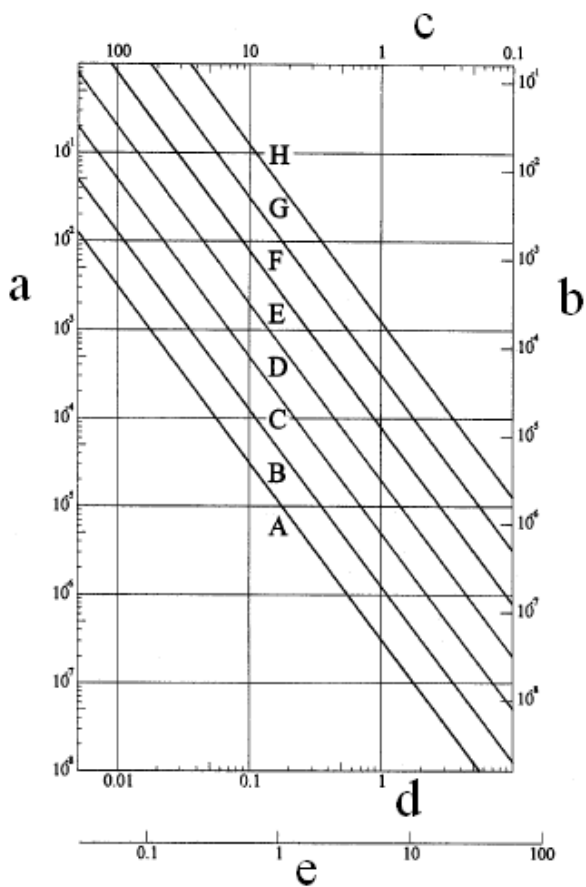
$$S_d(\Omega) = S_d(\Omega_0) \cdot (\Omega/\Omega_0)^{-w} \quad (9)$$

gdzie:

- $\Omega = 2\pi/L$ – to częstość kołowa drogi, [rad/m],
- L – długość fali nierówności drogi, [m],
- Ω_0 – częstość kołowa odniesienia (najczęściej $\Omega_0 = 1,0$), [$1/\text{m}$],
- $S_d(\Omega_0)$ – wskaźnik nierówności drogi, określający stan (czy jest ogólnie dobra, czy też zła), [m^3/rad],
- w – wskaźnik falistości drogi, mówiący o tym, czy w widmie dominują fale krótkie czy też długie, [-].

We wspomnianej normie ISO [8] drogi różnych klas różnią się parametrem $S_d(\Omega_0)$. Wykładnik w ma stałą wartość $w = 2$. Rys. 3 przedstawia gęstości widmowe mocy losowych nierówności nawierzchni dróg według klasyfikacji ISO [8] w skali dwu-logarytmicznej dla różnych postaci zmiennej niezależnej.

Przyjęto, że najkrótsza fala L ma długość 0,1 m a najdłuższa 100 m. Jest tak zwany mikroprofil nierówności drogi [9, 17, 18].



Rys. 3. Gęstości widmowe mocy losowych nierówności nawierzchni dróg według klasyfikacji ISO [8]: od A do H. Skala dwu-logarytmiczna. Znaczenie małych liter na rysunku: a – gęstość widmowa mocy $S_d(1/L)$ [m^3]; b – gęstość widmowa mocy $S_d(\Omega)$ [m^3/rad]; c – długość fali L [m]; d – liczba falowa $1/L$ [$1/m$]; e – częstość kołowa drogi $\Omega = 2\pi/L$ [rad/m]

6. Własności wygładzające ogumienia

W modelu koła ogumionego zazwyczaj stosuje się dla kierunku promieniowego „model punktowego kontaktu” [2, 3, 14, 15]. Długość fal nierówności brana pod uwagę musi być zatem ograniczona od dołu. Można uwzględnić wygładzające własności ogumienia w postaci „modelu stałego śladu” [2, 3, 14] (uśrednienie wysokości nierówności na obszarze śladu współpracy koła z drogą), filtrując widma nierówności drogi. Wykorzystano filtr o module transmitancji [14]:

$$|H_{op}(\Omega)| = |\sin(\Omega \cdot l_{op}) / (\Omega \cdot l_{op})| \quad (10)$$

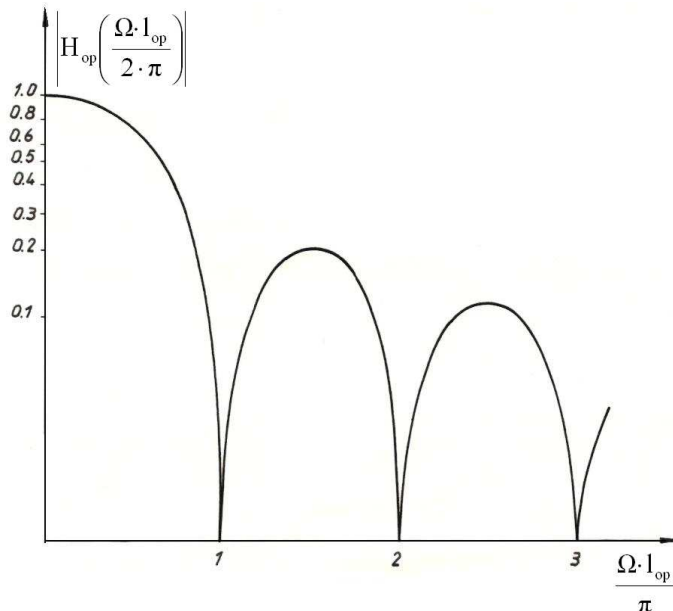
gdzie l_{op} to połowa długości śladu współpracy koła z równą poziomą nawierzchnią drogi, w warunkach obciążenia statycznego, [m].

Rys. 4 przedstawia moduł filtru opisującego wygładzające własności ogumienia, odpowiadające „modelowi stałego śladu” (MSS). Zależność (11) przedstawia formalny opis

wspomnianej filtracji, prowadzącej do gęstości widmowej mocy nierówności $S_{df}(\Omega)$, uwzględniającej wygładzające własności ogumienia.

$$S_{df}(\Omega) = |H_{op}(\Omega)|^2 S_d(\Omega) \quad (11)$$

Wprowadzenie $S_{df}(\Omega)$ jako wymuszenia umożliwia stosowanie model punktowego kontaktu koła z nawierzchnią drogi [2, 3, 14].



Rys. 4. Moduł filtru opisującego wygładzające własności ogumienia, odpowiadające „modelowi stałego śladu” (MSS) [14] (opis oznaczeń w tekście)

7. Kryteria doboru tłumienia w zawieszeniu samochodu (kryteria optymalizacji)

Podobnie jak w pracach [3, 4, 5, 6, 10, 11, 17, 18, 19, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32], przyjęto trzy kryteria oceny poprawności doboru współczynnika tłumienia w zawieszeniu c_1 :

- minimalizacja miary dyskomfortu kierowcy i pasażerów, jaką jest odchylenie standardowe przyspieszenia masy resorowanej σ_a [m/s²],
- minimalizacja niebezpieczeństwa, którego miarą jest odchylenie standardowe σ_F [N] zmian składowej dynamicznej (czyli mierzonej względem wartości statycznej) reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą,
- ograniczenie ruchu roboczego zawieszenia do wartości mniejszej niż graniczna wartość zakresu ruchu roboczego zawieszenia r_{zg} [m].

Formalnie można je opisać następująco (jako funkcję współczynnika tłumienia zawieszenia c_1 i prędkości V):

$$Q(c_1, V) = w_a \cdot \sigma_a(c_1, V) + w_F \cdot \sigma_F(c_1, V) \Rightarrow \text{minimum} \quad (12)$$

$$6 \cdot \sigma_{uz}(c_1, V) \leq r_{zg} \quad (13)$$

gdzie:

- $Q(c_1, V)$ [-] – minimalizowana funkcja celu,
- w_a [1/m], w_F [1/N] – współczynniki wagowe dyskomfortu i niebezpieczeństwa,
- $\sigma_{uz}(c_1, V)$ [m] – odchylenie standardowe ugięcia zawieszenia (odmierzone względem wartości statycznej),
- r_{zg} [m] – graniczna wartość zakresu ruchu roboczego zawieszenia.

Podane wyżej kryteria są stosowane dla każdej z branych pod uwagę klas jakości nawierzchni drogi. Liczba 6 we wzorze (13) wynika z faktu gaussowskiego rozkładu ugięcia zawieszenia analizowanego modelu. Wykorzystywana jest znana własność odpowiedzi liniowego układu na gaussowskie stacjonarne wymuszenie w postaci nierówności nawierzchni drogi – mają one także rozkłady gaussowskie. Ruch roboczy zawieszenia jest tu traktowany jako podwojona wartość maksymalnego ugięcia dynamicznego zawieszenia wynoszącego około $3 \cdot \sigma_{uz}$. Odchylenia standardowe σ_a , σ_F i σ_{uz} obliczane są ze znanych zależności ([1, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 32]):

$$\sigma_a = \sqrt{\int_0^{\omega_{\max}} S_{\dot{q}_1}(\omega) \cdot d\omega} = \sqrt{\int_0^{\omega_{\max}} |H_{\dot{q}_1}(i \cdot \omega)|^2 \cdot S_{df}(\omega) \cdot d\omega} \quad (14)$$

$$\sigma_F = \sqrt{\int_0^{\omega_{\max}} S_F(\omega) \cdot d\omega} = \sqrt{\int_0^{\omega_{\max}} |H_F(i \cdot \omega)|^2 \cdot S_{df}(\omega) \cdot d\omega} \quad (15)$$

$$\sigma_{uz} = \sqrt{\int_0^{\omega_{\max}} S_{uz}(\omega) \cdot d\omega} = \sqrt{\int_0^{\omega_{\max}} |H_{uz}(i \cdot \omega)|^2 \cdot S_{df}(\omega) \cdot d\omega} \quad (16)$$

gdzie nowe oznaczenia to:

- $S_{\dot{q}_1}(\omega)$, $S_F(\omega)$, $S_{uz}(\omega)$ – gęstości widmowe mocy przyspieszeń masy resorowanej [$m^2/s^3/rad$], składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą [$N^2 \cdot s/rad$], ugięcia zawieszenia [$m^2 \cdot s/rad$];

$\omega = 2\pi \cdot f$ – częstość ω [rad/s] i częstotliwość f [Hz];

$\omega_{\max} = 2\pi \cdot f_{\max}$ – maksymalna rozpatrywana częstość ω_{\max} [rad/s] i częstotliwość f_{\max} [Hz];

$H_{\dot{q}_1}(i \cdot \omega)$ – transmitancja widmowa dla przyspieszenia masy resorowanej (patrz (8)) [$1/s^2$];

$H_F(i \cdot \omega)$ – transmitancja widmowa dla składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą [N/m];

$H_{uz}(i \cdot \omega)$ – transmitancja widmowa dla ugięcia zawieszenia [-].

Przejście od $S_{df}(\Omega)$ [m^3/rad] do $S_{df}(\omega)$ [$m^2 \cdot s/rad$], a więc zmiana zmiennej niezależnej z Ω [rad/m] (częstość kołowa drogi) na częstość ω [rad/s] wymaga przemnożenia Ω przez prędkość ruchu v [m/s], przy równoczesnym podzieleniu $S_{df}(\Omega)$ przez v [m/s]. Dzięki temu

całki oznaczone z $S_d(\Omega)$ i $S_d(\omega)$ w rozważanych (odpowiadających sobie) pasmach Ω i ω mają tę samą wartość: wariancję wysokości nierówności (σ_ξ^2).

Transformatę Fouriera składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą określa zależność:

$$F(i \cdot \omega) = c_2 \cdot [\dot{\xi}(i \cdot \omega) - \dot{z}_2(i \cdot \omega)] + k_2 \cdot [\xi(i \cdot \omega) - z_2(i \cdot \omega)] \quad (17)$$

a transformatę Fouriera ugięcia zawieszenia:

$$u_z(i \cdot \omega) = z_2(i \cdot \omega) - z_1(i \cdot \omega) \quad (18)$$

Na podstawie zależności (6)-(8) oraz (17) i (18), po przekształceniach, otrzymano końcowe zwarte postacie transmitancji widmowych (pamiętając, że $q_1 = z_1$, $q_2 = z_2$):

$$H_{\ddot{q}_1}(i \cdot \omega) = \frac{\ddot{q}_1(i \cdot \omega)}{\zeta(i \cdot \omega)} = -\omega^2 \cdot H_{q_1}(i \cdot \omega) \quad (19)$$

$$H_F(i \cdot \omega) = \frac{F(i \cdot \omega)}{\zeta(i \cdot \omega)} = (i \cdot c_2 \cdot \omega + k_2) \cdot [1 - H_{q_2}(i \cdot \omega)] \quad (20)$$

$$H_{uz}(i \cdot \omega) = \frac{q_2(i \cdot \omega) - q_1(i \cdot \omega)}{\zeta(i \cdot \omega)} = H_{q_2}(i \cdot \omega) - H_{q_1}(i \cdot \omega) \quad (21)$$

8. Dane obliczeniowe - parametry modelu i warunków badań

Przykładowe parametry modelu odpowiadają zawieszeniu przedniemu samochodu Isuzu D-Max: $m_1 = 578$ kg, $m_2 = 69,5$ kg, $k_1 = 42520$ N/m, $k_2 = 220000$ N/m, c_1 było wielkością zmienianą w obliczeniach, $c_2 = 150$ N·s/m. Długość śladu współpracy koła z drogą w warunkach statycznych wynosi $2 \cdot l_{op} = 0,185$ m.

Do obliczeń wybrano trzy drogi o następujących wartościach parametrów gęstości widmowej mocy nierówności:

- drogę 1: drogę B (dobrą); $S_d(\Omega_0) = 0,000004$, $\Omega_0 = 1,0$, $w = 2$,
- drogę 2: drogę C (średnią); $S_d(\Omega_0) = 0,000016$, $\Omega_0 = 1,0$, $w = 2$,
- drogę 3: drogę D (złą); $S_d(\Omega_0) = 0,000064$, $\Omega_0 = 1,0$, $w = 2$.

Najkrótsza fala L ma długość 0,1 m a najdłuższa 100 m.

Ze względu na normy ISO, dotyczące komfortu drgań [7], przyjęto analizowane pasmo częstotliwości 0-80 Hz (0-502,65 rad/s).

Wybrano 12 stałych prędkości ruchu pojazdu V [km/h]: od 10 km/h do 120 km/h z krokiem 10 km/h. Prędkość v [m/s] jest związana z V [km/h] ogólnie znaną zależnością $v = V/3,6$.

Zmieniało współczynnik tłumienia c_1 [N·s/m]. Jego wartości wyrażono pośrednio poprzez określanie wartości tłumienia względnego [1] γ [-]:

$$\gamma = \frac{c_1}{c_{1kr}} = \frac{c_1}{2 \cdot m_1 \cdot \omega_{01}} = \frac{h}{\omega_{01}} \quad (22)$$

$$c_{1kr} = 2 \cdot m_1 \cdot \omega_{01} \quad (23)$$

$$h = c_1 / 2 / m_1 \quad (24)$$

gdzie [1]:

c_{1kr} [N·s/m] to tłumienie krytyczne

$\omega_{01} = 2 \cdot \pi \cdot f_{01}$ – pierwsza (niższa) częstość drgań własnych układu nietłumionego [rad/s];

f_{01} – pierwsza (niższa) częstotliwość drgań własnych układu nietłumionego [Hz];

$$\omega_{01}^2 = \frac{k_1 \cdot m_2 + (k_1 + k_2) \cdot m_1}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} - \sqrt{\left[\frac{k_1 \cdot m_2 + (k_1 + k_2) \cdot m_1}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \right]^2 - \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}} \quad (25)$$

Drugą (wyższą) częstość drgań własnych układu nietłumionego $\omega_{02} = 2 \cdot \pi \cdot f_{02}$ określa wzór [1]

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_1 \cdot m_2 + (k_1 + k_2) \cdot m_1}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} + \sqrt{\left[\frac{k_1 \cdot m_2 + (k_1 + k_2) \cdot m_1}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \right]^2 - \frac{k_1 \cdot k_2}{m_1 \cdot m_2}} \quad (26)$$

f_{02} to druga (wyższa) częstotliwość drgań własnych układu nietłumionego [Hz].

Dla badanego układu wartości te wynoszą: $\omega_{01} = 7,839$ rad/s, $\omega_{02} = 61,558$ rad/s, $f_{01} = 1,248$ Hz, $f_{02} = 9,797$ Hz, $c_{1kr} = 9062$ N·s/m.

Przyjmowano 26 wartości tłumienia względnego γ [-]: od 0,1 do 0,6, z krokiem 0,02.

Tłumienie w zawieszeniu miało wartość

$$c_1 = \gamma \cdot c_{1kr} = \gamma \cdot 2 \cdot m_1 \cdot \omega_{01} \quad [\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}] \quad (27)$$

Współczynniki wagowe dyskomfortu i niebezpieczeństwa w_a i w_F dobierano tak, aby odzwierciedlały równe traktowanie obu kryteriów. Ich wartości zostaną podane dalej, po etapie normalizacji wyników obliczeń. Ruch roboczy zawieszenia ograniczono do wartości $r_{zg} = 0,12$ m, odpowiadającej realnemu liniowemu zakresowi pracy zawieszenia analizowanego samochodu. W tabeli 1 zestawiono opisane wyżej parametry modelu oraz warunków badań.

Tabela 1. Zestawienie parametrów modelu oraz warunków badań

L.p.	Nazwa	Oznaczenie	Jednostka	Wartość
1.	Masa części bryły nadwozia nad kołem jezdnym, „masa resorowana”	m_1	kg	578
2.	Masa związana z kołem jezdym, „masa nieresorowana”	m_2	kg	69,5
3.	Sztywność zawieszenia	k_1	N/m	42 520
4.	Sztywność promieniowa koła jezdnego	k_2	N/m	220 000
5.	Współczynnik tłumienia zawieszenia	c_1	N·s/m	zmienny
6.	Współczynnik tłumienia koła ogumionego w kierunku promieniowym	c_2	N·s/m	150
7.	Długość śladu współpracy koła z drogą w warunkach statycznych	$2 \cdot l_{op}$	m	0,185
8.	Typ i parametry gęstości widmowej mocy pierwszej wybranej drogi	Droga 1: B (dobra)	-	-
		$S_d(\Omega_0)$	m^3/rad	0,000004
		Ω_0	1/m	1,0
		w	-	2,0
9.	Typ i parametry gęstości widmowej mocy drugiej wybranej drogi	Droga 2: C (średnia)	-	-
		$S_d(\Omega_0)$	m^3/rad	0,000016
		Ω_0	1/m	1,0
		w	-	2,0
10.	Typ i parametry gęstości widmowej mocy trzeciej wybranej drogi	Droga 3: D (zła)	-	-
		$S_d(\Omega_0)$	m^3/rad	0,000064
		Ω_0	1/m	1,0
		w	-	2,0
11.	Długość najkrótszej fali nierówności drogi	L_{min}	m	0,1
12.	Długość najdłuższej fali nierówności drogi	L_{max}	m	100,0
13.	Najmniejsza częstotliwość (częstość) analizowanych drgań	f_{min}	Hz	0
		(ω_{min})	(rad/s)	(0)
14.	Największa częstotliwość (częstość) analizowanych drgań	f_{max}	Hz	80
		(ω_{max})	(rad/s)	(502,65)
15.	Pierwsza częstotliwość (częstość) drgań własnych układu nietłumionego	f_{01}	Hz	1,248
		(ω_{01})	(rad/s)	(7,839)
16.	Druga częstotliwość (częstość) drgań własnych układu nietłumionego	f_{02}	Hz	9,797
		(ω_{02})	(rad/s)	(61,558)
17.	Współczynnik tłumienia krytycznego zawieszenia	c_{1kr}	N·s/m	9062,0
18.	Zakres analizowanych prędkości ruchu pojazdu	$V_{min} - V_{max}$	km/h	10,0-120,0
		$(v_{min} - v_{max})$	(m/s)	(2,78-33,33)
19.	Krok zmian analizowanych prędkości ruchu pojazdu	ΔV	km/h	10,0
		(Δv)	(m/s)	(2,78)
20.	Najmniejsza wartość współczynnika tłumienia względnego	γ_{min}	-	0,1

	w zawieszeniu			
21.	Największa wartość współczynnika tłumienia względnego w zawieszeniu	γ_{\max}	-	0,6
22.	Krok zmian współczynnika tłumienia względnego w zawieszeniu	$\Delta\gamma$	-	0,02
23.	Wartość graniczna ruchu roboczego zawieszenia	r_{zg}	m	0,12

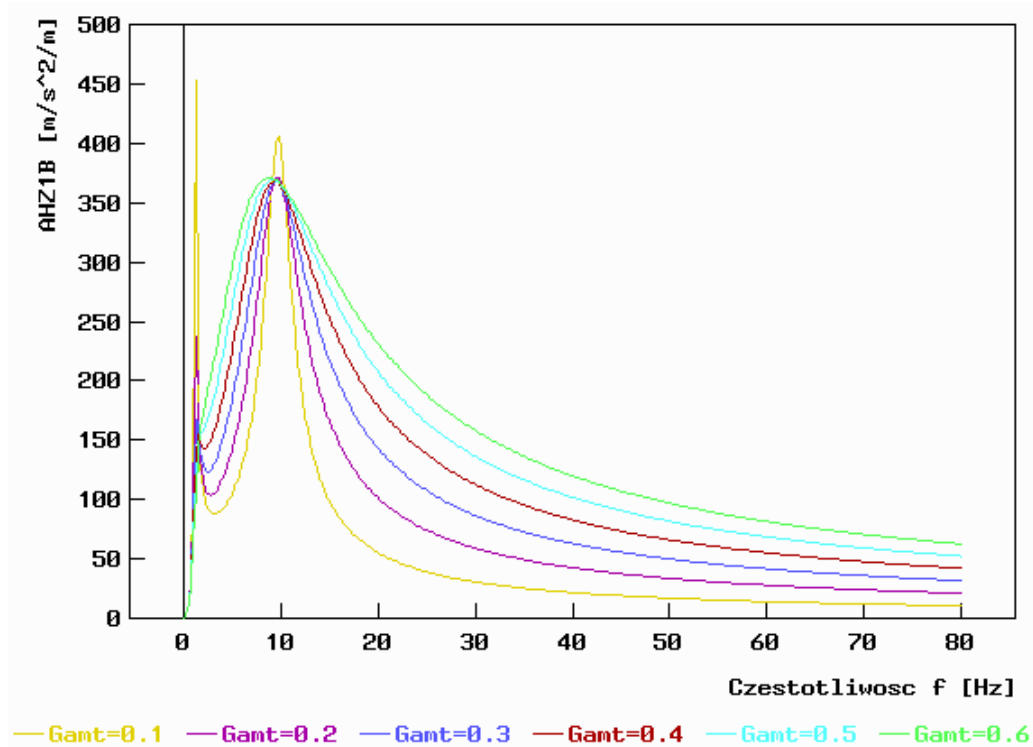
9. Wyniki obliczeń przed modyfikacją kryteriów optymalizacji

Dla zestawionych w tabeli 1 parametrów modelu oraz warunków badań wykonano obliczenia, zgodnie z przedstawionym wcześniej algorytmem.

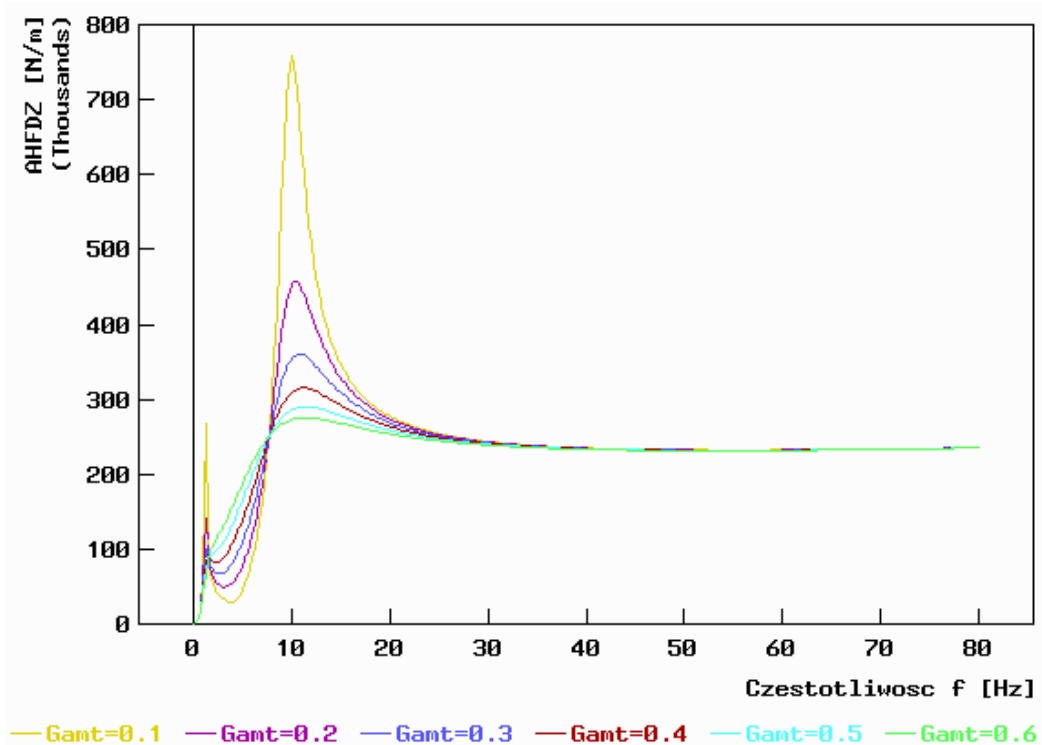
Na rysunkach 5, 6 i 7 przedstawiono moduły transmitancji widmowej przyspieszenia masy resorowanej, składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą oraz ugięcia zawieszenia w funkcji częstotliwości wymuszenia, w paśmie 0-80 Hz, dla różnych wartości tłumienia względnego, od 0,1 do 0,6. Na wszystkich trzech wymienionych rysunkach widoczne są wyraźnie dwa maksima dla częstotliwości zbliżonych do częstotliwości drgań własnych układu nietłumionego (1,248 Hz i 9,797 Hz) o wartościach tym mniejszych im większe jest tłumienie względne. W przypadku przyspieszeń masy resorowanej (rys. 5) wpływ tłumienia jest bardzo duży dla strefy w pobliżu pierwszego rezonansu, wyrażając się zmniejszaniem modułu transmitancji ze wzrostem tłumienia. Widoczny też jest wpływ tłumienia w strefie międzyrezonansowej i pozarezonansowej. Tu wzrost tłumienia zwiększa moduł transmitancji i to w dużym stopniu (nawet o 100% – 400%).

W przypadku składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (rys. 6) wzrost tłumienia zmniejsza moduł transmitancji w okolicach obu rezonansów oraz zwiększa go w strefie międzyrezonansowej (tu nawet o 400% - 500%); nie ma jednak dużego wpływu w strefie powyżej drugiego rezonansu, gdzie wartości utrzymują się na zbliżonym poziomie ze wzrostem częstotliwości.

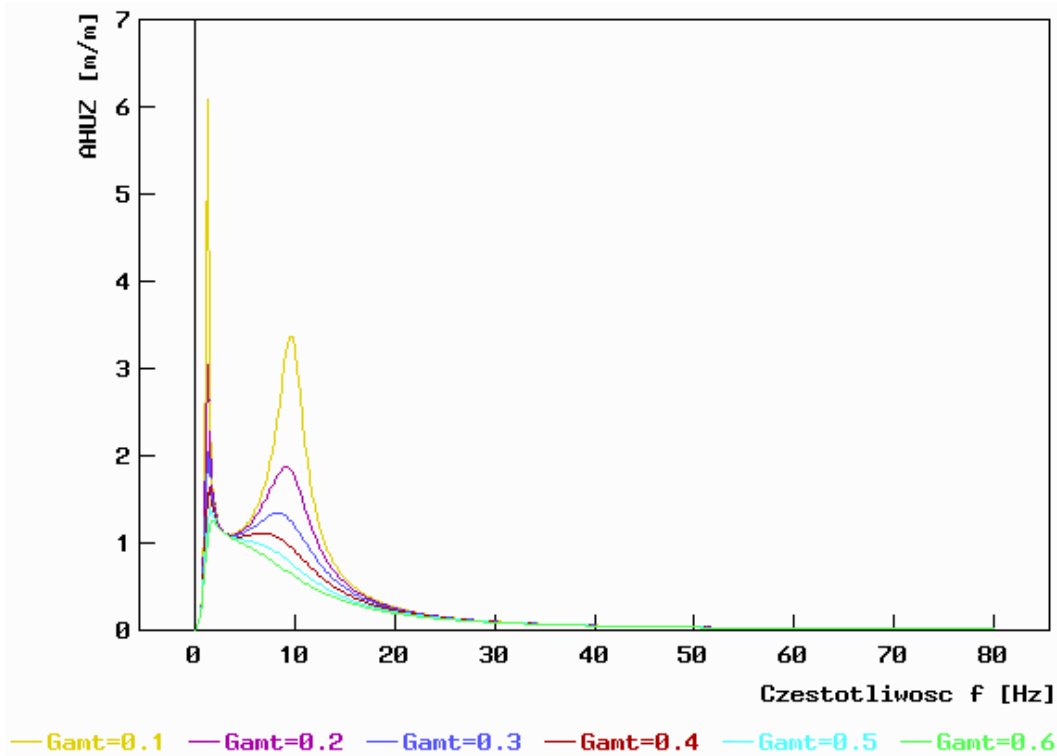
Moduł transmitancji widmowej ugięcia zawieszenia (rys. 7) zmniejsza się ze wzrostem tłumienia w okolicach obu rezonansów. W strefie między- i pozarezonansowej w niewielkim stopniu zależy od tłumienia w zawieszeniu.



Rys. 5. Moduł transmitancji widmowej przyspieszenia masy resorowanej (patrz (8) i (19), na rysunku oznaczony jako AHZ1B), dla różnych wartości tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), w funkcji częstotliwości wymuszenia f

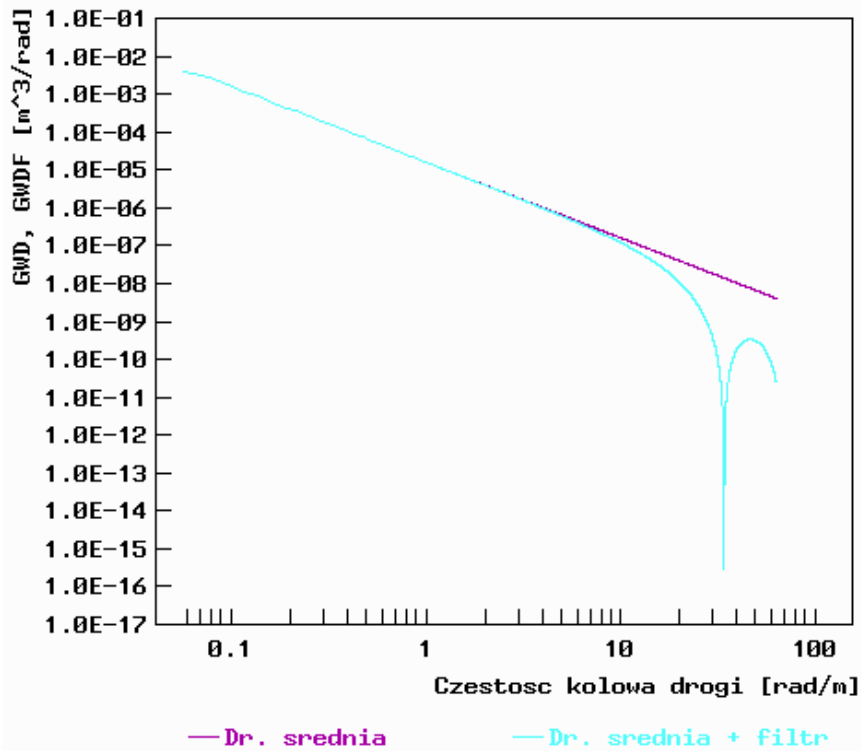


Rys. 6. Moduł transmitancji widmowej składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (patrz (17) i (20), na rysunku oznaczony jako AHFDZ), dla różnych wartości tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), w funkcji częstotliwości wymuszenia f



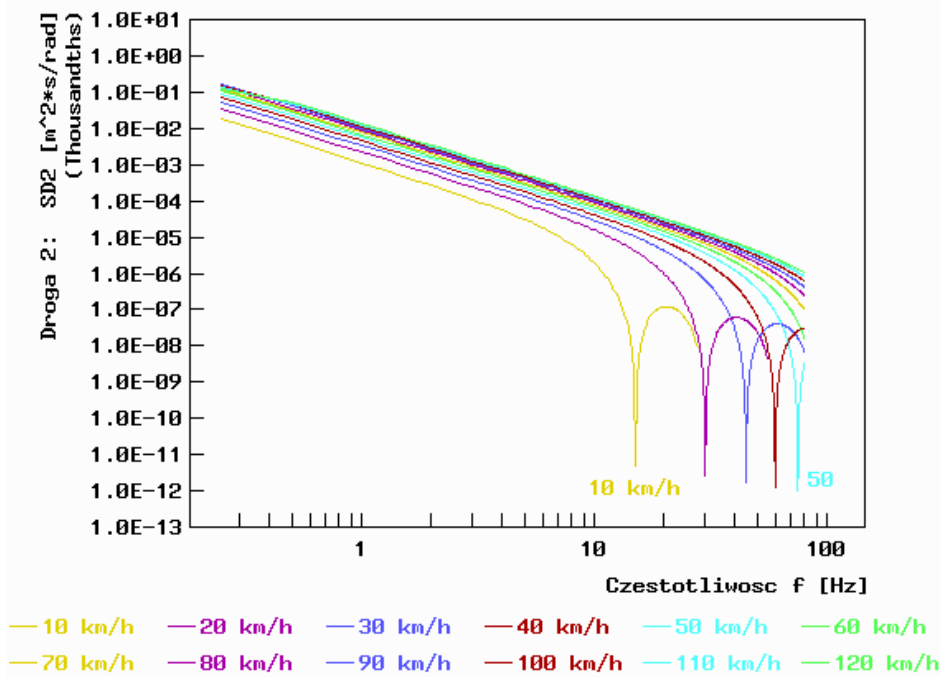
Rys. 7. Moduł transmitancji widmowej ugięcia zawieszenia (patrz (18) i (21) na rysunku oznaczony jako AHUZ), dla różnych wartości tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), w funkcji częstotliwości wymuszenia f

Rys. 8 przedstawia (w skali dwu-logarytmicznej) przykładową gęstość widmową mocy nierówności nawierzchni drogi $S_d(\Omega)$ (patrz zależność (9)) w funkcji częstości kołowej drogi Ω . Jest ona klasyfikowana w normie ISO [8] jako C (droga średnia). Zaprezentowano także efekt jej filtracji, odpowiadający użyciu „modelu stałego śladu” koła ogumionego (patrz zależności (10) i (11)). Powyżej częstości 10 rad/m efekt wygładzania opony jest bardzo wyraźny, zwłaszcza dla fal, dla których długość śladu współpracy koła z drogą jest jej całkowitą krotnością. Jest to szczególnie widoczne dla $\Omega = 33,96$ rad/m, co odpowiada pojedynczej krotności $L = 2 \cdot l_p = 0,185$ m (patrz rys. 4). Fale krótsze od 0,1 m nie były brane pod uwagę, o czym wspomniano w rozdziale 8.



Rys. 8. Gęstość widmowa mocy nierówności nawierzchni drogi (patrz (9), na rysunku oznaczona GWD) klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia), w funkcji częstości kołowej drogi (linia fioletowa) oraz efekt filtracji (oznaczony GWDF) z użyciem „modelu stałego śladu” koła ogumionego (linia jasnoniebieska)

Na rys. 9 zaprezentowano (w skali dwu-logarytmicznej) przykładowe gęstości widmowe mocy nierówności nawierzchni drogi $S_{dr}(\omega)$ klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia), w funkcji częstości ω [rad/s], dla różnych prędkości ruchu pojazdu V [km/h]. Zmienna niezależna została przestawiona (po stosownym przeliczeniu) jako częstość wymuszenia f [Hz] w celu lepszego odniesienia do innych wykresów prezentowanych w tej pracy. Na wykresach widoczny jest, dla wysokich częstości, efekt wygładzających własności ogumienia. Ze wzrostem prędkości pojazdu jest on coraz mniejszy, gdyż długości śladu współpracy opony z nawierzchnią drogi $2 \cdot l_p$ odpowiada coraz większa częstość f [Hz], a rozważane jest ograniczone pasmo 0-80 Hz (patrz też rys. 4 i 8 oraz zależności (10) i (11)). Powyżej prędkości 60 km/h wpływ wygładzających własności ogumienia jest już mało widoczny.

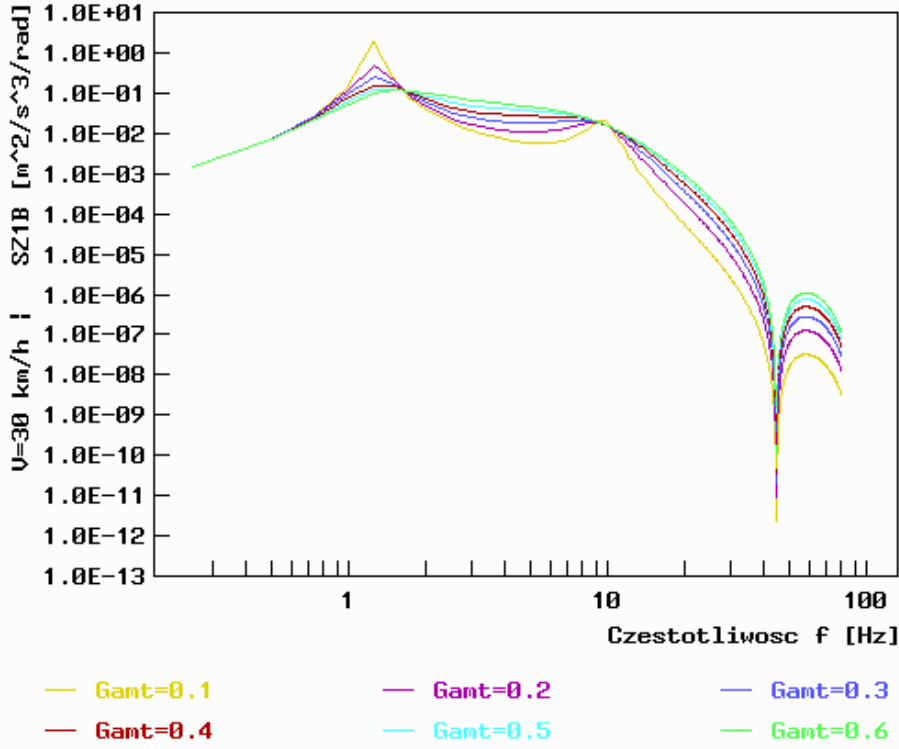


Rys. 9. Gęstości widmowe mocy nierówności nawierzchni drogi $S_{df}(\omega)$ (na rysunku oznaczona SD2) klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia), w funkcji częstotliwości ω [rad/s], przy prezentacji zmiennej niezależnej jako częstotliwości wymuszenia f [Hz] (dla lepszego odniesienia do innych wykresów), dla różnych prędkości ruchu pojazdu V [km/h]

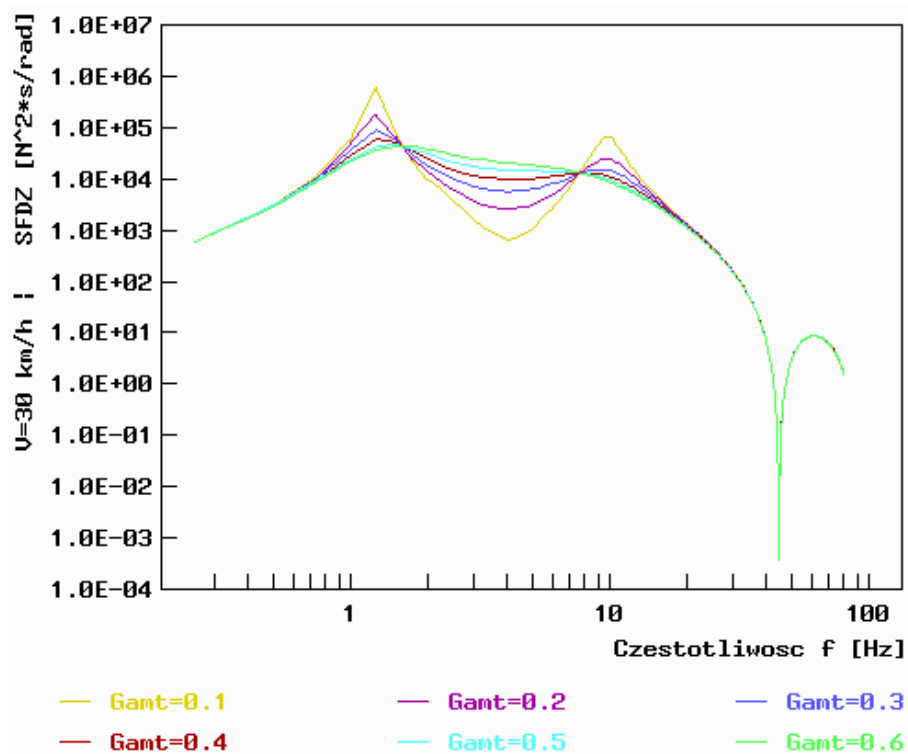
Rysunki 10, 11 i 12 przedstawiają (w skali dwu-logarytmicznej) gęstości widmowe mocy w funkcji częstotliwości wymuszenia f dla wielkości stanowiących podstawę obliczeń kryteriów oceny badanego układu. Droga klasyfikowana jest w normie ISO [8] jako C (średnia). Prędkość ruchu pojazdu wynosiła $V=30$ km/h. Wykresy różnią się wartością tłumienia względnego zawieszenia (patrz (22)). Na rys. 10 zaprezentowano gęstości widmowe mocy przyspieszenia masy resorowanej (patrz element podcałkowy w zależności (14)), na rys. 11 gęstości widmowe mocy składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (patrz element podcałkowy w zależności (15)) a na rys. 12 gęstości widmowe mocy ugięcia zawieszenia (patrz element podcałkowy w zależności (16)). Wybrano niezbyt wysoką prędkość ruchu pojazdu (30 km/h), aby możliwe było zaobserwowanie wpływu wygładzających własności ogumienia dla wyższych częstotliwości wymuszenia (tutaj powyżej 30 Hz). Ze wzrostem prędkości wpływ ten staje się coraz mniejszy. Analogiczne wyniki dla dwóch pozostałych dróg (B i D) mają jakościowo podobny charakter, różnią się wartościami. Są one mniejsze dla drogi B (dobrej) i większe dla drogi D (złej).

Na wszystkich trzech wymienionych rysunkach widoczny jest wyraźny wpływ tłumienia względnego i częstotliwości rezonansowych układu nietłumionego (1,248 Hz i 9,797 Hz) na przebieg charakterystyk. W przypadku przyspieszeń masy resorowanej (rys. 10) wpływ tłumienia jest duży dla pierwszego rezonansu (tłumienie zmniejsza wartości gęstości widmowej mocy) oraz w strefie międzyrezonansowej i pozarezonansowej - tu wzrost tłumienia zwiększa gęstość widmową mocy i to w dużym stopniu. W przypadku składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (rys. 11) wzrost tłumienia zmniejsza wartości

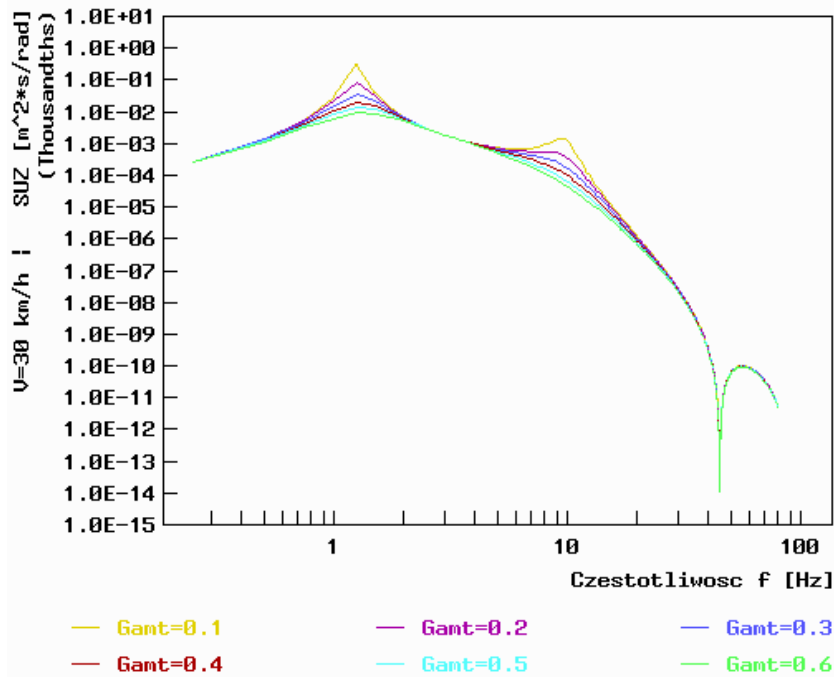
gęstości widmowej mocy w strefach rezonansowych oraz zwiększa jej wartości w strefie międzyrezonansowej. Nie ma jednak dużego wpływu w strefie powyżej drugiego rezonansu. Wartości gęstości widmowej mocy ugięcia zawieszenia (rys. 12) w strefie między- i pozarezonansowej w niewielkim stopniu zależy od tłumienia w zawieszeniu. Wpływ ten jest jednak widoczny w strefach rezonansowych – tłumienie zmniejsza wartości gęstości widmowej mocy.



Rys. 10. Gęstości widmowe mocy przyspieszenia masy resorowanej (patrz wyrażenie podcałkowe w (14), na rysunku oznaczona jako SZ1B) dla różnych wartości tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), w funkcji częstotliwości wymuszenia f , dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i prędkości ruchu pojazdu $V=30$ km/h



Rys. 11. Gęstości widmowe mocy składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (patrz wyrażenie podcałkowe w (15), na rysunku oznaczona jako SFDZ) dla różnych wartości tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{ant}), w funkcji częstotliwości wymuszenia f , dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i prędkości ruchu pojazdu $V=30$ km/h

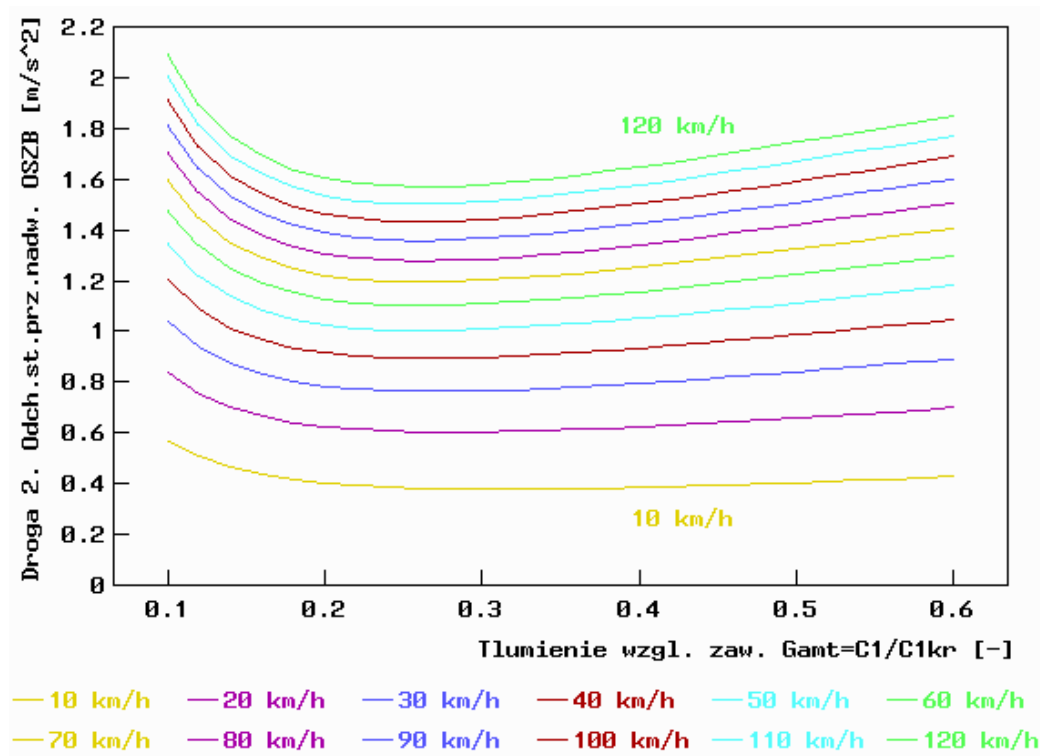


Rys. 12. Gęstości widmowe mocy ugięcia zawieszenia (patrz patrz wyrażenie podcałkowe w (16), na rysunku oznaczona jako SUZ) dla różnych wartości tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), w funkcji częstotliwości wymuszenia f , dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i prędkości ruchu pojazdu $V=30$ km/h

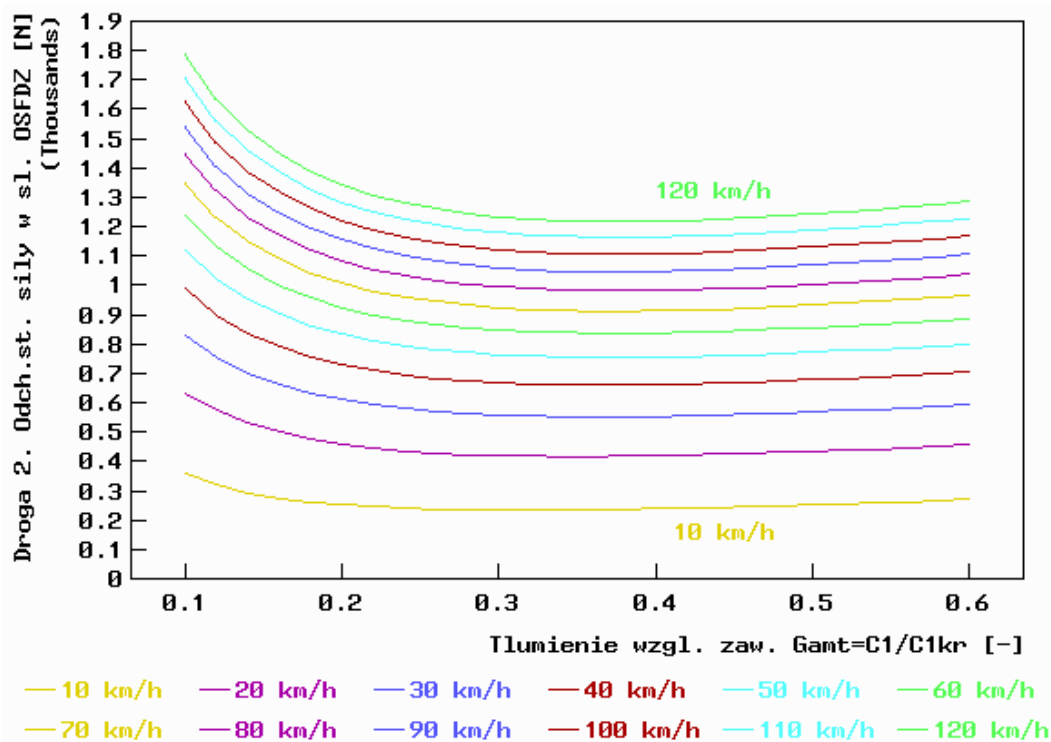
Rysunki 13, 14 i 15 przedstawiają odchylenia standardowe wielkości, stanowiących kryteria oceny badanego układu, w funkcji tłumienia względnego (patrz (22)), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h. Na rys. 13 pokazano odchylenia standardowe przyspieszenia masy resorowanej (patrz (14)), na rys. 14 odchylenia standardowe składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (patrz (15)) a na rys. 15 odchylenia standardowe ugięcia zawieszenia (patrz (16)). Analogiczne wyniki dla dwóch pozostałych dróg (B i D) mają jakościowo podobny charakter, różnią się wartościami, przy podobnej lokalizacji minimów. Wartości te są mniejsze dla drogi B (dobrej) i większe dla drogi D (złej). Minima odchylenia standardowego przyspieszenia masy resorowanej (patrz rys. 13) osiągane są dla tłumienia względnego z zakresu 0,25-0,30 ze wzrostem prędkości przesuwają się nieco w stronę mniejszych wartości tłumienia. W przypadku odchylenia standardowego składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (patrz rys. 14) minima odpowiadają tłumieniu względnemu z zakresu 0,35-0,40 i ze wzrostem prędkości mają niewielką tendencję do przesuwania się w stronę większych wartości tłumienia. Uwzględniając powyższe oraz kształt charakterystyk na rysunkach 13 i 14, można stwierdzić, że ze wzrostem współczynnika tłumienia względnego polepsza się miara komfortu jazdy, ale tylko w zakresie tłumienia względnego od zera do około 0,30; z jego dalszym wzrostem następuje pogorszenie komfortu. Z kolei ze wzrostem tłumienia względnego, w zakresie jego wartości od zera do około 0,40 polepsza się miara bezpieczeństwa, by przy dalszym wzroście tłumienia prowadzić do niewielkiego spadku tej miary. Nie potwierdza to jakościowych przebiegów zaprezentowanych

na rys. 1, zwłaszcza dla małego tłumienia i miary komfortu i dużego tłumienia dla miary bezpieczeństwa. Słuszne były, zatem, wątpliwości autora dotyczące możliwości nie tylko poglądowego, ale także jakościowego i ilościowego interpretowania przebiegu krzywych na rys. 1.

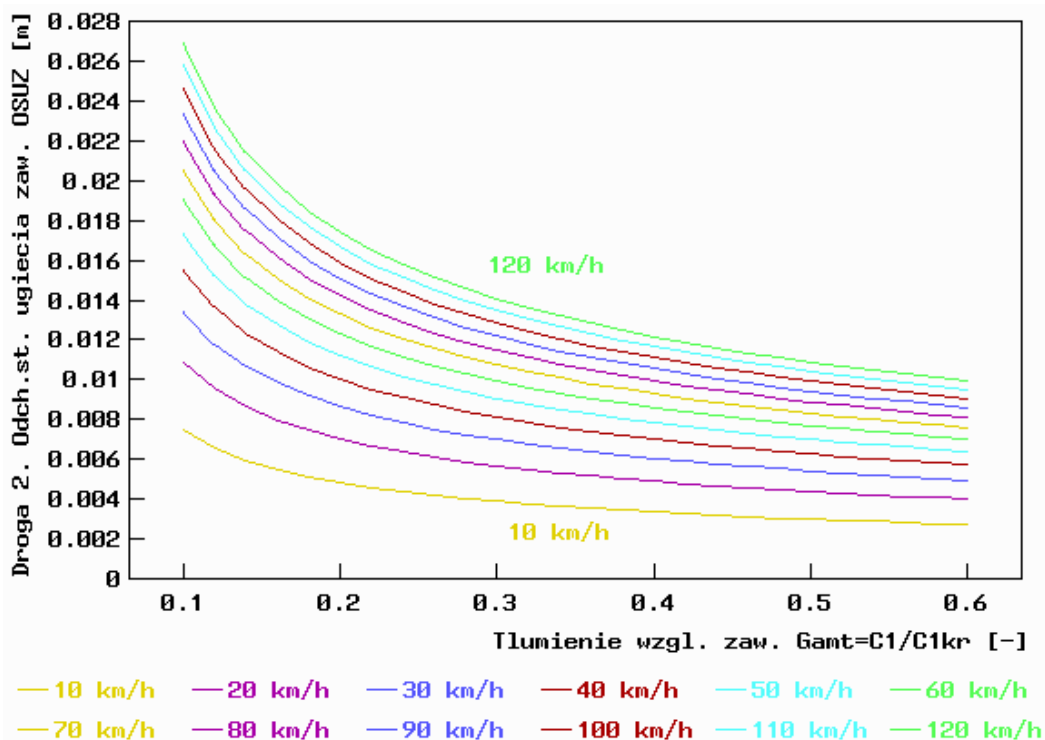
Rys. 15 wskazuje wyraźnie na istnienie trwałego trendu zmniejszenia ugięcia zawieszenia wraz ze wzrostem względnego tłumienia w zawieszeniu. Intensywność tego spadku maleje jednak wraz ze wzrostem tłumienia.



Rys. 13. Odchylenia standardowe przyspieszenia masy resorowanej (patrz (14), na rysunku oznaczone jako OSZB) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako Gamt), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h



Rys. 14. Odchylenia standardowe składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (patrz (15), na rysunku oznaczone jako OSFDZ) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h



Rys. 15. Odchylenia standardowe ugięcia zawieszenia (patrz (16), na rysunku oznaczone jako OSUZ) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako Γ_{ant}), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h

Spośród przyjętych w rozdziale 7 kryteriów optymalizacji, najłatwiejszym do zastosowania jest kryterium związane z ograniczeniem ruchu roboczego zawieszenia (patrz (13)). Większe trudności sprawia funkcja celu $Q(c_1)$ (patrz (12)). Ze względu na różne miary σ_a i σ_F , współczynniki wagowe w_a i w_F nie mogą być niemianowanymi. Trudniej, zatem, zrozumieć ich sens. To pierwszy powód wprowadzenia modyfikacji postaci elementów składowych funkcji celu $Q(c_1)$. Drugim jest chęć nawiązania do łatwości rozumienia zależności obrazowanych na rysunkach o charakterze jakościowym, takich jak przedstawiony na rys. 1.

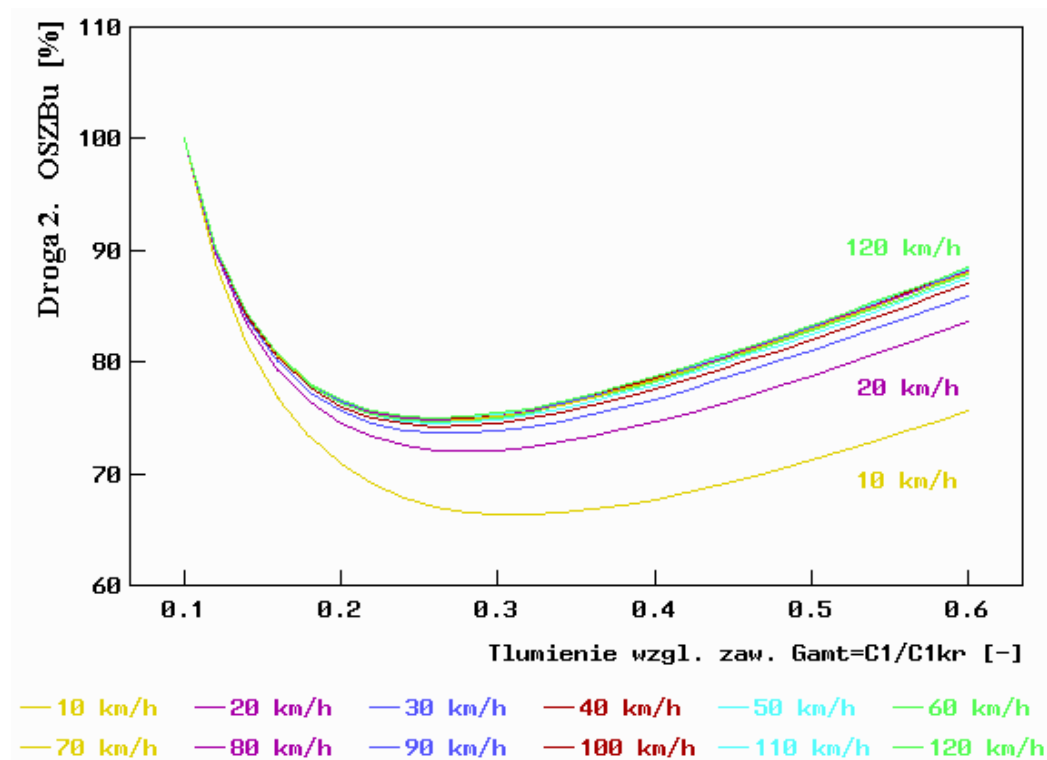
10. Modyfikacja kryteriów optymalizacji

Pierwszym krokiem tej modyfikacji jest normalizacja wykresów przedstawionych na rys. 13 i 14. Polega ona na podzieleniu każdej z wartości na wykresie (odpowiadającym danej prędkości V) przez największą wartość tego wykresu w dziedzinie c_1 . Oznaczenie „max.” ma tu sens „wartości największej” a nie formalnie rozpatrywanego maksimum.

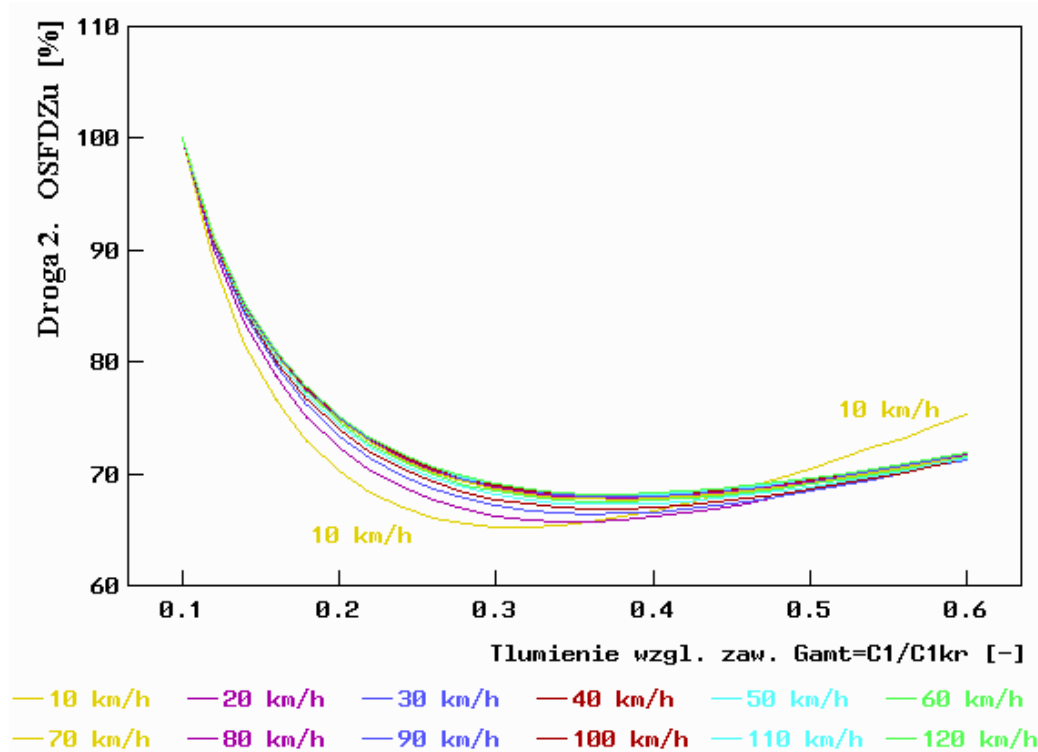
$$\sigma_{au}(c_1, V) = 100\% \cdot \sigma_a(c_1, V) / \max\{\sigma_a(c_1, V)\} \quad (\text{max. względem } c_1, \text{ dla danej } V) \quad (28)$$

$$\sigma_{Fu}(c_1, V) = 100\% \cdot \sigma_F(c_1, V) / \max\{\sigma_F(c_1, V)\} \quad (\text{max. względem } c_1, \text{ dla danej } V) \quad (29)$$

Rys. 16 i 17 są obrazem rys. 13 i 14 po opisanej normalizacji. Im większe są prędkości ruchu V tym odpowiadające im wykresy wartości unormowanych są bardziej do siebie zbliżone. Minima wykresów są lepiej widoczne niż przed normalizacją.



Rys. 16. Znormalizowane odchylenia standardowe przyspieszenia masy resorowanej (patrz (28), na rysunku oznaczone jako OSZBu) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h



Rys. 17. Znormalizowane odchylenia standardowe składowej dynamicznej reakcji normalnej w kontakcie koła z drogą (patrz (29), na rysunku oznaczone jako OSFDZu) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako Gamt), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h

Drugim krokiem modyfikacji jest zmiana odniesienia, przy pozostawieniu zakresu zmienności od zera do 100%. Chodzi tu o takie przedstawienie prezentowanych wielkości, aby 100% oznaczało wartość maksymalną. Tak określany jest wskaźnik komfortu WP1 i bezpieczeństwa WP2. Oznaczenie „min.” ma tu sens formalnie rozpatrywanego minimum.

$$WP1(c_1) = -\sigma_{au}(c_1, V) + \min\{\sigma_{au}(c_1, V)\} + 100\% \quad (\text{min. względem } c_1, \text{ dla wszystkich } V) \quad (30)$$

$$WP2(c_1) = -\sigma_{Fu}(c_1, V) + \min\{\sigma_{Fu}(c_1, V)\} + 100\% \quad (\text{min. względem } c_1, \text{ dla wszystkich } V) \quad (31)$$

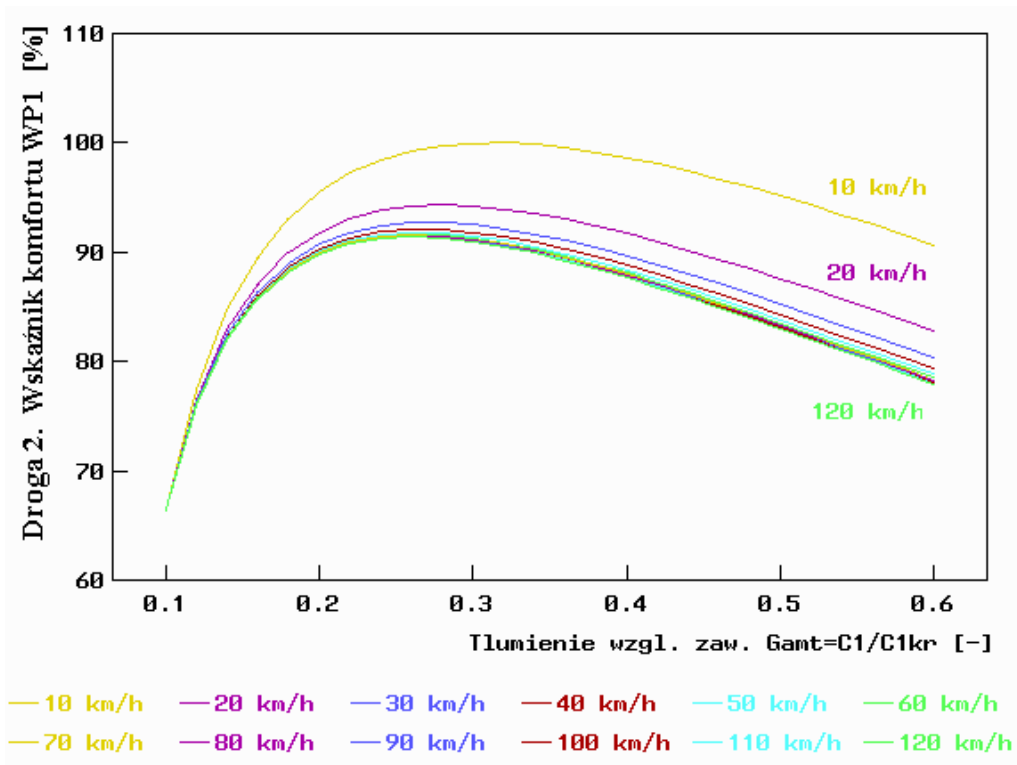
Zmodyfikowane kryteria oceny poprawności doboru współczynnika tłumienia w zawieszeniu c_1 (kryteria optymalizacji doboru tłumienia w zawieszeniu ze względu na komfort jazdy i bezpieczeństwo) mają postać:

$$Q_z(c_1) = w_k \cdot WP1(c_1) + w_b \cdot WP2(c_1) \Rightarrow \text{maksimum} \quad (32)$$

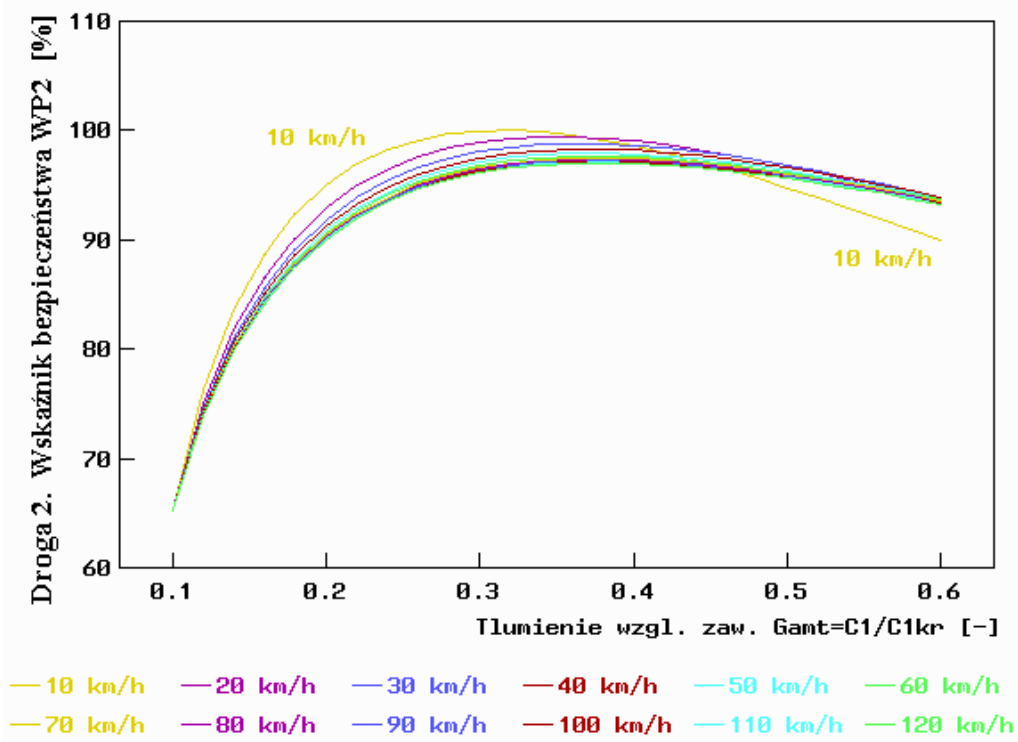
$$6 \cdot \sigma_{uz}(c_1, V) \leq r_{zg} \quad (33)$$

gdzie nowe oznaczenia: $Q_z(c_1)$ [%] to maksymalizowana zmodyfikowana funkcja celu; w_k [-], w_b [-] to współczynniki wagowe komfortu i bezpieczeństwa, z przedziału $<0,1>$; $WP1$ [%] i $WP2$ [%] to wskaźnik komfortu i bezpieczeństwa (patrz zależności (30) i (31)); r_{zg} [m] to graniczna wartość zakresu ruchu roboczego zawieszenia.

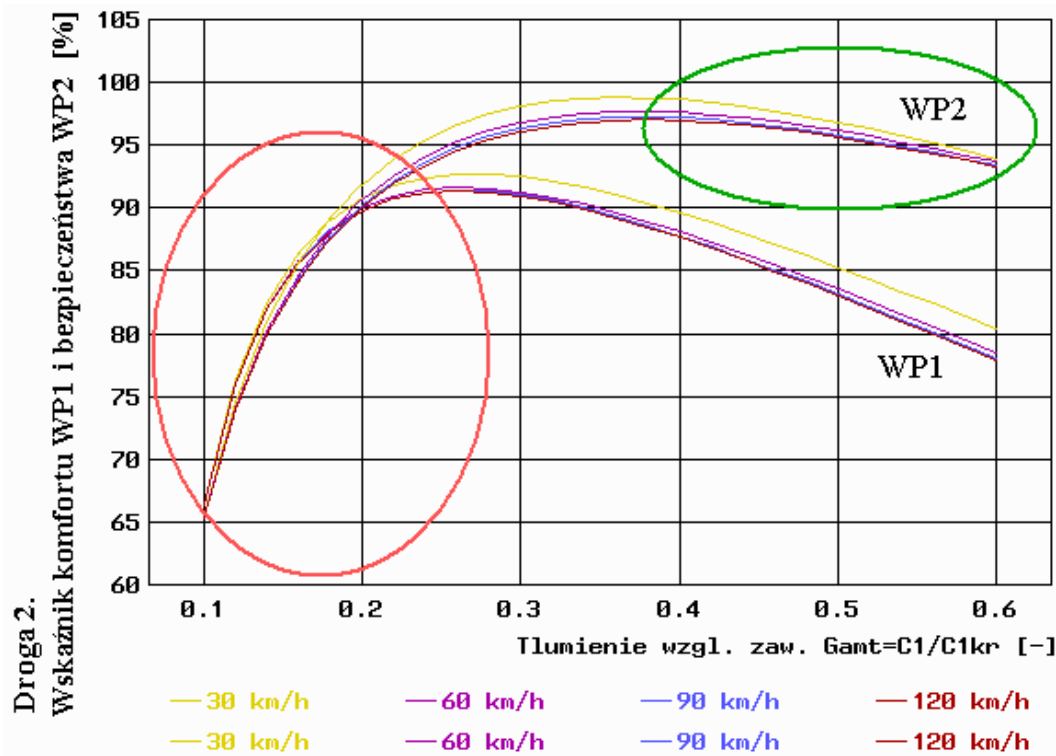
Należy zwrócić uwagę na zmianę nazewnictwa rozpatrywanych miar: od „dyskomfortu” i „niebezpieczeństwa” (patrz (12) i (13)) nastąpiło przejście do „wskaźnik komfortu WP1” i „wskaźnika bezpieczeństwa WP2” (patrz (30) i (31)), co wynika z ich różnej monotoniczności jako funkcji c_1 . Poszukiwane jest maksimum nowej funkcji celu $Q_z(c_1)$. Kolejne rysunki przedstawiają wskaźnik komfortu WP1 (rys. 18) i bezpieczeństwa WP2 (rys. 19), stanowiące kryteria oceny badanego układu, w funkcji tłumienia względnego, dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h. Analogiczne wyniki dla dwóch pozostałych dróg (B i D) mają jakościowo podobny charakter, różnią się wartościami, przy podobnej lokalizacji maksimum. Maksima wskaźnika komfortu WP1 (patrz rys. 18) osiągane są dla tłumienia względnego z zakresu 0,25-0,30 i ze wzrostem prędkości przesuwają się w stronę mniejszych wartości tłumienia. Ze wzrostem prędkości maleją także wartości maksymalne WP1. W przypadku wskaźnika bezpieczeństwa WP2 (patrz rys. 19) maksima odpowiadają tłumieniu względnemu z zakresu 0,35-0,40 i ze wzrostem prędkości przesuwają się w stronę większych wartości tłumienia. Ze wzrostem prędkości maleją nieco wartości maksymalne WP2. Na rys. 20 zestawiono wartości wskaźników komfortu WP1 i bezpieczeństwa WP2, co było możliwe ze względu na tę samą ich miarę. Zaprezentowane przebiegi odpowiadają tym pokazanym na rys. 18 i 19, ale dla wybranych, czterech prędkości ruchu pojazdu: 30, 60, 90 i 120 km/h. Porównując rys. 20 z poglądowym rys. 1, łatwym jest wskazanie dwóch obszarów ich jakościowej niezgodności. Oznaczono je kolorowymi elipsami. Wskaźnik komfortu WP1 (patrz czerwona elipsa) dla przedziału wartości tłumienia względnego $\langle 0,1, 0,25 \rangle$ szybko maleje wraz ze spadkiem tłumienia względnego, gdy tymczasem na rys. 1 osiąga największą wartość dla najmniejszego tłumienia. Wskaźnik bezpieczeństwa WP2 (patrz zielona elipsa) dla przedziału wartości tłumienia względnego $\langle 0,4, 0,6 \rangle$ łagodnie maleje wraz ze wzrostem tłumienia względnego, gdy tymczasem na rys. 1 osiąga największą wartość dla największego tłumienia. Rys. 1 należy zatem traktować jako wyłącznie poglądowy i to niezbyt dokładnie oddający własności badanego układu. Dla tłumienia względnego około 0,18 wartości WP1 i WP2 przyjmują równe wartości. Punkt przecięcia obu charakterystyk nie ma jednak znaczenia optimum w sensie Pareto, gdyż ze wzrostem tłumienia, zarówno WP1 jak i WP2 rosną (punkt przecięcia charakterystyk znajduje się przed maksimumami WP1 i WP2). Nie jest spełniony warunek (porównaj z [13, 33, 34]) niemożliwości poprawy jednego wskaźnika (np. WP1) bez pogorszenia drugiego (tu WP2).



Rys. 18. Wskaźnik komfortu WP1 (patrz (30)) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h



Rys. 19. Wskaźnik bezpieczeństwa WP2 (patrz (31)) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 12 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h



Rys. 20. Wskaźniki komfortu WP1 (patrz (30)) i bezpieczeństwa WP2 (patrz (31)) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 4 wartości prędkości ruchu pojazdu, od 30 do 120 km/h

11. Wyniki obliczeń dla zmodyfikowanych kryteriów optymalizacji

Rysunki 21 i 22 przedstawiają zmodyfikowaną funkcję celu $Q_z(c_1)$, obliczoną zgodnie z zależnością (32), w funkcji tłumienia względnego (patrz (22)), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 3 wartości prędkości ruchu pojazdu: 30, 60 i 90 km/h. Obliczenia wykonano dla dwóch zestawów współczynników wagowych:

– zestaw 1: $w_k = 0,5$, $w_b = 0,5$

– zestaw 2: $w_k = 0,4$, $w_b = 0,6$

Linie na rys. 21 i 22 z oznaczeniem „W:” dotyczą zestawu 2. Zestaw 1 oznacza równorzędne traktowanie wskaźnika komfortu WP1 i bezpieczeństwa WP2. Zestaw 2 wskazuje na przywiązywanie 1,5-krotnie większego znaczenia do bezpieczeństwa niż do komfortu ($1,5 = 0,6/0,4$).

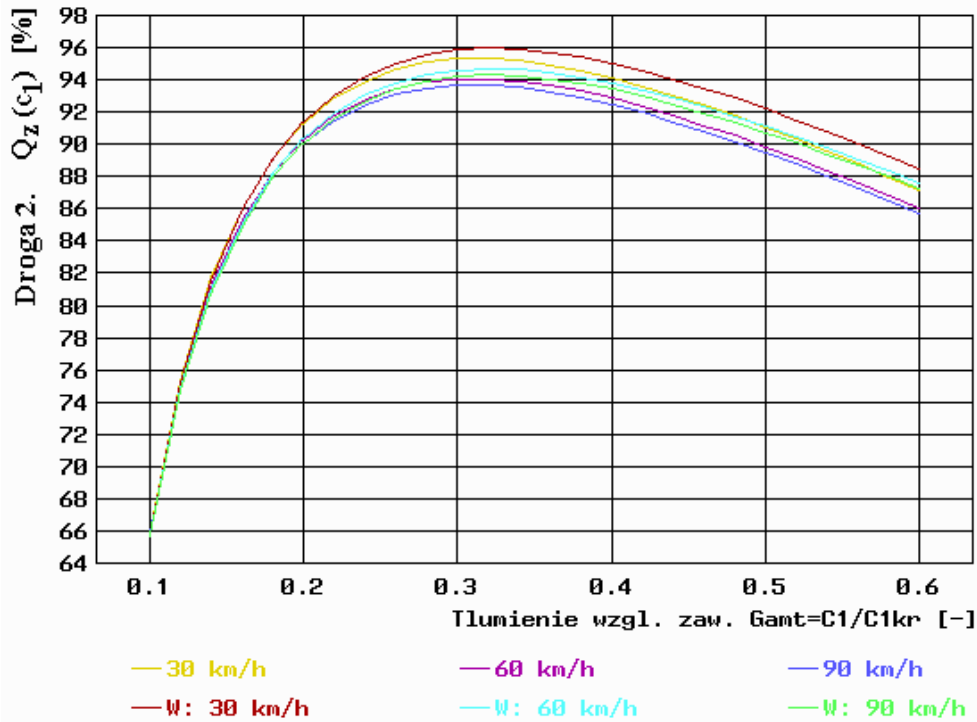
Rys. 22 jest powiększeniem rys. 21, z zaznaczeniem obszarów występowania maksimum $Q_z(c_1)$. Widocznym jest, że dla zestawu 1 wartość optymalna współczynnika tłumienia względnego γ wynosi 0,31 (oznaczono czerwoną elipsą na rys. 22), a dla zestawu 2: 0,32 (oznaczono brązową elipsą na rys. 22). Wykorzystując zależność (27) i dane z tabeli 1, można obliczyć optymalne wartości współczynnika tłumienia zawieszenia c_1

– **zestaw 1:** $c_1 = 0,31 \cdot c_{1kr} = 0,31 \cdot 9062 \text{ N} \cdot \text{s/m} \approx \mathbf{2810 \text{ N} \cdot \text{s/m}}$

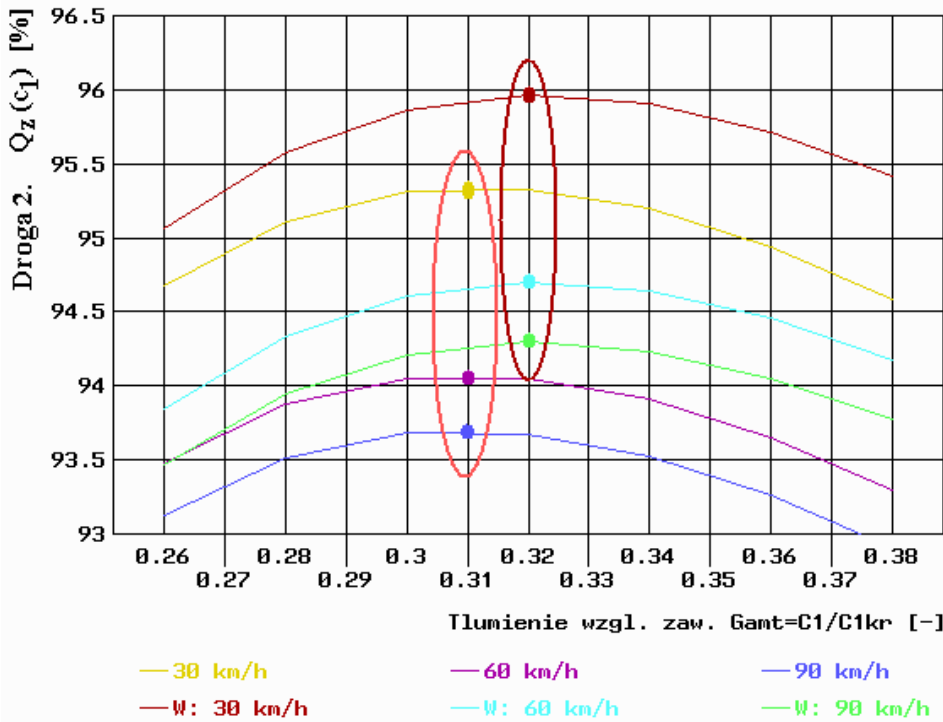
– zestaw 2: $c_1 = 0,32 \cdot c_{1kr} = 0,32 \cdot 9062 \text{ N} \cdot \text{s/m} \approx 2900 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

Zróżnicowanie wartości c_1 nie jest duże, mimo przyjęcia istotnie różniących się współczynników wagowych. Wyniki obliczeń dla nawierzchni B i D prowadzą do takich samych wartości, co wynika z liniowej postaci modelu wykorzystywanego w obliczeniach, przedstawionego na rys. 2.

Bardziej złożona sytuacja towarzyszy trzeciemu kryterium optymalizacji – ograniczeniu ruchu roboczego zawieszenia – patrz zależności (13) i (33).



Rys. 21. Zmodyfikowane kryterium oceny poprawności doboru współczynnika tłumienia w zawieszeniu $Q_z(c_1)$ (kryterium optymalizacji doboru tłumienia w zawieszeniu ze względu na komfort jazdy i bezpieczeństwo - patrz (32)) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 3 wartości prędkości ruchu pojazdu: 30, 60 i 90 km/h (pozostałe oznaczenia opisano w tekście)



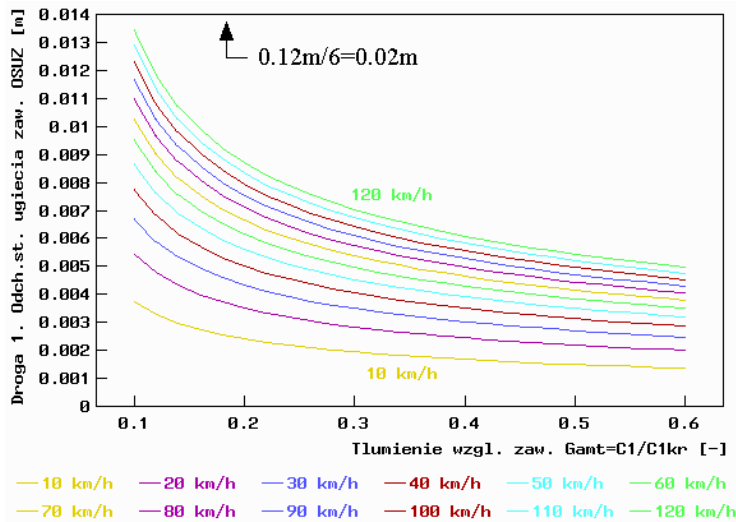
Rys. 22. Powiększenie rys. 21 z zaznaczeniem maksimów obrazowanych przebiegów.
 Zmodyfikowane kryterium oceny poprawności doboru współczynnika tłumienia w zawieszeniu $Q_z(c_1)$ (kryterium optymalizacji doboru tłumienia w zawieszeniu ze względu na komfort jazdy i bezpieczeństwo - patrz (32)) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako G_{amt}), dla drogi klasyfikowanej w normie ISO [8] jako C (średnia) i 3 wartości prędkości ruchu pojazdu: 30, 60 i 90 km/h. (Pozostałe oznaczenia opisano w tekście)

Ilustrują ją rysunki 23 a, b i c. Dla drogi B (dobrej, rys 23a: „Droga 1”), dla wszystkich analizowanych prędkości ruchu pojazdu i całego zakresu zmian współczynnika tłumienia względnego spełnione są zależności (13) i (33). Dla drogi C (średniej, rys 23b: „Droga 2”), dla wszystkich analizowanych prędkości ruchu pojazdu i wartości współczynnika tłumienia względnego powyżej 0,159 spełnione są zależności (13) i (33). Dla drogi D (złej, rys 23c: „Droga 3”), dla prędkości ruchu pojazdu nie większej niż 60km/h i wartości współczynnika tłumienia względnego powyżej 0,30 spełnione są zależności (13) i (33). Droga D ma nawierzchnię w złym stanie i trudno jest oczekiwać, że kierowcy będą się decydować na jazdę po niej z wysokimi prędkościami. Jeżeli to uczynią to ugięcia zawieszenia przekroczą wartość dopuszczalną, co dla rzeczywistych konstrukcji oznaczać będzie pracę w zakresie oddziaływań nieliniowych ograniczników ruchu oraz znaczny wzrost prawdopodobieństwa odrywania się kół od nawierzchni drogi. Zjawisk tych nie opisuje jednak wykorzystywany w niniejszej pracy model, stąd wspomniany wymóg ograniczenia prędkości do 60 km/h.

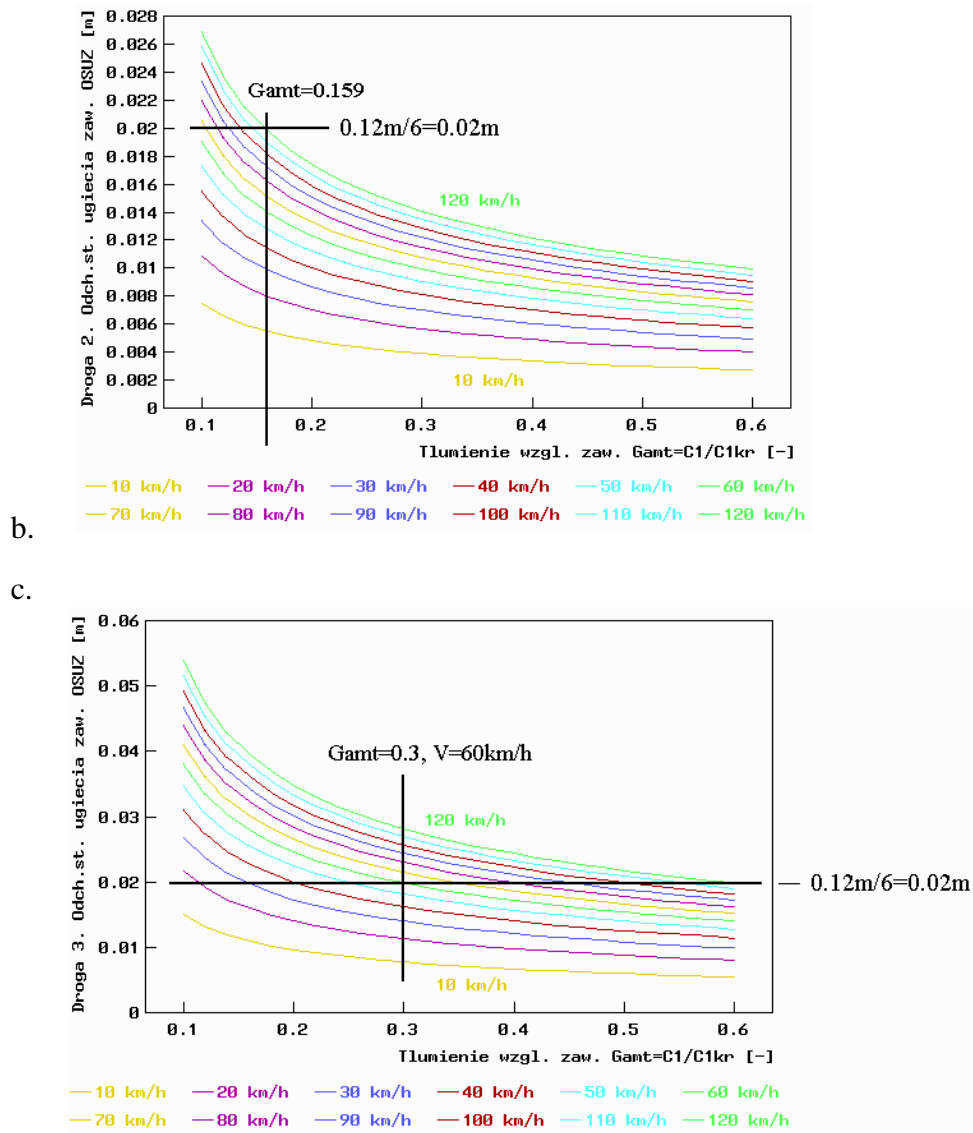
12. Zakończenie

W pracy wykorzystano ponad 40-letnie osiągnięcia wielu autorów zagranicznych i polskich w zakresie metod optymalizacji parametrów zawieszenia samochodu. Szczegółowo zaprezentowano wyniki obliczeń dotyczące optymalizacji tłumienia liniowego pasywnego zawieszenia pojazdu poruszającego się po nierównej, losowej nawierzchni drogi. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci bezwymiarowej funkcji celu – kryterium optymalizacji doboru tłumienia w zawieszeniu ze względu na komfort jazdy i bezpieczeństwo. Graficzna postać jej zależności od bezwymiarowego współczynnika tłumienia zawieszenia przypomina poglądowe, jakościowe zależności przytaczane w wielu pracach innych autorów, co ułatwia interpretację wyników końcowych optymalizacji. Uwzględniono także ograniczenie ugięć zawieszenia.

Zaprezentowana metoda stanowi pierwszy krok w procesie optymalizacji tłumienia w zawieszeniu samochodu. Dalsze obliczenia, wykorzystujące model ćwiartki samochodu, powinny uwzględniać nieliniowości charakterystyk sprężystych zawieszenia i kół ogumionych, asymetrię i nieliniowości charakterystyki amortyzatora, tarcie suche w zwieszeniu oraz zjawisko odrywania się koła od nawierzchni drogi. Kolejnym krokiem powinno być wykorzystanie przestrzennych modeli ruchu pojazdu, które najwierniej odzwierciedlają własności rzeczywistego samochodu.



a.



Rys. 23. Odchylenia standardowe ugięcia zawieszenia z drogą (patrz (16), na rysunku oznaczone jako OSUZ) w funkcji tłumienia względnego (patrz (22), na rysunku oznaczone jako Gamt), dla dróg klasyfikowanych w normie ISO [8] jako B (dobra, rys a: „Droga 1”), C (średnia, rys b: „Droga 2”), D (zła, rys c: „Droga 3”). Wartości prędkości ruchu pojazdu, od 10 do 120 km/h. Wartość 0,12m to przyjęty graniczny ruch roboczy zawieszenia r_{zg}

Informacja

Praca powstała w ramach projektu PBS3/B6/27/2015 finansowanego przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju, o akronimie SUV_SUSP „Aktywne zawieszenia wielofunkcyjnych pojazdów kołowych o wysokiej mobilności”, w zadaniu realizowanym przez Wydział

Transportu Politechniki Warszawskiej na rzecz Przemysłowego Instytutu Motoryzacji PIMOT.
Lider projektu: Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki Akademii Górniczo-Hutniczej
im. Stanisława Staszica.

Literatura

- [1] Arczyński S. *Mechanika ruchu samochodu*. Warszawa: WNT; 1993.
- [2] Captain K M, Boghani A B, Wormley D N. Analytical tire models for dynamic vehicle simulation. *Vehicle System Dynamics*. 1979; 8(1): 1-32.
- [3] Crolla D A. *Vehicle dynamics – theory into practice*. *Journal of Automobile Engineering*. 1996; 210(2): 83-94.
- [4] Firth G R. *The performance of vehicle suspensions fitted with controllable dampers* [dissertation]. The University of Leeds, Department of Mechanical Engineering; 1991.
- [5] Gobbi M, Levi F, Mastinu G. Multi-objective stochastic optimization of the suspension system of road vehicles. *Journal of Sound and Vibration*. 2006; 298: 1055-1072.
- [6] Gobbi M, Mastinu G. Analytical description and optimization of the dynamic behaviour of passively suspended vehicles. *Journal of Sound and Vibration*. 2001; 245(3): 457-481.
- [7] ISO 2631-1:1985 and 1997: *Mechanical vibration and shock – Evaluation of human exposure to whole-body vibration – Part 1: General Requirements*. International Organization for Standardization.
- [8] ISO 8608:1995: *Mechanical vibration – Road surface profiles – Reporting of measured data*. International Organization for Standardization.
- [9] Kamiński E, Pokorski J. *Teoria samochodu. Dynamika zawiesznień i układów napędowych pojazdów samochodowych*. Warszawa: WKŁ; 1983.
- [10] Kasprzyk T, Prochowski L, Szurkowski Z. *Optymalizacja własności sprężystych i dobór konstrukcji ogumienia samochodu osobowego dla różnych warunków eksploatacji*. *Technika Motoryzacyjna*. 1974; Part I: 10: 10-12; Part II: 11: 14-19.
- [11] Kasprzyk T, Prochowski L. *Teoria samochodu. Obciążenia dynamiczne zawiesznień*. Warszawa: WKŁ; 1990.
- [12] Konieczny J. Laboratory tests of active suspension system. *Journal of KONES Powertrain and Transport*. 2011; 18(1): 263-272.
- [13] Kwarciański T. *Sprawiedliwość czy efektywność? Analiza wykorzystująca ekonometryczny model wzrostu gospodarczego z historycznie optymalnym zróżnicowaniem*. *Acta Universitatis Lodzianae. Folia Oeconomica*. 2007 [cited 23 Oct 2015]; 213: 109-124. Available from: http://kwarcinski.ovh.org/do_pobrania/artykuly/sprawiedliwosc_efektywnosc.pdf
- [14] Lozia Z. *Wybrane zagadnienia symulacji cyfrowej procesu hamowania samochodu dwuosowego na nierównej nawierzchni drogi* [dissertation]. Warsaw University of Technology, Faculty of Automotive and Construction Machinery Engineering; 1985.
- [15] Lozia Z. *Analiza ruchu samochodu dwuosowego na tle modelowania jego dynamiki*. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Transport*. 1998; 41: 3-175.
- [16] Meirovitch L. *Elements of vibration analysis*. United States: McGraw-Hill Kogakusha. 1975. 495 p.
- [17] Mitschke M. *Teoria samochodu. Dynamika samochodu*. Warszawa: WKŁ; 1977.
- [18] Mitschke M. *Dynamika samochodu: drgania*. Warszawa: WKŁ; 1989.

- [19] Muluka V. Optimal suspension damping and axle vibration absorber for reduction of dynamic tire loads [dissertation]. Concordia University, Department of Mechanical Engineering, Montreal, Quebec, Canada: 1998.
- [20] Newland D E. An introduction to random vibrations and spectral analysis. United States: Longman; 1984. 478 p.
- [21] Osiecki J. Podstawy analizy drgań mechanicznych. Kielce: Kielce University of Technology; 1979.
- [22] Osiecki J. Dynamika maszyn. Warszawa: Military University of Technology; 1994.
- [23] Osiecki J, Gromadowski T, Stępiński B. Badania pojazdów samochodowych i ich zespołów na symulacyjnych stanowiskach badawczych. Radom: Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji-PIB; 2006. 226 p.
- [24] Patil S A, Joshi S G. Experimental analysis of 2 DOF quarter-car passive and hydraulic active suspension systems for ride comfort. Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal. 2014; 2(1): 621-631.
- [25] Rotenberg R W. Zawieszenie samochodu. Warszawa: WKŁ; 1974.
- [26] Ryba D. Improvements of dynamic characteristics of automobile suspension systems. Part I. Two-mass systems. Vehicle System Dynamics. 1974; 3(1): 17-46.
- [27] Sekulić D, Devidović V. The effect of stiffness and damping of the suspension system elements on the optimization of the vibrational behavior of a bus. International Journal for Traffic and Transport Engineering. 2011; 1(4): 231-244.
- [28] Sharp R S, Crolla D A. Road vehicle suspension system design – a review. Vehicle System Dynamics. 1987; 16: 167-192.
- [29] Sharp R S, Hassan S A. An evaluation of passive automotive suspension systems with variable stiffness and damping parameters. Vehicle System Dynamice. 1986; 15: 335-350.
- [30] Ślaski G. Studium projektowania zawiesznień samochodowych o zmiennym tłumieniu [dissertation]. Poznan University of Technology; 2012.
- [31] Verros G, Natsiavas S, Papadimitriou C. Design optimization of quarter-car models with passive and semi-active suspensions under random excitation. Journal of Vibration and Control. 2005; 11: 581-606.
- [32] Wong, J Y. Theory of ground vehicles. Canada: John Wiley & Sons; 2001.
- [33] Encyklopedia PWN [cited 22 Oct 2015]. Available from: <http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/optimum-w-sensie-Pareto;3951452.html>.