ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXXIX (2003)

Władysław Narkiewicz (Wrocław)

Wrocławscy matematycy 1900–1945

1. Pod koniec XIX wieku, po odejściu Kummera w 1855 roku, przewinęło się przez wrocławski uniwersytet kilku wybitnych matematyków, by wymienić tylko Rudolfa Lipschitza (1862–1864) czy Paula Bachmanna (1864–1875), ale przebywali oni we Wrocławiu przez krótki okres i nie wywarli tu wielkiego wpływu. W pierwszej połowie wieku XX pracowali we Wrocławiu czterej wysokiej klasy matematycy i o nich będzie tu mowa.

2. Po utworzeniu Wyższej Szkoły Technicznej (Technische Hochschule) w 1910 roku pojawia się we Wrocławiu postać pierwszoplanowa, Ernst Steinitz. Urodzony 13 czerwca 1871 roku w Hucie Laura (obecnie Siemianowice) na Górnym Śląsku, odbył w latach 1890–1894 studia matematyczne we Wrocławiu i Berlinie, a po uzyskaniu doktoratu w styczniu 1894 na Uniwersytecie Wrocławskim otrzymał w 1905 roku stanowisko docenta na politechnice w Charlottenburgu. W archiwach Uniwersytetu Wrocławskiego zachował się protokół jego egzaminu doktorskiego. W owym czasie kandydat do stopnia doktora zdawał dwa egzaminy z matematyki oraz po jednym z filozofii, fizyki i z wybranego przez siebie przedmiotu. Steinitz zdał doskonale oba egzaminy z matematyki (rozwiązywalność równań algebraicznych 5 stopnia, zasadnicze twierdzenie algebry, teoria szeregów, analiza zespolona: *Summa cum laude* u Jacoba Rosanesa i geometria rzutowa oraz mechanika: *Magna cum laude* u Rudolfa Sturma), fizyki i mineralogii, atoli po egzaminie z filozofii jego egzaminator, profesor Freudenthal, napisał:

„*Egzamin z filozofii obejmował historię starej i nowej filozofii, ze szczególnym uwzględnieniem jej związków z matematyką, a także podstawy psychologii. W żadnej z tych dziedzin nie ujawniła się jasna i choćby w minimalnym stopniu wystarczająca wiedza. Non superavit.*"

Jednakże sześcioosobowa komisja uznała, że Steinitz całość egzaminu doktorskiego zdał z oceną „*Magna cum laudo*".

Jest to nieco rozszerzona wersja odczytów na posiedzeniach PTM we Wrocławiu i Katowicach.

Do Wrocławia Steinitz powrócił w 1910 roku, by objąć profesurę w Wyższej Szkole Technicznej, którą piastował przez 10 lat. W 1920 roku przeniósł się na uniwersytet w Kilonii, gdzie pozostał aż do śmierci, 29 września 1928 roku.

Najważniejsza praca Steinitza [St1] stworzyła podstawy teorii ciał abstrakcyjnych. Do tej pory badano jedynie różne konkretne ciała, takie jak skończone rozszerzenia ciała liczb wymiernych, ciała funkcji algebraicznych, czy też ciała skończone. Steinitz jako pierwszy nie tylko podaje przyjętą następnie powszechnie definicję ciała (która zresztą pojawiła się też w pracach H. Webera), ale wprowadza pojęcia izomorfizmu ciał, rozszerzenia rozdzielczego i nierozdzielczego, a także ciała algebraicznie domkniętego. Bezsprzecznie najważniejszym rezultatem tej pracy jest pierwszy dowód istnienia algebraicznego domknięcia dowolnego ciała, a znajdujemy tam także m.in. metodę konstruowania dowolnego ciała, wychodząc z ciała prostego i dokonując najpierw rozszerzenia czysto przestępnego, a następnie rozszerzenia algebraicznego. Pojawia się tam też konstrukcja ciała liczb wymiernych jako zbioru klas równoważności par liczb całkowitych $\langle a, b\rangle$ $(b \neq 0)$ z relacją równoważności

$$\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle \;\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Innym ważnym wynikiem Steinitza, uzyskanym już w czasie pracy we Wrocławiu, jest opis zbioru sum szeregów o wyrazach zespolonych, powstałych przez przestawianie wyrazów ustalonego zbieżnego szeregu. Steinitz pokazał [St2], że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ liczb zespolonych jest zbieżny, to zbiór sum zbieżnych szeregów powstałych przez przestawianie jego wyrazów jest punktem, prostą lub całą płaszczyzną i podał także uogólnienie n-wymiarowe tego rezultatu. Twierdzenie to pojawiło się wcześniej w jednej z prac Lévy'ego, ale z niejasnym dowodem.

Steinitz interesował się także topologią kombinatoryczną i pisał książkę na ten temat, którą po jego śmierci przygotował do druku H.Rademacher [St3] w 1934 roku.

3. W 1913 roku przybywa do Wrocławia z Kilonii Max Dehn, by objąć stanowisko profesora zwyczajnego w Wyższej Szkole Technicznej. Urodzony w 1873 roku w Hamburgu, studiował w Getyndze, gdzie doktoryzował sie u Hilberta w 1903 roku pracą z podstaw geometrii. W swej pracy habilitacyjnej rozwiązał trzeci problem Hilberta, znajdując dwa czworościany o jednakowych podstawach i wysokościach, nie będące jednakże równoważne przez rozkład i dopełnienie. Wiadomo było od dawna, że dwa wielokąty na płaszczyźnie o jednakowym polu są równoważne przez rozkład i dopełnienie, a Hilbert zaproponował w swym paryskim odczycie przeniesienie tego rezultatu na przestrzeń trójwymiarową. Dehn pokazał, że nie jest to możliwe, wprowadzając pewien niezmiennik tych przekształceń i konstruując dwa czworościany, zresztą niezbyt skomplikowane, mające te same podstawy i wysokości, ale różne niezmienniki. W latach 1901–1911 był Dehn docentem na uniwersytecie w Münster, a następnie uzyskał profesurę nadzwyczajną w Kilonii, gdzie pracował dwa lata. Szybko porzucił podstawy geometrii na rzecz topologii i w 1907 roku napisał (wraz z P.Heegaardem) duży artykuł przeglądowy o tym dziale matematyki, dla wydawanej w tym czasie Encyklopedii Nauk Matematycznych. Wkrótce potem ukazują się jego ważne prace o topologii przestrzeni euklidesowych (patrz [De1]), a w jednej z nich pojawia się znany lemat Dehna:

Niech D będzie dyskiem 2-wymiarowym, B jego brzegiem, a X rozmaitością 3-wymiarową i niech $f : D \longrightarrow X$ będzie homeomorfizmem na pewnym otoczeniu B, zawartym w D. Wówczas $f|_B$ przedłuża się do zanurzenia całego dysku w X.

Podany przez Dehna dowód nie był kompletny, a pełny dowód znalazł dopiero Papakyriakopoulos [Pa] w 1957 roku (patrz np. [Du]). Interesowała go też teoria grup, w której sformułował w 1911 roku m.in. problem słów i problem izomorfizmu dla grup skończenie prezentowalnych ([De2]).

Dehn opuścił Wrocław w 1921 roku, by przenieść się na uniwersytet we Frankfurcie nad Menem, po odejściu stamtąd L. Bieberbacha. Po dojściu Hitlera do władzy traci posadę w 1935 r. i wyjeżdża do Norwegii, skąd dostaje się w 1940 r. poprzez Szwecję, Rosję i Japonię do Ameryki. Opis tej eskapady znaleźć można w niedawnym artykule J.W.Dawsona [Da]. W Stanach pracuje w malutkim Black Mountains College w Północnej Karolinie, gdzie był jedynym matematykiem. Zmarł w Black Mountains 27 czerwca 1952 r.

4. Przez pewien czas pracował we Wrocławiu Hans Rademacher. Urodzony 3 kwietnia 1892 roku w Wandsbeck, szkoły ukończył w Hamburgu, a potem studiował matematykę, fizykę i filozofię na uniwersytecie w Getyndze. Jak sam pisze w swoim życiorysie, zachowanym w archiwum Uniwersytetu Wrocławskiego, największy wpływ wywarły na niego wykłady Constantina Carathéodory'ego, Richarda Couranta, Dawida Hilberta, Feliksa Kleina i Hermanna Weyla. Carathéodory był także promotorem jego pracy doktorskiej „*Eindeutige Abbildungen und Messbarkeit*", obronionej 8 marca 1916 r. Przez trzy lata pracował jako nauczyciel, a po przejściu Carathéodory'ego do Berlina, habilituje się na berlińskim uniwersytecie w grudniu 1919 roku. Docentem jest jedynie trzy lata, bo już na wiosnę 1922 r. zostaje powołany na stanowisko profesora nadzwyczajnego uniwersytetu w Hamburgu, a po kolejnych trzech latach obejmuje profesurę zwyczajną na uniwersytecie we Wrocławiu, wakującą po odejściu na emeryturę profesora Friedricha Schura (1856–1932), który był specjalistą z geometrii, badał grupy przekształceń i napisał kilka podręczników geometrii i mechaniki. Zachowały się materiały Wydziału Filozoficznego, dotyczące powołania Rademachera. Wynika z nich, że Rademacher zajmował dość odległe miejsce na liście kandydatów. Wydział najbardziej pragnął powołać na wakujące stanowisko profesora G. Mohrmanna z Bazylei (o którym dziś mało kto pamięta; jego prace dotyczyły w większości syntetycznej geometrii i teorii szeregów, a najciekawsza jest chyba praca z 1923 roku, w której rozważa problem topologiczny: ile obszarów powstaje na płaszczyźnie przy przecięciu się dwóch krzywych trzeciego stopnia?), ale ponieważ uważano, że nie ma szans na jego przeniesienie, postawiono na pierwszym miejscu listy znanego topologa Tietzego, na drugim geometrę Reidemeistera (specjalistę teorii węzłów), a dopiero na trzecim *ex aequo* Rademachera wraz z Lotharem Koschmiederem, ówczesnym docentem wrocławskiego uniwersytetu. Ponieważ Tietze szybko odmówił, dodano do tej listy Rolanda Weitzenböcka. Ostatecznie okazało się, że czołowi kandydaci kolejno odmawiali i w ten sposób 19 lutego 1925 roku nominację otrzymał Rademacher.

Działalność naukowa Rademachera w pierwszym okresie związana była z problemami teorii funkcji rzeczywistych. Jego najważniejsze wyniki w tej dziedzinie są zawarte w pracy [Ra2]. Znajdujemy tam m.in. definicję *układu ortogonalnego Rademachera*

$$\psi_n(x) = 2e_n(x) - 1,$$

gdzie $e_n(x)$ oznacza n-tą cyfrę w rozwinięciu dwójkowym liczby x. Układ ten nie jest zupełny, a jego uzupełnienie zostało wkrótce potem przez Rademachera skonstruowane, ale konstrukcja ta nie została opublikowana, gdyż w międzyczasie ukazała się praca Walsha [Wa], zawierająca ten sam rezultat. Manuskrypt Rademachera z jego konstrukcją był przez długi czas uważany za zaginiony, ale wreszcie się odnalazł, a jego historia i treść zostały przedstawione w odczycie E. Grosswalda [Gr].

Praca [Ra2] zawiera także nowy dowód twierdzenia Riesza-Fischera oraz rezultaty, dotyczące zbieżności szeregów ortogonalnych. H. Weyl pokazał, że jeśli układ funkcji $\phi_n(x)$ jest ortonormalny, a szereg

$$\sum_n c_n^2 \sqrt{n}$$

jest zbieżny, to szereg $\sum_n c_n\phi_n(x)$ jest zbieżny prawie wszędzie. Plancherel zastąpił tu $\sqrt{n}$ przez $\log^3 n$, a Rademacher zmniejszył potęgę przy logarytmie do 2. Obecnie wiemy, dzięki twierdzeniu Carlesona, że każdy szereg Fouriera funkcji klasy L^2 jest zbieżny prawie wszędzie.

Później Rademacher zainteresował się teorią liczb i pozostał jej wierny do końca życia. Był on jednym z pierwszych, którzy dostrzegli znaczenie metody sita w teorii liczb, znalezionej przez Viggo Bruna. Zastosował on ją do wielu zagadnień, pokazując m.in., że każda dostatecznie duża liczba parzysta jest sumą 2 liczb, mających co najwyżej 7 czynników pierwszych, a także, że istnieje nieskończenie wiele liczb n takich, że zarówno n jak i $n+2$ mają co najwyżej 7 czynników pierwszych. Tą samą metodą udowodnił, że każdy nieprzywiedlny wielomian stopnia g nad Z, nie mający stałych dzielników, przedstawia nieskończenie wiele liczb o co najwyżej $4g-1$ czynnikach pierwszych [Ra3]. Jako pierwszy zastosował metodę Bruna do problemów algebraicznej teorii liczb, znajdując m.in. asymptotyczne wzory dla ilości przedstawień liczb całkowitych w zadanym skończonym rozszerzeniu ciała liczb wymiernych w postaci sumy liczb generujących ideały pierwsze [Ra4], [Ra5]. Sławę przyniosło mu znalezienie w 1937 wzoru, opisującego wzrost funkcji $p(n)$, przedstawiającej ilość partycji liczby n, tj. ilości przedstawień liczby n w postaci sumy liczb naturalnych. Funkcja ta bardzo szybko rośnie, gdyż już liczba $p(200)$ przekracza $3\cdot 10^{12}$, a jak wyliczył D.H.Lehmer w 1936 roku, mamy $p(14031) > 10^{127}$. W 1918 roku G.H.Hardy i S.S.Ramanujan, stosując metodę całkowania zespolonego, zbadali jej zachowanie przy n zmierzającym do nieskończoności i udowodnili, że

$$p(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + o(1)\right)\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n}\right),$$

i znaleźli jej asymptotyczne rozwinięcie. Rademacherowi udało się tak zmodyfikować [Ra6] wzory Hardy'ego-Ramanujana, że powstał jawny wzór, dający dokładną wartość funkcji $p(n)$:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(c\lambda_n/k)}{\lambda_n}\right),$$

gdzie

$$A_k(n) = \sum_{(h,k)=1} \omega_{h,k}\exp(-2\pi i h n/k),$$

przy czym $\lambda_n = \sqrt{n - 1/24}$, a $\omega_{h,k}$ są pewnymi pierwiastkami z jedności. Dokładniej mamy:

$$\omega_{h,k} = \exp(\pi i s(h,k)),$$

gdzie $s(h,k)$ jest tzw. *sumą Dedekinda*, określoną poprzez

$$s(h,k) = \sum_{r=1}^{k}\left\langle\frac{hr}{k}\right\rangle\left\langle\frac{r}{k}\right\rangle,$$

przy czym

$$\langle x\rangle = \begin{cases} \{x\} - 1/2 & \text{gdy } x \notin Z, \\ 0 & \text{gdy } x \in Z. \end{cases}$$

W późniejszym okresie wiele prac Rademachera dotyczyło sum Dedekinda oraz teorii form modularnych. Interesujący opis tych badań można znaleźć we wspomnieniu B. C. Berndta [Be] z okazji setnej rocznicy urodzin Rademachera.

W 1934 roku Rademacher zostaje wyrzucony z pracy, ponieważ był członkiem jednego z towarzystw pacyfistycznych. Wyjeżdża do Stanów, gdzie uzyskuje stanowisko asystenta na University of Pennsylvania, mimo, iż w Niemczech był już od 10 lat profesorem zwyczajnym i miał wielki i uznany dorobek naukowy. Emil Grosswald, w szkicu biograficznym w [Ra1] pisze:

„*W owych latach głównym kryterium awansu była długość wiernej służby dla instytucji, a nie osiągnięcia profesjonalne – fakt wyjaśniony nieco zdziwionemu asystentowi przez pewnego siebie dziekana. Na szczęście dla dobrego imienia pensylwańskiego uniwersytetu, nie wszyscy tak myśleli i przy następnej okazji Rademacher został pełnym profesorem*".

Na tym uniwersytecie pozostał Rademacher aż do emerytury, na którą przeszedł po ukończeniu 70 lat. Zmarł 7 lutego 1969, będąc przez ostatnie 17 miesięcy życia całkowicie sparaliżowanym.

5. Ostatnim kierownikiem Seminarium Matematycznego w niemieckim Wrocławiu był Johann Radon. Urodzony w 1887 w Dečinie, w rodzinie Niemców sudeckich, gimnazjum ukończył w Litomierzycach, a w latach 1905–1910 studiował matematykę i fizykę na uniwersytecie w Wiedniu, będąc uczniem Gustava Eschenicha i Wilhelma Wirtingera. Uczęszczał też na wykłady z teorii muzyki, gdyż w młodości zamierzał zostać śpiewakiem. Doktorat uzyskał 18 lutego 1910 pracą „*Über das Minimum des Integrals* $\int_{s_0}^{s_1} F(x, y, \theta, \kappa) ds$", pisaną pod kierunkiem Eschenicha. Po rocznym pobycie w Getyndze, gdzie pracował pod kierunkiem Hilberta i Weyla, uzyskuje posadę na niemieckiej politechnice w Brnie, gdzie w roku akademickim 1911/1912 jest asystentem prof. Emanuela Czubera, znanego specjalisty z matematyki ubezpieczeniowej, a następnie, w 1913 roku, habilituje się ogromną rozprawą z teorii addytywnych funkcji zbiorów zarówno na uniwersytecie jak i na uniwersytecie technicznym w Wiedniu, by następnie zostać docentem na TU w Wiedniu. W 1919 zostaje profesorem nadzwyczajnym na uniwersytecie w Hamburgu, a w 1922 otrzymuje powołanie na profesurę zwyczajną uniwersytetu w Greifswaldzie. W 1925 roku przenosi się do Erlangen, a w 1928 przybywa do Wrocławia, obejmując stanowisko po Adolfie Kneserze, który przeszedł na emeryturę. I w tym wypadku mamy dokumenty w sprawie powołania Radona, z których wynika, że wydział na pierwszym miejscu na liście kandydatów postawił Emila Artina z uniwersytetu w Hamburgu, jednego z twórców nowoczesnej algebry, na drugim miejscu znalazł się Helmut Hasse z Marburga, specjalista algebraicznej teorii liczb, a dopiero na trzecim miejscu znajdujemy Radona, zresztą *ex aequo* z algebraikiem Bartelem van der Waerdenem.

W czerwcu 1929 roku otrzymał Radon zaproszenie na uniwersytet lipski, ale odmówił. Wydaje się, że miał nawet ochotę na przeprowadzkę, ale warunki mu nie odpowiadały, gdyż w zachowanym liście do dziekana informując o otrzymanym zaproszeniu napisał, że jeszcze nie zna dokładnych warunków tej oferty, ale gdyby ją przyjął, to zachowa wrocławską uczelnię w ciepłej pamięci.

We Wrocławiu pozostaje Radon aż do stycznia 1945. Po rocznym pobycie w Innsbrucku osiada w 1947 r. w Wiedniu, gdzie pozostaje aż do śmierci 25 maja 1956 r. Na uniwersytecie wiedeńskim pełnił funkcję dziekana, a w 1954 r. był jego rektorem.

W 1953 roku wziął udział w VIII Zjeździe Matematyków Polskich w Warszawie, czego dowodem może być karykatura prof. Leona Jeśmanowicza, na której stoją z jednej strony Kořinek, Picone, Radon i Rényi, a z drugiej Ważewski, Steinhaus i Knaster.

Specjalnością Radona była teoria miary. W swej rozprawie habilitacyjnej [Rd1] zbudował teorię całki, opartej na dowolnej mierze borelowskiej w R^n, co dało w szczególności uogólnienie całki Stieltjesa na przypadek dowolnego wymiaru, a także dało przedstawienie ograniczonych operatorów liniowych na przestrzeni funkcji ciągłych w postaci całki Stieltjesa. Praca Radona nasunęła Fréchetowi [Fr] pomysł zdefiniowania miary abstrakcyjnej w σ-algebrze podzbiorow dowolnego zbioru. Jak pisze Heinz Bauer w swych komentarzach do dzieł Radona [Rd3], był to początek abstrakcyjnej teorii miary. W [Rd1] znajdujemy też pierwowzór *twierdzenia Radona-Nikodyma*, mówiącego w swej najprostszej postaci, że jeśli μ, ν są miarami na przestrzeni X, a μ jest absolutnie ciągła względem ν, to istnieje funkcja f taka, że

$$\mu(A) = \int_X f \, d\nu.$$

Radon udowodnił to dla miar w R^n, a Otton Nikodym [Ni] przeniósł wynik Radona na ogólny przypadek.

Miary występujące u Radona przyjmują dowolne wartości rzeczywiste, są przeliczalnie addytywne oraz absolutnie addytywne, tj. jeśli $A = \bigcup_{i=1}^N E_i$, to $\sum_{i=1}^N |\mu(E_i)| < c$, przy czym c zależy wyłącznie od A.

W trudno dostępnej pracy [Rd2] podał sposób rekonstrukcji funkcji $f : R^3 \longrightarrow R$, gdy znane są jej całki wzdłuż każdej prostej (*transformata Radona*). Ten czysto teoretyczny wynik legł u podstaw tomografii komputerowej, za którą dwaj amerykańscy uczeni, A.H.Cormack i G.N.Houndfield, otrzymali w 1970 roku nagrodę Nobla.

6. Byli jeszcze dwaj inni wybitni uczeni we Wrocławiu, a mianowicie Constantin Carathéodory (1873–1950), jeden z twórców nowoczesnego rachunku wariacyjnego, i Jakob Nielsen, uczeń Dehna, specjalista teorii grup („*Każda skończenie generowalna podgrupa grupy wolnej jest wolna*" (1921);

później Schreier usunął założenie skończonej generowalności), ale ich pobyt tu trwał bardzo krótko, Carathéodory, który przybył w 1910 r., już w 1913 r. został profesorem zwyczajnym w Getyndze, a Nielsen był we Wrocławiu jedynie przez jeden rok, gdyż w wyniku plebiscytu północna część Szlezwiku, skąd pochodził Nielsen, przypadła Danii, a wówczas Nielsen, otrzymawszy duńskie obywatelstwo przeniósł się do Kopenhagi.

Inni matematycy wrocławscy tamtej epoki odbiegali swym poziomem od czwórki, wymienionej wyżej, aczkolwiek i oni uzyskiwali nieraz ważne rezultaty. Wspomniany już uprzednio Adolf Kneser (1862–1930), po habilitacji we Wrocławiu został profesorem w Dorpacie, by w 1905 r. wrócić do Wrocławia Zajmował się teorią równań całkowych i rachunkiem wariacyjnym i był autorem znanych podręczników tych dziedzin ([Kn1], [Kn2]). Jego syn, Helmut Kneser był później profesorem matematyki w Greifswaldzie i Tybindze, współzałożycielem Instytutu w Oberwolfach, a wnuk, Martin Kneser, jest znanym algebraikiem, emerytowanym profesorem uniwersytetu w Getyndze.

Inny matematyk wrocławski, Guido Hoheisel, jako pierwszy udowodnił w 1930 roku ([Ho]) istnienie liczby $c < 1$ o tej własności, że dla dostatecznie dużych liczb N w przedziale $[N, N + N^c]$ znajduje się przynajmniej jedna liczba pierwsza. Od dawna przypuszcza się, że można przyjąć $c = 1/2$, co oznaczałoby, że między dwoma kolejnymi, dostatecznie dużymi kwadratami leży przynajmniej jedna liczba pierwsza. Wynik Hoheisela, to $c = 1 - 1/33000$, co jest dość dalekie od $1/2$, ale dalsze badania liczbę tę zmniejszyły i rekord na dzień dzisiejszy, to $c = 107/200 = 0.535$, uzyskany w 1996 roku przez R. C. Bakera i G. Harmana [BH].

Bibliografia

[Be] B. C. Berndt, *Hans Rademacher*, Acta Arith., **61**, 1992, 209–225.

[BH] R. C. Baker, G. Harman, *The difference between consecutive primes*, Proc. London Math. Soc., (3), **72**, 1996, 261–280.

[Da] J. W. Dawson, Jr., *Max Dehn, Kurt Gödel, and the Trans-Siberian Escape Route*, Notices AMS, **49**, 2002, 1068–1075.

[De1] M. Dehn, *Papers on Group Theory and Topology*, Springer 1987.

[De2] M. Dehn, *Über unendliche diskontinuierliche Gruppen*, Math. Ann., **71**, 1011, 116–144.

[Du] R. Duda, *Trzeci problem milenijny: hipoteza Poincarégo*, Wiadom. Mat., **38**, 2002, 63–90.

[Fr] M. Fréchet, *Sur l'intégrale d'une fonctionelle étendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Math. France, **43**, 1915, 249–267.

[Gr] E. Grosswald, *An orthonormal system and its Lebesgue constants*, Lecture Notes in Math., **899**, 2–9, Springer 1981.

[Ho] G. Hoheisel, *Primzahlprobleme in der Analysis*, SBer. Preuß. Akad. Wiss., Berlin, 1930, 580–588.

[Kn1] A. Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, 1900.

[Kn2] A. Kneser, *Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik*, 1911.

[Ni] O. Nikodym, *Sur une généralisation des intégrales de M.J.Radon*, Fund. Math., **15**, 1930, 131–179.

[Pa] C. D. Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math., (2) **66**, 1957, 1-26.

[Ra1] H. Rademacher, *Collected Papers*, Massachussets – London 1074.

[Ra2] H. Rademacher, *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen*, Math. Ann., **87**, 1922, 112–138.

[Ra3] H. Rademacher, *Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie*, Abh. Math. Sem. Hamburg, **3**, 1923, 12–30.

[Ra4] H. Rademacher, *Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper, I. Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper; II. Über die Darstellung von Körperzahlen als Summe von Primzahlen im imaginär-quadratischen Zahlkörper*. Abh. Math. Sem. Hamburg, **3**, 1924, 109–163; 331–378.

[Ra5] H. Rademacher, *Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper III. Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper*, Math. Zeitschr., **27**, 321–426.

[Ra6] H. Rademacher, *On the partition function* $p(n)$, Proc. London Math. Soc., (2) **43**, 1937, 241–254.

[Rd1] J. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, SBer. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl., **122**, 1913, 1–144.

[Rd2] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längst gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig, **69**, 1917, 262–267.

[Rd3] J. Radon, *Gesammelte Abhandlungen*, Birkhäuser 1987.

[St1] E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, J. reine angew. Math., **143**, 1914, 128–175.

[St2] E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körper*, J. reine angew. Math., **137**, 167–309.

[St3] E. Steinitz, H. Rademacher, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie*, Springer 1934.

[Wa] J. L. Walsh, *A closed set of normal orthogonal functions*, American J. Math., **55**, 1923, 5–24.