

**Tomasz Janusz TELESZEWSKI**

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl

## **Symulacja przepływów laminarnych metodą elementów brzegowych w przewodach prostoosiowych z pojedynczym wypełnieniem**

### 1 Wstęp

W wielu zagadnieniach cieplno-przepływowych wykorzystywane są przewody prostoliniowe z pojedynczym wypełnieniem [1, 2, 3]. Przykładem wykorzystania przewodów prostoosiowych z pojedynczym wypełnieniem są wymienniki ciepła [4, 5]. W pracy przedstawiono algorytm metody elementów brzegowych (MEB) wyznaczania parametrów laminarnego, izotermicznego przepływu w przewodach prostoosiowych z pojedynczym wypełnieniem. Podstawowymi liczbami kryterialnymi opisującymi przepływy laminarne są: liczba Poiseuille'a, współczynnik Coriolisa i współczynnik Boussinesqa. Wielkości te dla przewodów o przekrojach różnych od kołowego można wyznaczyć numerycznie lub eksperymentalnie.

Liczbę Poiseuille'a  $Po$  definiuje się jako iloczyn współczynnika tarcia  $\lambda$  i liczby Reynoldsa  $Re$  [6]:

$$Po = \lambda \frac{Re}{4}, \quad \text{gdzie: } Re = \frac{uL}{\nu}, \quad (1)$$

przy czym:  $\nu$  jest współczynnikiem kinematycznym lepkości cieczy, natomiast  $L = 4A/D$  oznacza charakterystyczny wymiar geometryczny przepływu (definiowany jako iloraz pola przepływu  $A$  w przekroju poprzecznym przewodu i długości obwodu styku cieczy ze ścianką przewodu  $D$ ).

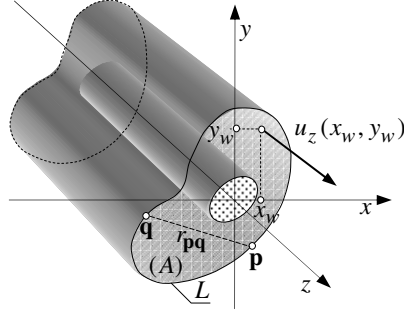
Współczynnik korekcyjny energii kinetycznej strugi (współczynnik Coriolisa) opisuje się zależnością [7]:

$$\beta = \frac{M_{rz.}}{M_{sr}} = \frac{1}{u_{sr}^2 A} \iint_A u^2 dA, \quad (2)$$

natomiast współczynnik korekcyjny pędu strugi (współczynnik Boussinesqa) przyjmuje formę [8]:

$$\alpha = \frac{E_{rz.}}{E_{sr}} = \frac{1}{u_{sr}^3 A} \iint_A u^3 dA, \quad (3)$$

gdzie  $u_{sr}$  oznacza średnią prędkość cieczy w przewodzie o powierzchni przekroju poprzecznego  $A$  wyznaczoną z zależności:  $u_{sr} = Q/A$ , przy czym  $Q$  oznacza masowe natężenie przepływu przez przewód.



Rys. 1. Szkic obrazujący przepływ w przewodzie prostoosiowym o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego z pojedynczym wypełnieniem

Fig. 1. Sketch to exemplify unidirectional flow through straight-axis doubly connected duct of arbitrary cross-section shape

Składowe prędkości  $u_x$ ,  $u_y$  w przepływie przez przewody prostoosiowe o stałym przekroju poprzecznym wzdłuż przewodu (rys.1) są równe zero, natomiast składową wzdłużną prędkości przepływu opisuje równanie:

$$\nabla^2 u_z = \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{\mu} \Delta P_z \quad ; \quad \Delta P_z = \frac{\partial p}{\partial z} = const \quad , \quad (4)$$

gdzie:  $\partial p / \partial z$  jest gradientem ciśnienia cieczy wzdłuż osi przewodu, natomiast  $\mu$  oznacza współczynnik lepkości dynamicznej cieczy.

## 2 Wyznaczenie laminarnego przepływu cieczy lepkiej w przewodzie prostoosiowym metodą elementów brzegowych

Całkując równanie (4) w polu przekroju poprzecznego (A) i sprowadzając zagadnienie do zagadnienia brzegowego przy wykorzystaniu warunku określającego prędkość cieczy lepkiej na ściance przewodu jako równą zero ( $u(\mathbf{p})|_{\mathbf{p} \in L} = 0$ ), otrzymuje się całkowe równanie brzegowe względem  $u_z^*(\mathbf{q}) = \partial u_z(\mathbf{q}) / \partial n_{\mathbf{q}}$ :

$$\chi(\mathbf{p}) u_z^*(\mathbf{p}) + \int_L u_z^*(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = \frac{\Delta P_z}{\mu} \iint_A G(\mathbf{p}, \mathbf{w}) dA_{\mathbf{w}} \quad , \quad (5)$$

gdzie  $\mathbf{p}(x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}})$  i  $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$  są odpowiednio punktem ustalonym i punktem bieżącym całkowania na linii brzegowej L, punkty  $\mathbf{w}(x_{\mathbf{w}}, y_{\mathbf{w}})$  są punktami wewnętrznymi obszaru A, a funkcje  $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  i  $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  są rozwiązaniami podstawowymi [9,10]:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right) \quad \text{gdzie} \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = \sqrt{(\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2 + (\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2} \quad , \quad (5a)$$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{y\mathbf{q}} + \delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{x\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}, \quad (5b)$$

przy czym  $\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (x_{\mathbf{p}} - x_{\mathbf{q}})$ ;  $\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (y_{\mathbf{p}} - y_{\mathbf{q}})$  oraz  $\mathbf{n}_{\mathbf{q}} = [n_{x\mathbf{q}}, n_{y\mathbf{q}}] = \left[ \frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}, \frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}} \right]$ ,

jest wektorem normalnym do granicy ( $L$ ) w punkcie  $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$ . Z uwagi na osobliwość funkcji w punkcie  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$  całka po prawej stronie w równaniu (5) jest rozumiana w sensie wartości głównej Cauchy'ego, natomiast współczynnik  $\chi(\mathbf{p})$  przy wydzielonej wartości  $u_z^*(\mathbf{p})$  w punkcie osobliwym na gładkiej części brzegu ( $L$ ) jest równy  $1/2$ .

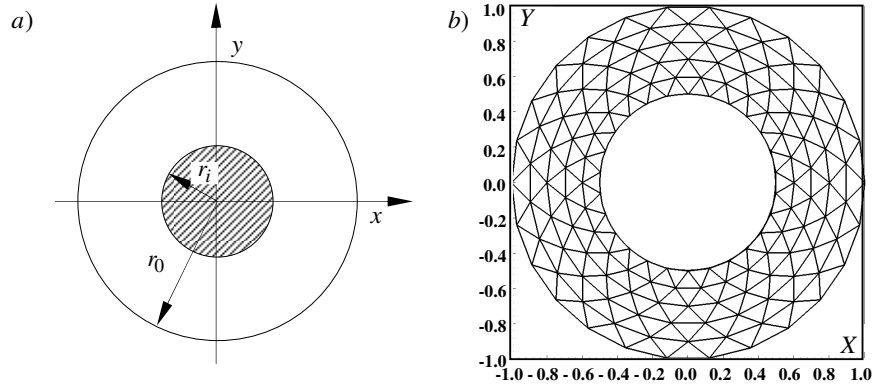
Po wyznaczeniu gradientu  $u_z^*(\mathbf{q}) = \partial u_z(\mathbf{q}) / \partial n_{\mathbf{q}}$  na brzegu  $L$  prędkość w polu przekroju poprzecznego przewodu  $A$  w punktach ( $\mathbf{v} \in A$ ) wyznacza się ze związku całkowego:

$$u_z(\mathbf{v}) = \int_L u_z^*(\mathbf{q}) G(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \frac{\Delta P_z}{\mu} \iint_A G(\mathbf{v}, \mathbf{w}) dA_{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{q} \in L; \mathbf{v}, \mathbf{w} \in A \quad (6)$$

Objęściowy strumień przepływu  $Q$  przez przewód otrzymuje się przez dyskretne scałkowanie funkcji  $u_z(\mathbf{v})$  w polu przekroju  $A$ .

### 3 Wyznaczenie współczynnika wielkości skalarnych w przepływie laminarnym przez przewody prostoosiowe z pojedynczym wypełnieniem. Weryfikacja metody

Weryfikacje algorytmu MEB przeprowadzono w oparciu o znane wartości liczby Poiseuille'a, współczynnika Coriolisa i Boussinesqa dla zagadnienia przepływu laminarnego w przewodzie o przekroju okręgu z okrągłym wypełnieniem (Rys. 2a). Obliczenia zostały wykonane dla brzegu złożonego z 4000 liniowych elementów. W celu wyznaczenia wielkości skalarnych przyjęto siatkę o gęstości 42025 trójkątnych elementów. Przykładowa siatka, składająca się z 260 trójkątnych elementów, została wykreślona na rysunku 2b. Obliczenia wykonano dla różnych stosunków promieni  $r_i/r_o$  (Rys. 2a). W tabeli 1 przedstawiono rezultat weryfikacji wielkości skalarnych. Maksymalny błąd liczby Poiseuille'a wyznaczony jako różnica liczby Poiseuille'a z rozwiązania analitycznego [11] i rozwiązania dyskretnego odniesiona do liczby Poiseuille'a rozwiązania teoretycznego nie przekracza wartości 0.12%, natomiast w przypadku współczynnika Coriolisa [12] i współczynnika Boussinesqa [12] błąd ten nie przekroczył wartości odpowiednio 0.07% i 0.03%.



Rys. 2. Szkic obrazujący zagadnienia brzegowe w przepływach przez przewód o przekroju kołowym z okrągłym wypełnieniem: a) oznaczenia, b) przykładowa siatka

Fig. 2. Sketch to consideration of boundary conditions for a concentric circular annular duct flow: a) diagram, b) mesh

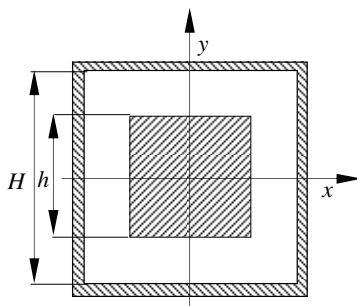
Tab. 1. Liczba Poiseuille'a, współczynniki Coriolisa i Boussinesqa - błąd rozwiązania MEB

Tab. 1. Poiseuille number Coriolis and Boussinesq coefficients - error analysis obtained by BEM

		Rozw. teoretyczne	Rozw. num. MEB	Błąd met. MEB
-	$r_i/r_o$	fRe [11]	fRe <sub>BEM</sub>	$\delta fRe_{BEM}$
1	0,20	23,088	23,086	0,008
2	0,40	23,678	23,681	-0,013
3	0,50	23,813	23,819	-0,024
4	0,60	23,897	23,908	-0,044
5	0,80	23,980	24,007	-0,114
-	$r_i/r_o$	$\alpha$ [12]	$\alpha_{BEM}$	$\delta\alpha_{BEM}$
1	0,20	1,594	1,594	0,025
2	0,40	1,561	1,560	0,038
3	0,50	-	1,553	-
4	0,60	1,549	1,548	0,050
5	0,80	1,544	1,543	0,069
-	$r_i/r_o$	$\beta$ [12]	$\beta_{BEM}$	$\delta\beta_{BEM}$
1	0,20	1,217	1,217	0,025
2	0,40	1,206	1,206	0,017
3	0,50	-	1,203	-
4	0,60	1,202	1,202	0,021
5	0,80	1,200	1,200	0,005

#### 4 Przykłady obliczeniowe

Przykładem zastosowania metody elementów brzegowych, dla którego nie jest znane rozwiązanie analityczne, jest przepływ przez przewód o przekroju kwadratowym z kwadratowym wypełnieniem. Obliczenia wykonano dla różnych stosunków wysokości boków wewnętrznego wypełnienia  $h$  do wysokości zewnętrznego kwadratu  $H$  (rys.3). Do symulacji przyjęto przepływ wody o współczynniku lepkości dynamicznej wynoszącym  $0.0005494 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  ( $50^\circ\text{C}$ ) i gęstości  $988.04 \text{ kg/m}^3$ .



Rys. 3. Szkic obrazujący zagadnienia w przepływie przez przewód o przekroju kwadratowym z kwadratowym wypełnieniem

Fig. 3. Sketch to consideration of flow through square duct with central square core

Rezultatem przeprowadzonych symulacji jest wzór opisujący zależność liczby Poiseuille'a oraz współczynników Coriolisa i Boussinesqa w funkcji stosunku wysokości ścianek kanału i wypełnienia  $w=h/H$ :

$$Po(w); \alpha(w); \beta(w) = \frac{a + bw + cw^2}{1 + dw + ew^2 + fw^3}, \quad w = \frac{h}{H}, \quad (7)$$

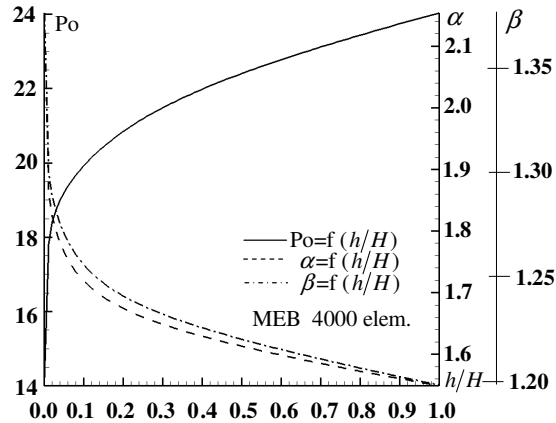
gdzie współczynniki kształtu funkcji zostały przedstawione w tabeli 2.

Tab. 2. Współczynniki kształtu funkcji  $Po(w)$ ,  $\alpha(w)$  i  $\beta(w)$  [wg wzoru (7)]

Tab. 2. Coefficients of the Eq. (15) to determination values of  $Po(w)$ ,  $\alpha(w)$  and  $\beta(w)$  [according formula (7)]

Parametr	Współczynniki funkcji					
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
Po	14,23	5782,84	28583,92	309,62	1222,99	-103,36
$\alpha$	2,154	1296,17	18748,66	695,81	11434,55	813,57
$\beta$	1,378	937,287	12849,25	719,57	10450,60	315,20

Na rysunku 4 wykreślono zależność liczby kryterialnej Poiseuille'a  $Po(w)$  oraz współczynników Boussinesqa  $\alpha(w)$ , Coriolisa  $\beta(w)$  (według wzoru 7) w zależności od parametru  $w=h/H$ .



Rys. 4. Zależność wartości  $Po$ ,  $\alpha(w)$ ,  $\beta(w)$  w przepływie przez przewód o przekroju kwadratowym z pojedynczym kwadratowym wypełnieniem w funkcji parametru  $w=h/H$

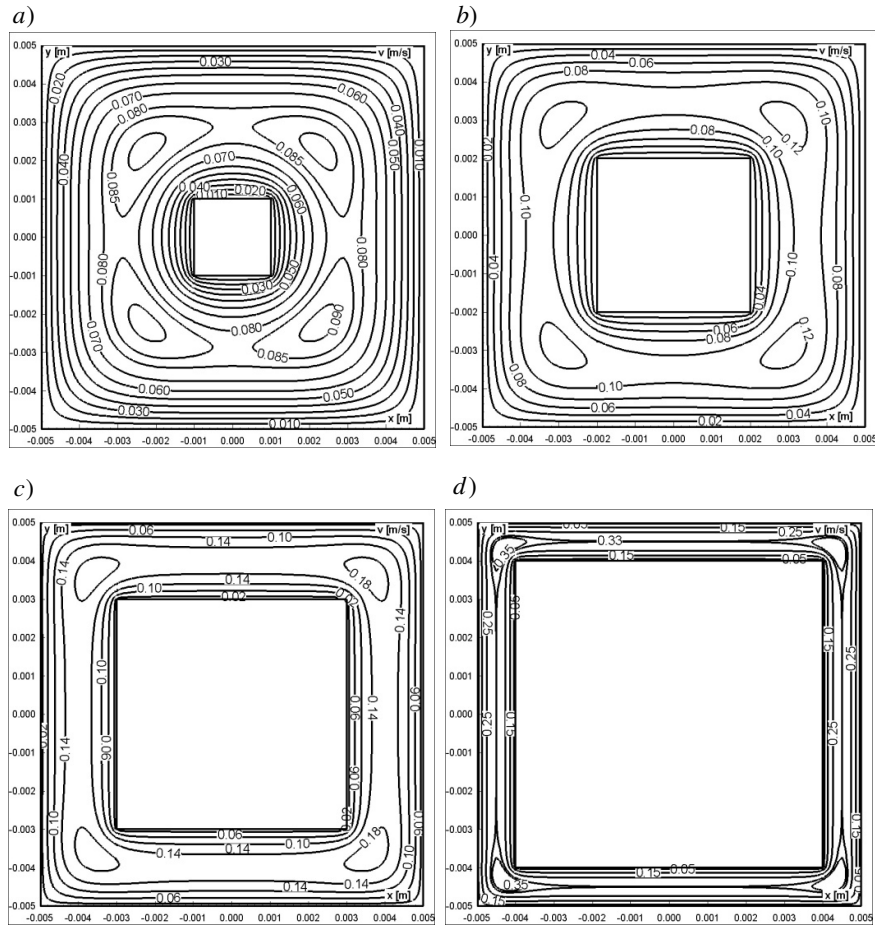
Fig. 4. Variation of values  $Po$ ,  $\alpha(w)$ ,  $\beta(w)$  for the flow trough square duct with central square core for variable coefficient  $w=h/H$

Na rysunkach 5a-b wykreślono przykładowe izotachy w przepływie laminarnym przez przewód kwadratowy z wypełnieniem kwadratowym wyznaczone metodą elementów brzegowych ( $Re=800$ ) dla następujących parametrów  $h/H$ : 0.2; 0.4; 0.6, 0.8.

## 5 Podsumowanie

Znajomość wielkości opisujących przepływy w przewodach prostoosiowych z wypełnieniem jest szczególnie przydatna do optymalizacji pracy wymienników ciepła. Najprostszy wymiennik ciepła jest to tzw. „rura w rurze”, czyli przewód kołowy z okrągłym wypełnieniem. Dobierając odpowiedni kształt przekroju poprzecznego przewodu prostoosiowego, można zoptymalizować parametry pracy wymiennika. Główną zaletą prezentowanego algorytmu wykorzystującego metodę elementów brzegowych do wyznaczania przepływu i jego charakterystyk jest eliminacja generowania pracochłonnych i czasochłonnych przestrzennych siatek dyskretyzacji, obszaru rozwiązania, które są stosowane w powszechnie używanych programach obliczeniowych opartych na metodach siatkowych, takich jak metoda elementów skończonych, czy metoda objętości skończonych. Niewielki błąd metody elementów brzegowych sprawia, że jest to użyteczne narzędzie do wyznaczania przepływu dla dowolnych kształtów przekroju poprzecznego przewodów z wypełnieniem.

*Symulacja przepływów laminarnych metodą elementów brzegowych  
w przewodach prostoosiowych z pojedynczym wypełnieniem*



Rys. 5. Pole prędkości w przepływie laminarnym przez przewód kwadratowy z wypełnieniem kwadratowym wyznaczone metodą elementów brzegowych: a)  $h/H=0.2$ , b)  $h/H=0.4$ , c)  $h/H=0.6$ , d)  $h/H=0.8$

Fig. 5. Velocity field of the flow trough square duct with central square core for variable coefficient  $w=h/H$   
a)  $h/H=0.2$ , b)  $h/H=0.4$ , c)  $h/H=0.6$ , d)  $h/H=0.8$

## Literatura

1. Solanki S.C., Saini J.S., Gupta C.P.: Flow through doubly connected ducts, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 7, Issue 4, s. 301-306, 1986
2. Solanki S.C., Prakash S., Saini J.S., Gupta C.P.: Forced convection heat transfer in doubly connected ducts, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 8, Issue 2, s. 107-110, 1987
3. Monteiro E. R., Macêdo E. N., Quaresma J. N.N., Cotta R. M.: Laminar flow and convective heat transfer of non-Newtonian fluids in doubly connected ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 53, s. 2434-2448, 2010
4. Kakac S., Liu H.: *Heat exchangers selection, rating, and thermal design*. Second Edition, CRC Press, 2002.
5. Yadav A.S.: Effect of Half Length Twisted-Tape Turbulators on Heat Transfer and Pressure Drop Characteristics inside a Double Pipe U-Bend Heat Exchanger, *JJMIE*, vol. 3, no. 1, s. 17- 22., 2009
6. White F.M.: *Viscous Fluid Flow*, Third Edition, McGraw-Hill, 2005
7. Czetwertyński E., Utrysko B.: *Hydraulika i hydromechanika*, Warszawa 1969
8. Nalluri C., Marriott M.: *Civil Engineering Hydraulics*, 5th Edition, John Wiley and Sons, 2009
9. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, NY 1984
10. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, *Acta Mechanica et Automatica*, s. 124-132, vol.5, nr 3, 2011
11. Shah R.K. , London A.L.: Laminar flow forced convection heat transfer and flow friction in straight and curved ducts – a summary of analytical solutions, *TR*, no. 75 Dep. Mech. Eng., Stanford University, Stanford, California, 1971
12. Lundgren T.S., Sparrow E.M., Starr J.B.: Pressure drop due to the entrance region in ducts of arbitrary cross section, *J. Basic Eng.*, Vol. 86, s. 620-626, 1964

## Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm MEB symulacji przepływów laminarnych w przewodach prostoosiowych z pojedynczym wypełnieniem niezależnie od kształtu przekroju przewodu i wypełnienia. Weryfikacja metody elementów brzegowych została dokonana poprzez porównanie rezultatów obliczeń MEB ze znanym rozwiązaniem analitycznym w przewodzie o kołowym obrysie przekroju poprzecznego z okrągłym centralnym wypełnieniem. W publikacji przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń symulacji przepływu laminarnego w przewodzie o przekroju kwadratowym z centralnym kwadratowym wypełnieniem oraz wyznaczono liczbę Poiseuille'a i współczynniki Coriolisa i Boussinesq'a w zależności od proporcji wymiarów przewodu i wypełnienia.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów brzegowych, przewody prostoosiowe z wypełnieniem, liczba Poiseuille'a, współczynnik Coriolisa i Boussinesq'a



## **Implementation of the Boundary Element Method for the solution unidirectional laminar flow through straight doubly connected ducts**

### Summary

The double connected ducts are an important geometry for many fluid flow and heat transfer devices. The aim of the paper is proposal to solve unidirectional laminar flow through straight doubly connected ducts using Boundary Element Method (BEM). The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests in known solution the laminar flow through straight concentric annular duct. A numerical examples are presented flow through straight for square duct with central square core. Computer program was written in Fortran programming language.

**Keywords:** boundary element method, doubly connected ducts, Poiseuille number Coriolis and Boussinesq coefficients

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014 Katedry Ciepłownictwa, Ogrzewnictwa i Wentylacji Politechniki Białostockiej i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

