

Mirosław WCIŚLIK*
Tomasz KWAŚNIEWSKI*

ANALIZA OBWODOWA SPRĘŻEŃ MAGNETYCZNYCH MIĘDZY ZWOJEM KOŁOWYM I CEWKĄ SPIRALNĄ

W pracy rozważane są sprzężenia magnetyczne występujące między kołowymi zwojami przewodzącymi ułożonymi koncentrycznie na płaszczyźnie a pojedynczym zwojem wzbudzającym tworzącymi układ osiowo symetryczny. Zwoje kołowe wykonane są z materiału, który jest przewodnikiem i nie jest ferromagnetyczny. Korzystając z prawa Biota-Savarta wyprowadzono zależności opisujące rozkład pola magnetycznego wokół pojedynczego zwoju, uwzględniając promień przewodu zwoju. Uzyskano oryginalną zależność, z której można wyznaczyć indukcyjność pojedynczego zwoju i indukcyjności wzajemne względem innych zwojów. Wykorzystując otrzymane wzory wyznaczono macierz indukcyjności poszczególnych zwojów modelu cewki spiralnej. Indukcyjność cewki spiralnej została wyznaczona na podstawie macierzy indukcyjności przyjętego modelu cewki. W oparciu o prawa Biota-Savarta wyznaczono indukcyjność własną zwoju wymuszającego oraz wektor indukcyjności wzajemnych między zwojem wymuszającym i poszczególnymi zwojami modelu cewki spiralnej.

SŁOWA KLUCZOWE: cewka spiralna, sprzężenia magnetyczna, równania obwodowe

1. WPROWADZENIE

Problemy oddziaływań elektromagnetycznych są najczęściej modelowane z wykorzystaniem metody elementów skończonych. Zakładane jest najczęściej wymuszenie prądowe o określonej częstotliwości i rozważany jest stan quasistatyczny. Problem pojawia się, gdy zastosowane jest niesinusoidalne źródło zasilania. W takim przypadku należy stosować podejście obwodowe. Podstawą tego podejścia jest wyznaczenie indukcyjności własnych i wzajemnych oddziaływujących elementów. W tym celu można wykorzystać prawo Biota-Savarta i na jego podstawie wyznaczać natężenie pola magnetycznego [1]. Wymiarowość problemu zmniejsza się dla elementów symetrycznych w układzie. W pracy [2] opracowano metodę wyznaczania rozkładu pola magnetycznego wokół zwoju kołowego i na tej podstawie określono indukcyjność cewki cylindrycznej jednowarstwowej. Wartości indukcyjności dla poszczególnych cewek porównano z wynikami uzyskanymi przy użyciu miernika laboratoryjnego.

* Politechnika Świętokrzyska.

Wartości zmierzone indukcyjności cewek były zgodne z wartościami obliczonymi z dokładnością do 1%. Bardzo dobrą dokładność uzyskano zarówno dla cewek krótkich jak i długich. Znacznie trudniejsze jest natomiast wyznaczenie sprzężeń magnetycznych występujących pomiędzy elementem wzbudzającym a wzbudzonym. Dotyczy to przypadku, gdy prądy w płycie wzbudzane są przez prądy płynące w uzwojeniu wzbudzającym. W pracy [3] badano oddziaływania zwoju i płyty kołowej, zamodelowanej jako zbiór koncentrycznych zwojów kołowych sprzężonych magnetycznie. Po odpowiednim przekształceniu model ten można wykorzystać do badań z płaską cewką spiralną. Zależności otrzymane w [3] wykorzystano do wyznaczenia indukcyjności własnych i wzajemnych koncentrycznych zwojów. Założono, że zwoje wykonane są z materiału, który jest przewodnikiem i nie jest ferromagnetykiem.

2. NATĘŻENIE POLA MAGNETYCZNEGO I INDUKCYJNOŚĆ POJEDYNCZEGO ZWOJU

Podstawą wyznaczenia indukcyjność cewki cylindrycznej lub płaskiej cewki spiralnej jest znajomość wartości natężenie pola magnetycznego w dowolnym punkcie. W oparciu o prawa Biota-Savarta wyznacza się natężenie pola magnetycznego w otoczeniu przewodu kołowego. Z prawa Biota-Savarta wyznacza się składowe natężenia pola magnetycznego w punkcie o współrzędnych cylindrycznych (r, φ, z) .

$$H_z(r, Rp, R, i) = \frac{i}{4 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \frac{R \cdot (R - r \cdot \cos(\varphi))}{(r^2 + Rp^2 + R^2 - 2 \cdot r \cdot R \cdot \cos(\varphi))^{3/2}} d\varphi \quad (1)$$

$$H_r(r, z, R, i) = \frac{i}{4 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cdot R \cdot \cos(\varphi)}{(r^2 + z^2 + R^2 - 2 \cdot r \cdot R \cdot \cos(\varphi))^{3/2}} d\varphi \quad (2)$$

gdzie: i – natężenie prądu w zwoju, r – promień wodzący, R – promień zwoju, Rp – promień przewodu zwoju, z – odległość od przewodu zwoju.

Aby uprościć wyznaczanie natężenia pola magnetycznego wprowadzono zmienne bezwymiarowe w postaci:

$$\frac{r}{R} = \eta, \quad \frac{z}{R} = \zeta, \quad h = \frac{H}{H_{odn}}, \quad H_{odn} = \frac{i}{R} \quad (3)$$

$$H(r, z, R, i) = H_{odn}(i, R) \cdot h(\eta, \zeta) = \frac{i}{R} \cdot h(\eta, \zeta) \quad (4)$$

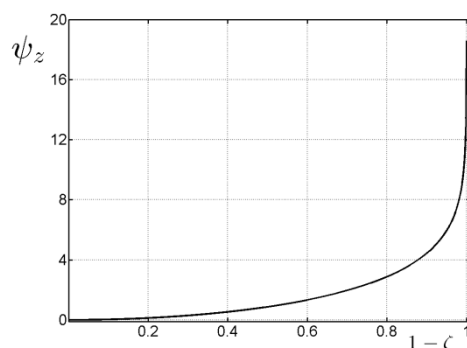
Zastosowanie zmiennych bezwymiarowych powoduje zmniejszenie ilości zmiennych oraz upraszcza zapis aproksymowanej składowej (1) do postaci :

$$h_z(\eta, \zeta) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \eta \cdot \cos(\varphi)}{(1 + \eta^2 + \zeta^2 - 2 \cdot \eta \cdot \cos(\varphi))^{3/2}} d\varphi \quad (5)$$

Uwzględniając asymptoty pionowe i poziome wykresów natężenia pola magnetycznego przedstawione w pracy [2] trudno jest aproksymować tak złożone funkcje. Dlatego postanowiono aproksymować składową strumienia magnetycznego ψ_z (6) w postaci:

$$\psi_z(\zeta) = \int_0^{1-\zeta} h_z(\eta, \zeta) \cdot \eta \, d\eta \quad \text{dla} \quad \zeta = \frac{z}{R}, \quad z = Rp \quad (6)$$

Na rysunku 1 przedstawiono składową strumienia magnetycznego ψ_z uzyskaną dla ilorazu promienia przewodu zwoju do promienia zwoju równemu $1e-4$.



Rys. 1. Składowa strumienia pola magnetycznego: ψ_z

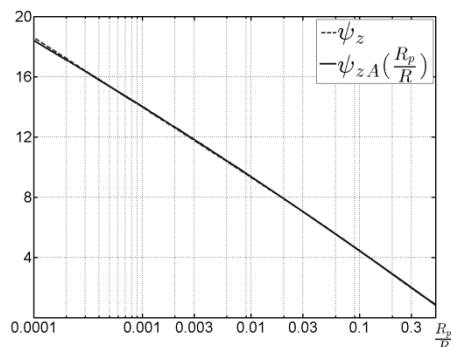
Stosując aproksymację składowej strumienia magnetycznego ψ_z uzyskano, zależności analityczne o błędzie względnym mniejszym od 1%. Utworzono funkcję $\psi_{zA}(Rp/R)$ (7), która aproksymuje składową strumienia magnetycznego ψ_z dla argumentów Rp/R . Strumień magnetyczny ψ_z jest funkcją promienia przewodu zwoju i promienia cewki.

$$\psi_{zA}\left(\frac{Rp}{R}\right) = -0.025 \left(\ln\left(\frac{Rp}{R}\right) \right)^2 - 2.31 \cdot \ln\left(\frac{Rp}{R}\right) - 0.76 \quad (7)$$

Na rysunku 2 przedstawiono wykres zależności (7), która aproksymuje składową strumienia magnetycznego ψ_z , a błąd względny w przedziale $1e-4 < Rp/R < 0.5$ jest mniejszy od 1%. Stosując (7) można wyznaczyć indukcyjność pojedynczego zwoju z dokładnością ok. 1% z następującej zależności:

$$L = \frac{\mu_o \cdot R}{2} \cdot \psi_{zA}\left(\frac{Rp}{R}\right) \quad (8)$$

gdzie: μ_o – przenikalność magnetyczna.



Rys. 2. Składowa strumienia pola magnetycznego Ψ_z wraz z funkcją aproksymującą $\psi_{zA}\left(\frac{Rp}{R}\right)$

Indukcyjność pojedynczego zwoju można również wyznaczyć numerycznie wykorzystując składową natężenia pola magnetycznego H_z (1) w następujący sposób:

$$L = \frac{\mu_0}{2 \cdot i} \int_0^R H_z(r, Rp, R, i) r dr \quad (9)$$

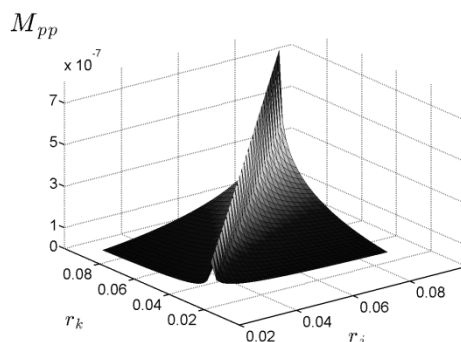
3. INDUKCYJNOŚCI WŁASNE I WZAJEMNE ZWOJÓW CEWKI SPIRALNEJ

Cewkę spiralną zamodelowano jako zbiór koncentrycznych zwojów wykonanych na płycie drukowanej. W rozpatrywanym układzie promienie zwojów cewki spiralnej zmieniają się w zakresie od $r_k = 0.0255\text{m}$ do $r_k = 0.0855\text{m}$. Przekrój poprzeczny zwoju jest prostokątem o wymiarach 1 mm na 0.035 mm. Zwoje umieszczono z odstępem 1mm. Cewkę spiralną otrzymuje się poprzez odpowiednie połączenie poszczególnych zwojów za pomocą złącz, które umożliwiają ich zwieranie lub połączenie w szereg (cewka spiralna). Korzystając z zależności (10) można wyznaczyć macierz indukcyjności wzajemnych oddziaływujących ze sobą zwojów cewki spiralnej.

$$\mathbf{M}_{pp}(r_j, r_k, Rp) \cdot i = \frac{\mu_0}{2} \int_0^{r_j} H_z(r, Rp, r_k, i) r dr \quad (10)$$

gdzie: r_j, r_k – promienie kolejnych zwojów cewki spiralnej dla $k = 1..32$.

Elementy macierzy indukcyjności zwojów cewki spiralnej wyznaczono na podstawie wartości strumieni magnetycznych własnych i skojarzonych z innymi zwojami płyty.



Rys. 3. Wykres powierzchniowy elementów macierzy indukcyjności zwojów

Indukcyjność wzajemna między zwojami j -tym i k -tym, liczona na wysokości promienia przewodu zwoju R_p cewki spiralnej określona jest zależnością (10). Tak wyznaczana macierz indukcyjności jest macierzą symetryczną. Wykres powierzchniowy elementów tej macierzy przedstawiono na rys. 3. Wykorzystanie zależności (10) do wyznaczenia indukcyjności własnych i wzajemnych cewki spiralnej jest czasochłonne i wymaga wydajnej maszyny obliczeniowej. Dla cewek o niewielkiej ilości zwojów nie jest to duży problem obliczeniowy, natomiast gdy mamy do czynienia z bardzo cienką płytą i dużym promieniem płyty, wtedy obliczenia numeryczne są nieefektywne czasowo. W celu eliminacji problemu długotrwałych obliczeń numerycznych można wykorzystać zależność (7) stosując odpowiednie parametry wejściowe. Przy pomocy zależności analitycznych (11), (12) można wyznaczyć indukcyjności własne i wzajemne cewki spiralnej o dowolnych parametrach fizycznych tej cewki.

$$L_k \left(\frac{R_p}{r_k} \right) i = \frac{\mu_o r_k}{2} \left(-0.025 \left(\ln \left(\frac{R_p}{r_k} \right) \right)^2 - 2.31 \cdot \ln \left(\frac{R_p}{r_k} \right) - 0.76 \right) \quad (11)$$

$$M_{jk} \left(r_j, r_k \right) i = \frac{\mu_o r_j}{2} \left(-0.025 \left(\ln \left(\frac{r_j - r_k}{r_j} \right) \right)^2 - 2.31 \cdot \ln \left(\frac{r_j - r_k}{r_j} \right) - 0.76 \right) \quad (12)$$

Przedstawione wzory są oryginalne w obliczaniu indukcyjności cewki spiralnej z następującej zależności:

$$L_{sc} = \sum_{k=1}^n L_k + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n M_{jk} \quad (13)$$

Wykorzystując równanie (13) wyznacza się indukcyjność własną cewek spiralnych z dokładnością do 3%. We wzorze (14) [5] wartość indukcyjności otrzymujemy w [H] a wielkości wejściowe podawane są w [m].

$$L = 31.33\mu_0 \frac{n^2 \cdot a^2}{8a + 11c} \quad (14)$$

gdzie: n – liczba zwojów, a – średni promień cewki, c – szerokość zwojów cewki (różnica pomiędzy promieniem zewnętrznym cewki a promieniem wewnętrznym).

Tabela 1. Wartości indukcyjności cewek spiralnych zmierzonych i obliczonych

Liczba zwojów	32	40
Promień przewodu [mm]	0.1	0.45
Promień wewnętrzny [mm]	25.5	40
Promień zewnętrzny [mm]	88.5	76
Indukcyjność zmierzona [μH]	118	246
Indukcyjności wg wzoru (14) [μH]	113	246
Błąd wzoru (14) [%]	4.23	0
Indukcyjności wg wzoru (13) [μH]	116	240
Błąd wzoru (13) [%]	1.69	2.4

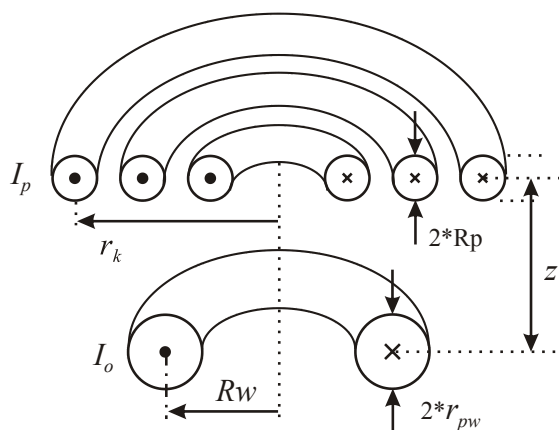
4. ODDZIAŁYWANIA MAGNETYCZNE POMIĘDZY ZWOJEM WZBUDZAJĄCYM A CEWKĄ SPIRALNĄ

Rozważane są zwoje przewodzące o rezystywności ρ i przekroju kołowym przewodu w kształcie koła o promieniu zwoju r_k . Pojedynczy zwoj z prądem wymuszającym o promieniu R_w oraz promieniu przewodu r_{pw} indukuje prądy w zwojach. Zwoj wymuszający ustawiony jest koncentrycznie i osiowo do wzbudzanych zwoi cewki spiralnej. Z symetrii układu wynika, że prąd płynący w zwojach posiada tylko składową kątową. Przewody te są wzajemnie sprzężone magnetycznie między sobą oraz ze zwojem cewki wymuszającej. Na rys. 4 przedstawiono model rozważanego układu zwoj wymuszający – zwoje przewodzące. Wykorzystując koncentryczność płaszczyzn cewki spiralnej i zwoju wzbudzającego oraz stosując składową natężenia pola magnetycznego H_z uzyskano zależności na indukcyjności wzajemne w badanym układzie (12).

Na podstawie równania (15) można określić strumień magnetyczny wytworzony przez zwoj wzbudzający, przenikający przez kolejne zwoje cewki spiralnej o promieniu r_k . Wyrażenie dla konfiguracji odwrotnej cewki jest identyczne.

$$\mathbf{M}_{po}(r_k, R_w, z)i = \mathbf{M}_{op}(r_k, R_w, z)i = \frac{\mu_0}{2} \int_0^{r_k} H_z(r, z, R_w, i) r dr \quad (15)$$

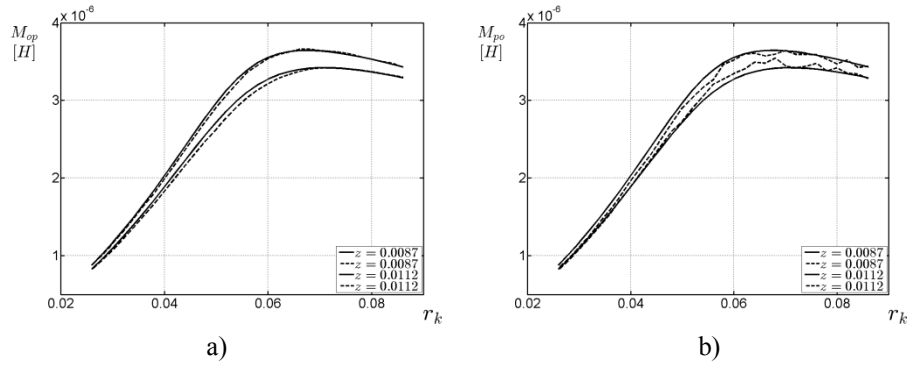
gdzie: r_k – promienie kolejnych zwojów cewki spiralnej dla $k = 1..32$, R_w – promień zwoju wymuszającego, z – odległość pomiędzy zwojem wymuszającym a cewką spiralną.



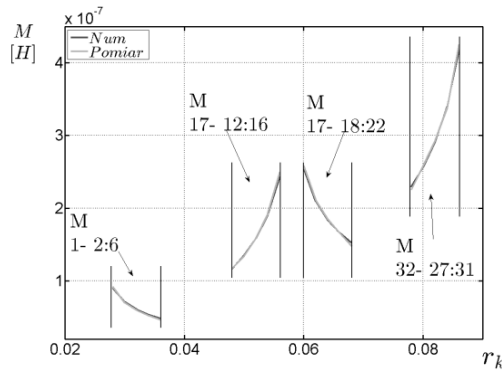
Rys. 4. Układ zwoj wymuszający – przewodzące zwoje

Zgodnie ze wzorem Neumanna indukcyjności M_{op} i M_{po} są sobie równe. Do identyfikacji parametrów oddziaływań zwoj-cewka i odwrotnie zbudowano układ pomiarowy. Napięcia oraz prądy były dyskretyzowane i rejestrowane na oscyloskopie. Wartości te analizowano wykorzystując MATLAB. Stosując metodę najmniejszych kwadratów (MNK) obliczano parametry opisujące cewkę. W celu zmniejszenia wpływu zakłóceń zastosowano filtr Savitzky'ego-Golaya. Na rys. 5 przedstawiono indukcyjności wzajemne między zwojem wymuszającym a k -tym zwojem cewki spiralnej. Zostały porównane wyniki numeryczne z wynikami otrzymanymi podczas pomiarów. Obliczenia zostały wykonane dla zwoju wymuszającego $R_w = 0.055$ m oraz odległości pomiędzy zwojem wymuszającym a zwojami płyty $z = [0.0087, 0.0112]$ m. Doprowadzając napięcie niesinusoidalne do poszczególnych zacisków tworzących odseparowane zwoje cewki spiralnej, zebrano charakterystykę sprzężenia magnetycznego pomiędzy zwojami modelującymi cewkę spiralną a pojedynczym zwojem. Uzyskane wielkości indukcyjności wzajemnej są identyczne jak na rysunku 5a.

Występują jedynie niewielkie błędy spowodowane małą wartością pola elektromagnetycznego wytworzonego przez element wzbudzający. Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że maksymalna wartość indukcyjności wzajemnych przesunięta jest poza promień zwoju wzbudzającego. Wynika to z rozkładu przestrzennego strumienia elektromagnetycznego wokół zwoju wymuszającego. Analizowano trzy przypadki: źródło zasilania doprowadzono oddzielnie do (1, 17, 32) zwoju i badano sprzężenie magnetyczne sąsiednich pięciu zwojów. Wykorzystując MNK wyznaczono indukcyjność wzajemną i porównano z wynikami obliczonymi numerycznie wykorzystując zależność (15) – rys. 6. Indukcyjności wzajemne obliczona i zmierzona są bliskie sobie z dokładnością do ok. 1%.



Rys. 5. Indukcyjność wzajemna między: a – cewką wymuszającą a kolejnymi zwojami modelu cewki spiralnej, b – od zwojów modelu cewki spiralnej do zwoju wymuszającego, wyznaczona z zależności (15) oraz wartości zmierzone



Rys. 6. Indukcyjność wzajemna między zwojami modelu cewki spiralnej

5. RÓWNANIA UKŁADU

Dla modelu układu przedstawionym na rysunku 4 obowiązują równania w postaci:

$$L_o \cdot \dot{I}_o + \mathbf{M}_{op} \cdot \dot{\mathbf{I}}_p + R_o \cdot I_o = U_o(t) \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{po} \cdot \dot{I}_o + L_{pp} \cdot \dot{\mathbf{I}}_p + \mathbf{R}_{pp} \cdot \mathbf{I}_p = U_p(t)$$

gdzie: $U_o(t)$, $U_p(t)$ napięcie zasilające zwoj wymuszający i napięcie na cewce spiralnej, I_o , \mathbf{I}_p prąd w zwoju wymuszającym i wektor prądów cewki spiralnej, L_o , L_{pp} , \mathbf{M}_{po} , \mathbf{M}_{op} , indukcyjności własne i wzajemne oraz R_o , \mathbf{R}_{pp} rezystancje zwoju wzbudzającego i cewki spiralnej.

Dla modelu cewki spiralnej:

$$U_{sp} = \mathbf{1}_h \cdot \mathbf{U}_p(t), \quad \mathbf{I}_p(t) = \mathbf{1}_v \cdot I_{sp} \quad (17)$$

gdzie $\mathbf{1}_h$ i $\mathbf{1}_v$ oznaczają wektory jedynekowe odpowiednio wierszowy i kolumnowy.

Mnożąc lewostronnie drugie równanie (16) przez $\mathbf{1}_h$ oraz stosując podstawienie (17) układu równań (16) można zapisać jako:

$$L_o \cdot \dot{I}_o + \mathbf{M}_{op} \cdot \mathbf{1}_v \cdot \dot{I}_{sp} + R_o \cdot I_o = U_o(t) \quad (18)$$

$$\mathbf{1}_h \cdot \mathbf{M}_{po} \cdot \dot{I}_o + \mathbf{1}_h \cdot \mathbf{L}_{pp} \cdot \mathbf{1}_v \cdot \dot{I}_{sp} + \mathbf{1}_h \cdot \mathbf{R}_{pp} \cdot \mathbf{1}_v \cdot I_{sp} = U_{sp}(t)$$

Po przekształceniu układu równań (18) można zapisać jako:

$$L_o \cdot \dot{I}_o + M_{osp} \cdot \dot{I}_{sp} + R_o \cdot I_o = U_o(t) \quad (19)$$

$$M_{spo} \cdot \dot{I}_o + L_{sp} \cdot \dot{I}_{sp} + R_{sp} \cdot I_{sp} = U_{sp}(t)$$

gdzie oznaczano odpowiednio: $U_o(t)$, $U_{sp}(t)$ napięcie zasilające zwoj wymuszający i napięcie na cewce spiralnej, I_o , I_{sp} prąd w zwoju wymuszającym i wektor prądów cewki spiralnej, L_o , L_{sp} , M_{spo} , M_{osp} , indukcyjności własne i wzajemne oraz R_o , R_{sp} rezystancje odpowiednio zwoju wzbudzającego i cewki spiralnej.

Dla określenia odpowiedzi układu na wymuszenie nieliniowe można użyć przekształcenia Laplace'a. Przy zerowych warunkach początkowych oraz obciążeniu cewki spiralnej rezystancją $R_m = 0.55 \Omega$ z równania (19) uzyskuje się:

$$I_o(s) = \frac{sL_{sp} + R_{sp} + R_m}{(sL_o + R_o)(sL_{sp} + R_{sp} + R_m) - s^2 M_{osp} M_{spo}} U_o(s) \quad (20)$$

$$I_{sp}(s) = \frac{-sM_{spo}}{(sL_o + R_o)(sL_{sp} + R_{sp} + R_m) - s^2 M_{osp} M_{spo}} U_o(s) \quad (21)$$

Stosując MNK do układu równań (19) można zidentyfikować wszystkie parametry indukcyjności własnych i wzajemnych pomiędzy identyfikowanymi cewkami oraz rezystancje poszczególnych cewek. Zakładając, że indukcyjności wzajemne są sobie równe układ równań (19) można zapisać w postaci macierzowej. Do obliczeń numerycznych wykonujemy konkatenację wzdłuż kolumn wielkości wejściowych, co umożliwia wyznaczenie szukanych wielkości opisujących sprzężenie magnetyczne rozpatrywanego układu:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_o & \dot{I}_{sp} & 0 & I_o & 0 \\ 0 & \dot{I}_o & \dot{I}_{sp} & 0 & I_{sp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_o & M_{osp} & L_{sp} & R_o & R_{sp} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} U_o \\ U_{sp} \end{bmatrix} \quad (22)$$

6. UWAGI KOŃCOWE

Cewkę spiralną można modelować jako zbiór szeregowo połączonych zwojów kołowych, ale trzeba uwzględnić promień przewodu tworzącego zwoj. Zgodność indukcyjności obliczonych i zmierzonych świadczy o poprawności przyjętego modelu i daje podstawy do analizy bardziej złożonych układów np.: zwoj – płyta przewodząca. Modele pojedynczego zwoju i cewki spiralnej umożliwiają utworzenie modelu cewki walcowej wielowarstwowej.

LITERATURA

- [1] H. Rawa.: *Elektryczność i magnetyzm w technice.*, PWN, Warszawa 1994.
- [2] M. Wciślik, T. Kwaśniewski.: *Model cylindrycznej cewki jednowarstwowej.*, Przegląd Elektrotechniczny, 11-2006.
- [3] M. Wciślik, T. Kwaśniewski.: *Rozkład prądów indukowanych w płycie przewodzącej.*, Przegląd Elektrotechniczny, 03-2007.
- [4] D. J. Griffiths.: *Introduction to electrodynamics.*, Prentice Hall, New Jersey, 1999
- [5] Marc T. Thompson.: *Inductance Calculation Techniques – Part II: Approximations and Handbook Methods Power Control and Intelligent Motion.*, December 1999, website <http://www.pcim.com>

CIRCUIT ANALYSIS THE MAGNETIC COUPLINGS OCCURRING BETWEEN THE CIRCULAR TURN AND THE SPIRAL COIL

The paper deals with the magnetic coupling between circular conductive turns arranged concentrically on the plane and the single forcing turn organized in axially symmetric configuration. Circular turns are made of a material which is a conductor and is not ferromagnetic. Using the Biot-Savart law equations describing the distribution of the magnetic field around a single turn, taking into account the radius of the wire turn were derived. Original relationship was obtained. It allows to calculate inductance of single turn and mutual inductance relative to the other turns. From these formulas inductance matrix of individual coils of the spiral coil model was built. Spiral coil inductance has been described on the basis of the establish coil model inductance matrix. Based on the Biot-Savart law self-inductance of the coil forcing and mutual inductance vector between the forcing turn and the individual turns of spiral coil model were described.