

Inez Kamińska, Aleksander Szwed

Modelowanie konsystentnego termodynamicznie materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniem

JEL: L91 DOI: 10.24136/atest.2018.429

Data zgłoszenia: 19.11.2018 Data akceptacji: 15.12.2018

W artykule omówiono sposób formułowania relacji konstytutywnych materiałów sprężysto-plastycznych z uwzględnieniem uszkodzenia na podstawie dwóch potencjałów: potencjału energetycznego i potencjału dyssypacji. Uzyskany model materiałowy jest termodynamicznie spójny, o ile przyjęte funkcje spełniają określone warunki. Przedstawiona metoda została zilustrowana przykładem jednowymiarowym oraz przykładem relacji trójwymiarowych z wykorzystaniem warunku plastyczności Beltramiiego-Michella.

Słowa kluczowe: uszkodzenie, plastyczność, relacje konstytutywne, termodynamika, funkcja dyssypacji, energia swobodna Helmholtza, naprężenia uogólnione.

Wstęp

W sformułowaniu klasycznym, modele materiałowe uwzględniające, poza sprężystością, plastyczność i degradację, wymagają podania relacji konstytutywnej łączącej tensory naprężenia i odkształcenia, warunków plastyczności i uszkodzenia oraz praw ewolucji zmiennych wewnętrznych, związanych ze zjawiskami nieodwracalnymi. Prawo płynięcia, szczególnie w przypadku gruntów, może nie być stowarzyszone z warunkiem plastyczności. Aby zaproponowany model był konsystentny termodynamicznie, muszą być spełnione pierwsza i druga zasada termodynamiki w postaci nierówności Clausiusa-Duhema. Tę nierówność sprawdza się *a posteriori*. Podejście przedstawione w pracy usuwa tę niedogodność. Opiera się ono na podaniu dwóch potencjałów, z których poprzez różniczkowanie i użycie transformacji Legendre'a uzyskuje się wszystkie związki potrzebne do opisu własności materiału. Metoda pozwala na uwzględnienie niestowarzyszonych praw ewolucji. Ogólne sformułowanie znajduje się w [1,2,3,7,10,12], jednak celem niniejszej pracy jest uszczegółowienie tych relacji dla materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniem opisanym co najwyżej tensorem drugiego rzędu (rozdział 1) i zilustrowanie omawianej teorii przykładem - w rozdziale 2 przedstawiono model opisujący sprzężone sprężystość, plastyczność oraz izotropowe uszkodzenie z warunkiem uszkodzenia/plastyczności Beltramiiego-Michella.

1. Model zgodnego termodynamicznie materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniem

Podstawowym założeniem termodynamiki jest, że stan materiału jest opisany w pełni przez stan odkształcenia, temperaturę i kinematyczne zmienne wewnętrzne, stosowne w rozpatrywanym procesie. W pracy uwzględniono sprężystość, plastyczność i uszkodzenie w zakresie małych deformacji. Odpowiednimi zmiennymi opisującymi materiał są tensor całkowitego odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$, tensor odkształcenia plastycznego $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ oraz tensor uszkodzenia \mathbf{M} , który jest tensorem rzędu drugiego. Zakłada się, że temperatura nie zmienia się w trakcie procesu obciążania.

Poprawność modelu materiałowego zdefiniowana jest przez dwa czynniki: jego kompatybilność z danymi doświadczalnymi dla wybranego materiału i zgodność termodynamiczną. Model uznaje

się za konsystentny termodynamicznie, gdy spełnione są pierwsza i druga zasada termodynamiki [7,10].

Aby w pełni opisać zachowanie się materiału, tj. wyznaczyć relację między tensorami naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ i odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$, a także podać wartości składowych zmiennych wewnętrznych ($\boldsymbol{\varepsilon}_p$ oraz \mathbf{M}) w danej chwili trwania procesu obciążenia, przyjmuje się dwa potencjały: potencjał energetyczny oraz potencjał dyssypacji. Na podstawie tych dwóch funkcji wyznacza się wszystkie związki pomiędzy zmiennymi oraz warunek plastyczności/uszkodzenia w sposób opisany poniżej. Poprzez wybór odpowiednich potencjałów zapewnia się termodynamiczną spójność modelu.

1.1. Potencjał energetyczny

Potencjał energetyczny jest jednym z czterech: energia wewnętrzna, energia swobodna Helmholtza, potencjał Gibbsa lub entalpia. Wymienione funkcje mają różne argumenty, ale są ze sobą ściśle powiązane transformacjami Legendre'a [3,10]. W sformułowaniu ogólnym można użyć dowolnego z wymienionych potencjałów. Przyjęcie energii swobodnej Helmholtza umożliwia bezpośrednio uzyskanie składowych tensora naprężenia, gdy dane są składowe stanu odkształcenia, co stanowi udogodnienie przy symulacjach ze sterowaniem przemieszczeniowym. Z drugiej strony, aby uzyskać niektóre z dalszych zależności trzeba odwrócić tę zależność (tj. uzyskać odkształcenie w zależności od naprężenia), co może być dość trudnym zadaniem. Te zależności uzyskuje się bezpośrednio z funkcji Gibbsa [3].

Energia swobodna Helmholtza jest wypukłą funkcją tensorów odkształcenia całkowitego i plastycznego oraz tensora uszkodzenia:

$$F = F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \mathbf{M}), \quad (1)$$

przy czym dla sprężysto-plastyczności i sprężysto-lepkoplastyczności argumentem jest różnica tensorów odkształcenia [7,9], tj:

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \mathbf{M}) = \tilde{F}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p, \mathbf{M}). \quad (2)$$

Energia swobodna Helmholtza powinna być przyjęta tak, aby przy wszystkich argumentach zerowych, zerował się także potencjał. Postać F zależy od rozpatrywanego modelu materiału. W przypadku połączenia sprężysto-plastyczności i uszkodzenia dla materiału izotropowego często używa się ogólnej postaci [6,9]:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \mathbf{M}) = & \frac{1}{2} \left(\tilde{\lambda} \operatorname{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + 2\tilde{\mu} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\eta \operatorname{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + \gamma \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)^2 \right) \operatorname{tr} \mathbf{M} + \\ & + \alpha \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \operatorname{tr}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \mathbf{M}) + \\ & + \chi \operatorname{tr}((\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)^2 \mathbf{M}), \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie tr oznacza operację śladu, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, η , γ , α oraz χ są parametrami materiałowymi, przy czym $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{\mu}$ są stałymi Lamego.

Potencjał Helmholtza służy do wyznaczenia uogólnionych naprężeń, tj.:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_p = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p}, \quad \boldsymbol{\sigma}_M = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}}, \quad (4)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ jest tensorem naprężenia, $\boldsymbol{\sigma}_p$ uogólnionym naprężeniem związanym z tensorem odkształcenia plastycznego, $\boldsymbol{\sigma}_M$ a jest uogólnionym naprężeniem związanym z tensorem uszkodzenia.

Przykładowo, dla modelu jednowymiarowego sprężystości, plastyczności i uszkodzenia często przyjmuje się [2]:

$$F(\varepsilon, \varepsilon_p, d) = \frac{1}{2} E(1-d)(\varepsilon - \varepsilon_p)^2, \quad (5)$$

gdzie E jest modułem Younga, a d skalarnym parametrem uszkodzenia [4,7,8]. Na podstawie (4) uogólnione naprężenia są więc równe:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = E(1-d)(\varepsilon - \varepsilon_p), \\ \sigma_p &= -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_p} = E(1-d)(\varepsilon - \varepsilon_p) = \sigma, \\ \sigma_d &= -\frac{\partial F}{\partial d} = \frac{1}{2} E(\varepsilon - \varepsilon_p)^2 = \frac{\sigma^2}{2E(1-d)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Jak widać, w tym przypadku uogólnione naprężenia związane z plastycznością są naprężeniami nominalnymi, a uogólnione naprężenia związane z parametrem uszkodzenia są energią sprężystości materiału nieuszkodzonego (przy $d = 0$).

1.2. Potencjał dyssypacji

Jak wzmiankowano, model materiałowy uznaje się za konsystentny termodynamicznie, gdy spełnione są pierwsza i druga zasada termodynamiki w postaci nierówności Clausiusa-Duhema [7,10]:

$$D = D_M + D_T \geq 0, \quad (7)$$

gdzie D jest całkowitą dyssypacją, D_M dyssypacją mechaniczną, a D_T dyssypacją termiczną. W rozpatrywanym zagadnieniu $D_T = 0$ (brak zmian pola temperatury) oraz $D = D_M$. Dyssypacja i prędkość zmiany energii wewnętrznej są ze sobą związane pierwszym prawem termodynamiki [10], a więc także energia swobodna Helmholtza jest związana z potencjałem D . Ta zależność ma postać:

$$D = \boldsymbol{\sigma}_p \square \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \boldsymbol{\sigma}_M \square \dot{\mathbf{M}}, \quad (8)$$

gdzie \square jest iloczynem skalarnym tensorów. Jak widać, potencjał dyssypacji związany jest z uogólnionymi naprężeniami wynikającymi z potencjału Helmholtza. Zakłada się, że jest on funkcją prędkości zmiany zmiennych wewnętrznych $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ i $\dot{\mathbf{M}}$ oraz tych zmiennych, które występują w potencjale energetycznym, w tym przypadku ε , ε_p i \mathbf{M} :

$$D = D_M = D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \dot{\mathbf{M}}, \varepsilon, \varepsilon_p, \mathbf{M}). \quad (9)$$

Podstawowym warunkiem narzuconym na potencjał dyssypacji jest jego nieujemność (7), wynikająca z zasad termodynamiki. Ponadto potencjał dyssypacji powinien być funkcją wypukłą [5] i, w przypadku materiałów niewrażliwych na prędkość obciążenia, jednorodną stopnia pierwszego względem $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ i $\dot{\mathbf{M}}$, tj.:

$$\beta D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \dot{\mathbf{M}}, \varepsilon, \varepsilon_p, \mathbf{M}) = D(\beta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \beta \dot{\mathbf{M}}, \varepsilon, \varepsilon_p, \mathbf{M}), \quad (10)$$

gdzie β jest dowolnym skalarem.

Poprzez różniczkowanie potencjału dyssypacji po odpowiednich zmiennych otrzymuje się uogólnione naprężenia dyssypatywne, tj.:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p = \frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M = \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{M}}}. \quad (11)$$

Przy spełnieniu powyższych warunków, dla funkcji dyssypacji istnieje transformacja Legendre'a Y opisana równaniem:

$$D(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \dot{\mathbf{M}}) + \lambda Y(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p \square \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M \square \dot{\mathbf{M}}, \quad (12)$$

gdzie λ jest skalarnym mnożnikiem. Pokazana transformacja jest osobiłwa [1,3] i wynika z niej:

$$Y(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M) = 0, \quad (13)$$

co jest szukanym warunkiem plastyczności/uszkodzenia. Jednocześnie prawa ewolucji zmiennych wewnętrznych mają postać:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M}. \quad (14)$$

Postać (13) warunku plastyczności/uszkodzenia uzyskuje się poprzez wyrugowanie z (11) prędkości zmiany parametrów wewnętrznych w sposób pokazany poniżej.

Przykładowo: dla modelu jednowymiarowego można przyjąć następującą postać dyssypacji [2]:

$$D(\varepsilon, \varepsilon_p, d, \dot{\varepsilon}_p, \dot{d}) = \sigma_0 \sqrt{\left(R_p \dot{\varepsilon}_p \right)^2 + \left(R_d \frac{\varepsilon - \varepsilon_p}{2(1-d)} \dot{d} \right)^2}, \quad (15)$$

gdzie σ_0 jest granicą plastyczności/uszkodzenia, a R_p i R_d są współczynnikami bezwymiarowymi. Funkcja jest wypukła i jednorodna względem prędkości $\dot{\varepsilon}_p$ oraz \dot{d} . W takim razie uogólnione naprężenia dyssypatywne są równe:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_p &= \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_p} = \frac{\sigma_0 R_p^2 \dot{\varepsilon}_p}{\sqrt{\left(R_p \dot{\varepsilon}_p \right)^2 + \left(R_d \frac{\varepsilon - \varepsilon_p}{2(1-d)} \dot{d} \right)^2}}, \\ \bar{\sigma}_d &= \frac{\partial D}{\partial \dot{d}} = \frac{\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_p}{2(1-d)} \right)^2 \sigma_0 R_d^2 \dot{d}}{\sqrt{\left(R_p \dot{\varepsilon}_p \right)^2 + \left(R_d \frac{\varepsilon - \varepsilon_p}{2(1-d)} \dot{d} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Zależności (16) po podniesieniu stronami do kwadratu, wykonaniu odpowiednich dzieleni i sumowaniu dają warunek uszkodzenia/plastyczności wyrażony w uogólnionych naprężeniach dyssypatywnych:

$$Y(\bar{\sigma}_p, \bar{\sigma}_d) = \left(\frac{\bar{\sigma}_p}{\sigma_0 R_p} \right)^2 + \left(\frac{2(1-d)\bar{\sigma}_d}{\sigma_0 R_d (\varepsilon - \varepsilon_p)} \right)^2 - 1 = 0. \quad (17)$$

Należy zauważyć, że funkcję Y można dowolnie mnożyć przez skalar, np. σ_0 , i w dalszym ciągu spełnia ona zarówno (12), jak i (13). Ze wzoru (17) wynika, że w tym przypadku wartość funkcji jest bezwymiarowa, co z kolei ze względu na (12) powoduje, że λ ma jednostkę [Pa/s] (jest to jednocześnie jednostka dyssypacji). Prawa ewolucji zmiennych wewnętrznych zgodnie z (14) mają postacie:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_p &= \lambda \frac{\partial Y}{\partial \bar{\sigma}_p} = \lambda \frac{2\bar{\sigma}_p}{(\sigma_0 R_p)^2}, \\ \dot{d} &= \lambda \frac{\partial Y}{\partial \bar{\sigma}_d} = \lambda \left(\frac{2\sqrt{2}(1-d)}{\sigma_0 R_d (\varepsilon - \varepsilon_p)} \right)^2 \bar{\sigma}_d. \end{aligned} \quad (18)$$

Aby znaleźć wartość mnożnika λ , warunek (17) należy uzupełnić o warunek zgodności Pragera (warunek rozwoju plastyczności i degradacji) postaci:

$$\dot{Y}(\bar{\sigma}_p, \bar{\sigma}_d) = 0. \quad (19)$$

1.3. Hipoteza ortogonalności i warunek plastyczności/uszkodzenia zapisany w uogólnionych naprężeniach

Uzyskano warunek plastyczności/uszkodzenia w uogólnionych naprężeniach dyssypatywnych, jednak celem jest otrzymanie zależności wyrażonych w uogólnionych naprężeniach uzyskanych na podstawie energii Helmholtza. Jak powiedziano, dyssypacja i energia swobodna są ze sobą powiązane prawami termodynamiki poprzez zależność (8). Jednocześnie założono, że potencjał dyssypacji jest funkcją jednorodną prędkości zmiany zmiennych wewnętrznych (10), a więc na podstawie twierdzenia Eulera i definicji (11) uzyskuje się:

$$D = \frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{M}}} \dot{\mathbf{M}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M \dot{\mathbf{M}}. \quad (20)$$

Porównując (8) i (20) otrzymuje się:

$$(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p - \boldsymbol{\sigma}_p) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_M - \boldsymbol{\sigma}_M) \dot{\mathbf{M}} = 0. \quad (21)$$

Równość (21) jest prawdziwa zawsze, jeśli uogólnione naprężenia dyssypatywne są równe naprężeniom uogólnionym, tj. gdy:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p = \boldsymbol{\sigma}_p \text{ oraz } \bar{\boldsymbol{\sigma}}_M = \boldsymbol{\sigma}_M. \quad (22)$$

Zależności (22) nazywa się hipotezą ortogonalności (hipotezą Zieglera [3,13]). Jest ona słabsza niż (21), tzn. nie wyczerpuje wszystkich możliwych rozwiązań tego równania, jednak jest odpowiednia dla pewnej klasy materiałów [3].

Ze względu na (22) warunek plastyczności/uszkodzenia (13) można zapisać jako

$$Y(\boldsymbol{\sigma}_p, \boldsymbol{\sigma}_M) = 0, \quad (23)$$

a odpowiednie prawa ewolucji to:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}_p}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}_M}. \quad (24)$$

Kontynuując przykład jednowymiarowy z poprzednich podrozdziałów, na podstawie wzorów (6) oraz (17) warunek plastyczności/uszkodzenia można zapisać jako:

$$Y(\sigma_p, \sigma_d) = \left(\frac{\bar{\sigma}_p}{\sigma_0 R_p} \right)^2 + \left(\frac{2(1-d)}{\sigma_0 R_d (\varepsilon - \varepsilon_p)} \bar{\sigma}_d \right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{R_d^2} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 - 1 = 0. \quad (25)$$

Z kolei prawa ewolucji (18) oraz warunek zgodności (19) przy założeniu $R_p^{-2} + R_d^{-2} = 1$ sprowadzają się do postaci:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \lambda \frac{2\sigma}{(\sigma_0 R_p)^2}, \quad \dot{d} = \lambda \frac{4E(1-d)^2}{(\sigma_0 R_d)^2}, \quad (26)$$

$$(1-d)(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \dot{d}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p).$$

Poprzez dzielenie (26)₁ oraz (26)₂ eliminuje się λ :

$$\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}{\dot{d}} = \left(\frac{R_d}{R_p} \right)^2 \frac{\sigma}{2E(1-d)^2}. \quad (27)$$

Aby uzyskać odkształcenie plastyczne i parametr uszkodzenia w funkcji czasu (przy danym naprężeniu) należy scałkować układ równań różniczkowych (26)₃ i (27).

2. Przykład materiału sprężysto-plastycznego z uszkodzeniem przy warunku Beltrami-Michella

W celu zilustrowania procedury znalezienia wartości wszystkich parametrów stanu, założono następującą energię swobodną Helmholtza:

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, d) = (1-d) \left(\frac{1}{2} K \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + G \text{tr}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_p)^2 \right), \quad (28)$$

przy czym \mathbf{e} oraz \mathbf{e}_p są dewiatorami odpowiednio tensora odkształcenia i odkształcenia plastycznego, a K i G to moduł ściśliwości i moduł Kirchhoffa. Przyjęto, że odkształcenie jest izotropowe, tzn. $\mathbf{M} = d \mathbf{I}$, gdzie \mathbf{I} jest tensorem jednostkowym, a d parametrem uszkodzenia.

Postać potencjału dyssypacji określono uogólniając funkcję dla przypadku jednowymiarowego (15), por. także [11]. Przyjęto:

$$D(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, d, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \dot{d}) = \sqrt{R_p^2 (A^2 p^2 + B^2 q^2) + \left(\frac{R_d \dot{d}}{k(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, d)} \right)^2}, \quad (29)$$

przy czym zastosowano oznaczenia:

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \quad q = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p},$$

$$k(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, d) = \frac{\sqrt{\frac{3K^2}{A^2} \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + \frac{4G^2}{B^2} \text{tr}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_p)^2}}{F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, d) (1-d)^2} \quad (30)$$

oraz $A, B > 0$ i $R_p, R_d > 1$ są parametrami materiałowymi i zachodzi:

$$\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{R_d^2} = 1. \quad (31)$$

(29) jest funkcją nieujemną oraz wypukłą [5] i jednorodną względem $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ i \dot{d} . Jak widać występuje sprzężenie plastyczności i degradacji - będą one występowały jednocześnie, każda zmiana parametru uszkodzenia będzie pociągać za sobą zmianę składowych tensora odkształcenia plastycznego i na odwrót.

W dalszych rachunkach pominięto argumenty funkcji ze względu na długość zapisu.

Zgodnie ze wzorem (4) znaleziono uogólnione naprężenia z potencjału energii swobodnej (28):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d) (K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \mathbf{I} + 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_p)),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} = \boldsymbol{\sigma}, \quad (32)$$

$$\sigma_d = - \frac{\partial F}{\partial d} = \frac{1}{2} K \text{tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + G \text{tr}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_p)^2 = \frac{F}{1-d}.$$

Dodatkowo znaleziono relację między śladami tensorów odkształcenia i naprężenia oraz normami ich dewiatorów:

$$\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sqrt{3}(1-d) K \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p),$$

$$r \equiv \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = 2G(1-d) \sqrt{\text{tr}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_p)^2}, \quad (33)$$

gdzie \mathbf{s} jest dewiatorem tensora naprężenia.

Kolejnym krokiem jest pozyskanie relacji opisujących uogólnione naprężenia dyssypatywne (11) na podstawie (29), tj.:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p = \frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} = \frac{R_p^2}{D} \left(\frac{A^2 p}{\sqrt{3}} \mathbf{I} + B^2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right), \quad \bar{\sigma}_d = \frac{\partial D}{\partial \dot{d}} = \frac{R_d^2}{D k^2} \dot{d}. \quad (34)$$

Znalezienie potencjału plastycznego/uszkodzenia wymaga eliminacji prędkości z równań (34). W tym celu dokonuje się pełnego nasunięcia części kulistych i dewiatorowych $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p$:

$$\frac{1}{A^2 R_p^2} \left[\frac{1}{3} (\text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p) \mathbf{I} \right] \left[\frac{1}{3} (\text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p) \mathbf{I} \right] = \frac{R_p^2 A^2 p^2}{D^2},$$

$$\frac{\bar{\mathbf{s}}_p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p}{B^2 R_p^2} = \frac{R_p^2 B^2 q^2}{D^2}, \quad (35)$$

gdzie \bar{s}_p jest dewiatorem $\bar{\sigma}_p$, a następnie podnosi do kwadratu (34)₃ i zapisuje odpowiednią sumę, aby uzyskać warunek plastyczności/uszkodzenia w przestrzeni uogólnionych naprężeń dyssypatywnych:

$$Y = \frac{\left[\frac{1}{3}(\text{tr } \bar{\sigma}_p) \mathbf{I}\right] \left[\frac{1}{3}(\text{tr } \bar{\sigma}_p) \mathbf{I}\right]}{R_p^2 A^2} + \frac{\bar{s}_p \cdot \bar{s}_p}{R_p^2 B^2} + \left(\frac{k \bar{\sigma}_d}{R_d}\right)^2 - 1 = 0. \quad (36)$$

Korzystając z hipotezy ortogonalności (22) oraz związków (33) można otrzymać następujące relacje:

$$\left[\frac{1}{3}(\text{tr } \bar{\sigma}_p) \mathbf{I}\right] \left[\frac{1}{3}(\text{tr } \bar{\sigma}_p) \mathbf{I}\right] = \xi^2, \quad \bar{s}_p \cdot \bar{s}_p = r^2, \quad (37)$$

$$\bar{\sigma}_d^2 = \frac{1}{(1-d)^4} \left(\frac{\xi^2}{6K} + \frac{r^2}{4G} \right),$$

w związku z czym warunek plastyczności/uszkodzenia, po uwzględnieniu (31), przybiera postać:

$$Y = \left(\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{R_d^2} \right) \left(\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{r^2}{B^2} \right) - 1 = \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{r^2}{B^2} - 1 = 0 \quad (38)$$

Prawa ewolucji (24) sprowadzają się do zależności:

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda \frac{1}{R_p^2} \left(\frac{2\xi}{\sqrt{3}A} \mathbf{I} + \frac{2}{B^2} \mathbf{s} \right), \quad \dot{d} = \lambda \frac{1}{R_p^2} \frac{2(1-d)^2}{\frac{\xi^2}{6K} + \frac{r^2}{4G}}. \quad (39)$$

Stałe A i B można wyznaczyć z (38), znając granicę uszkodzenia/plastyczności przy rozciąganiu σ_0 oraz przy czystym ścinaniu σ_v (lub dwie inne dowolnie wybrane granice):

$$A = \frac{\sigma_0 \sigma_v}{\sqrt{3\sigma_v^2 - \sigma_0^2}}, \quad \text{gdzy } \sqrt{3}\sigma_v > \sigma_0 \text{ i } B = \sqrt{2}\sigma_v. \quad (40)$$

Aby zinterpretować parametry R_p oraz R_d przeprowadzono obliczenia numeryczne dla eksperymentu rozciągania jednoosiowego. Przy tensorze naprężenia σ jak poniżej z (32)₁ otrzymuje się składowe $(\varepsilon - \varepsilon_p)$:

$$\sigma \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (41)$$

$$(\varepsilon - \varepsilon_p) \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon - \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_B - \varepsilon_{PB} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_B - \varepsilon_{PB} \end{bmatrix},$$

przy czym:

$$\sigma = (1-d)E(\varepsilon - \varepsilon_p), \quad \varepsilon_B - \varepsilon_{PB} = -\nu(\varepsilon - \varepsilon_p), \quad (42)$$

gdzie ν jest współczynnikiem Poissona. W dalszej części nie analizowano odkształceń bocznych, ponieważ nie są one niezbędne do interpretacji parametrów i można je łatwo wyrazić poprzez odkształcenia w kierunku rozciągania.

Korzystając z (32)_{2,3} uzyskuje się naprężenia uogólnione:

$$\sigma_p = \sigma, \quad \sigma_d = \frac{1}{(1-d)^2} \left(\frac{\xi^2}{6K} + \frac{r^2}{4G} \right). \quad (43)$$

Warunek plastyczności (38) sprowadza się do:

$$Y = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 - 1 = 0, \quad (44)$$

a prawo płynięcia składowej odkształcenia plastycznego w kierunku rozciągania i prawo ewolucji parametru uszkodzenia mają postacie:

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda \frac{2}{R_p^2 \sigma_0}, \quad \dot{d} = \lambda \frac{4E(1-d)^2}{R_d^2 \sigma_0^2}. \quad (45)$$

Dzieląc stronami (45)₁ i (45)₂ oraz wykorzystując warunek zgodności (19) otrzymuje się następujący układ równań różniczkowych z szukanymi funkcjami $\varepsilon_p(t)$ oraz $d(t)$:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_p}{d} = \frac{R_d^2}{R_p^2} \frac{\sigma_0}{2E(1-d)^2}, \quad (46)$$

$$\frac{4E(1-d)(\varepsilon - \varepsilon_p)}{R_d^2 \sigma_0} + \frac{2}{R_p^2} = \frac{2\dot{\varepsilon}}{R_p^2 \dot{\varepsilon}_p}.$$

Niech test będzie sterowany przemieszczeniowo z odkształceniem osiowym opisanym funkcją liniową czasu:

$$\varepsilon(t) = Ht. \quad (47)$$

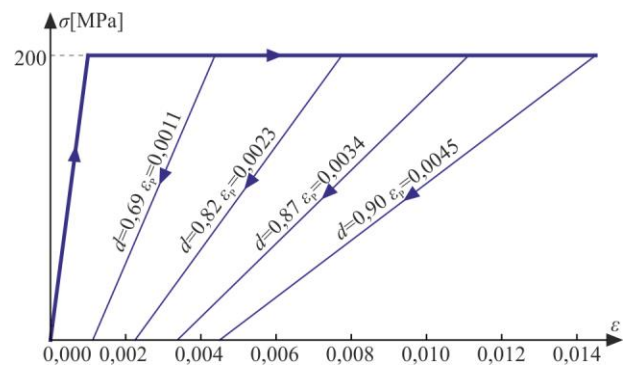
Wtedy rozwiązaniem układu (46) jest:

$$\varepsilon_p(t) = \frac{H R_d^2 \sigma_0}{2E H R_p^2 t_0 + R_d^2 \sigma_0} (t - t_0), \quad (48)$$

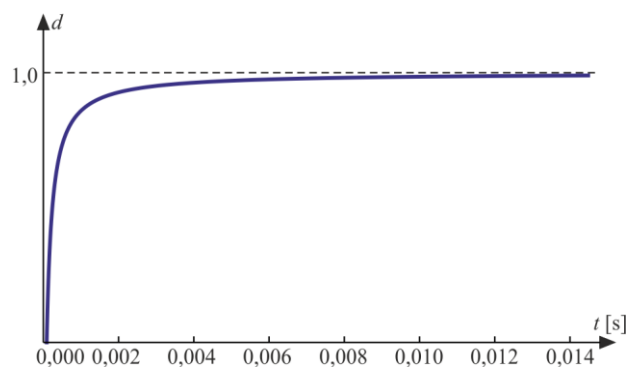
$$d(t) = \frac{2E H R_p^2 (t - t_0)}{2E H R_p^2 t + R_d^2 \sigma_0}, \quad \text{przy } t_0 = \frac{\sigma_0}{EH}.$$

Aby zobrazować wyniki przyjęto wartości: $E = 200\text{GPa}$, $\sigma_0 = 200\text{MPa}$, $H = 1/\text{s}$. Wykresy krzywych $\sigma - \varepsilon$ pokazano dla różnych wartości parametrów R_d i R_p .

Na Rys.1 przedstawiono krzywe sprężystego odciążenia w wybranych chwilach czasu. Pokazują one degradację modułu Younga oraz stopniowy wzrost odkształceń plastycznych. W miarę zwiększania odkształcenia całkowitego ε , odkształcenie plastyczne ε_p rośnie liniowo, por. (48) a parametr uszkodzenia d zwiększa się nieliniowo, dążąc do granicznej wartości 1 (całkowite zniszczenie), por. Rys.2.

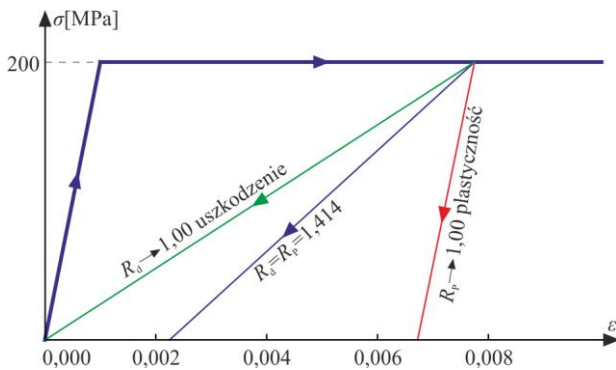


Rys. 1. Krzywa $\sigma - \varepsilon$ przy $R_d = R_p = \sqrt{2}$.

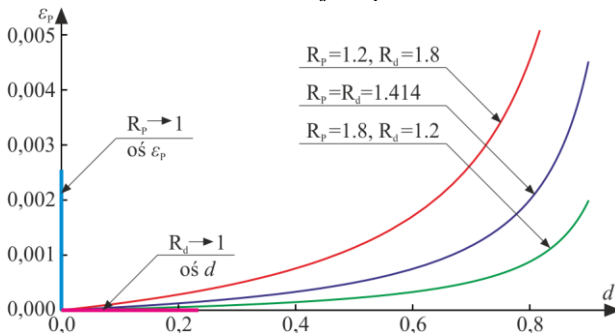


Rys. 2. Rozwój parametru uszkodzenia w procesie obciążania przy $R_d = R_p = \sqrt{2}$.

Parametry R_d i R_p mogą się zmieniać w zakresie $(1, +\infty)$ i są połączone zależnością (31). Jak pokazano na Rys.3 dla $R_d \rightarrow 1$ przestaje dochodzić do uplastycznienia, tj. materiał sprężysty ulega jedynie degradacji widocznej jako zmniejszenie się modułu Younga. W przeciwnym przypadku, tzn. $R_p \rightarrow 1$, nie dochodzi do uszkodzenia. Proste odciążenia są do siebie równoległe. Oznacza to, iż im mniejsze R_d , tym większą rolę w modelu gra degradacja i przeciwnie, im mniejsze R_p , tym większe znaczenie ma plastyczność, por. Rys. 4. Zatem współczynniki R_d i R_p mogą być interpretowane jako wagi wpływu każdej zmiennej wewnętrznej na zmianę własności materiału.



Rys. 3. Krzywa $\sigma-\epsilon$ i różne ścieżki odciążenia przy zmieniających się wartościach parametrów R_d i R_p .



Rys. 4. Rozwój odkształcenia plastycznego w zależności od parametru uszkodzenia przy zmieniających się R_d i R_p .

W przedstawionym rozwiązaniu nie uwzględniono możliwych zmian granicy plastyczności σ_0 . Ewentualne wzmocnienie lub mięknięcie można opisać np. funkcją $\sigma_0(d)$, którą należy wprowadzić do równań (46).

Podsumowanie

W artykule przedstawiono w sposób skrócony podstawy modelowania konstytutywnego materiałów sprężysto-plastycznych z uszkodzeniem opisanym co najwyżej tensorem drugiego rzędu, w zakresie małych deformacji. Celem Autorów nie była wyczerpująca charakterystyka zagadnień teoretycznych, a jedynie wyodrębnienie podstawowych elementów, służących do rozwiązania konkretnych zagadnień. Opis ogólny można znaleźć w podanych pozycjach bibliografii.

Niewątpliwą zaletą przedstawionej metody uzyskania relacji wiążących zmienne kinematyczne i statyczne, jest spełnienie *a priori* zasad termodynamiki poprzez odpowiedni dobór potencjałów. Wykorzystanie potencjałów daje też nadzieję na udowodnienie ogólnych twierdzeń opartych na zasadach ekstremalnych [3]. Oma-

wiany sposób dotyczy dość wielu materiałów, a jego ograniczeniem jest stosowalność hipotezy ortogonalności. W zakresie przedstawionego sformułowania można uzyskać niestowarzyszone prawa płynięcia, co jest istotne szczególnie w modelowaniu gruntów i betonu. Wadą jest mało klarowny sposób uzyskania warunku plastyczności ze względu na osobliwość transformacji Legendre'a.

Bibliografia:

1. Collins I.F., Hously G.T., Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials, Proceedings of Royal Society A 1997, Vol. 453.
2. Einav I., Hously G.T., Nguyen G.D., Coupled damage and plasticity models derived from energy and dissipation potentials, International Journal of Solids and Structures 2007, Vol. 44.
3. Hously G.T., Puzrin A.M., A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials, International Journal of Plasticity 2000, Vol. 16.
4. Kachanov L.M., Introduction to continuum damage mechanics, Springer 1986.
5. Kamińska I., Szwed A., O badaniu wypukłości skalarnej funkcji zależnej od niezmienników walcowych symetrycznego tensora drugiego rzędu, Sprężystość i lepkosprężystość małych odkształceń, Warszawa 2017.
6. Kondo D., Welemene H., Cormery F., Basic concepts and models in continuum damage mechanics, Revue Europeenne de Genie Civil 2007, Vol.11.
7. Lemaitre J., A Course on Damage Mechanics, Springer 1996.
8. Murakami S., Continuum Damage Mechanics, Springer 2012.
9. Murakami S., Kamiya K., Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics, International Journal of Mechanical Sciences 1997, Vol. 39.
10. Ottosen N.S., Ristinmaa M., The Mechanics of Constitutive Modeling, Elsevier 2005.
11. Szwed A., Model konstytutywny ściśliwego materiału idealnie plastycznego, Technika Transportu Szynowego: koleje, tramwaje, metro 2012, Nr 9.
12. Vu V.D., Mir A., Nguyen G.D., Sheikh A.H., A thermodynamics-based formulation for constitutive modelling using damage mechanics and plasticity theory, Engineering Structures 2017, Vol. 143.
13. Ziegler H., Proof of an Orthogonality Principle in Irreversible Thermodynamics, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP 1970, Vol.21.

Thermomechanical framework for modelling elastoplastic damaged materials

In the paper a thermomechanical framework for modelling elastoplastic damaged materials is presented. Basic assumptions and concepts are given, leading to formulation of constitutive equations using two potentials only: Helmholtz free energy and dissipation potential. Consecutive steps of the procedure are shown for simplified one-dimensional case, followed by three-dimensional example concerning Beltrami-Michell failure condition.

Keywords: damage, plasticity, constitutive relations, thermodynamics, dissipation potential, Helmholtz free energy, generalized stress.

Autorzy:

mgr inż. **Inez Kamińska** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, e-mail: ikam@il.pw.edu.pl,

dr inż. **Aleksander Szwed** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, e-mail: a.szwed@il.pw.edu.pl.