

Magdalena LACHOWICZ¹

MODELOWANIE OŚRODKA LEPKOSPĘŻYSTEGO W METODZIE ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

W pracy rozpatruje się ośrodek lepkospężysty, który został opisany równaniami całkowymi (model całkowity) z wykorzystaniem funkcji relaksacji (tensorowej funkcji relaksacji). Opracowano model obliczeniowy do analizy takich ośrodków z użyciem metody elementów czasoprzestrzennych. Zamieszczony przykład obliczeń (tarcza lepkospężysta) wskazuje na poprawność i efektywność tego modelu obliczeniowego.

Słowa kluczowe: ośrodek lepkospężysty, metoda elementów czasoprzestrzennych, model obliczeniowy

1. Wstęp

Nowatorskim wariantem metody elementów skończonych (MES) jest metoda elementów czasoprzestrzennych (MECZ), której podstawy stworzył w latach 70. XX wieku Profesor Kączkowski [4,5]. Cechą wyróżniającą MECZ od innych metod bezpośredniego całkowania równań ruchu jest charakterystyczna aproksymacja funkcji czasoprzestrzennych (w przypadku mechaniki ciała stałego: pól przemieszczeń, odkształceń, naprężeń i innych funkcji) w całym analizowanym obszarze czasoprzestrzennym.

Problemy związane z wyznaczaniem naprężeń i odkształceń w ciałach lepkospężystych komplikują się głównie z powodu równań fizycznych, które występują w postaci dość złożonych równań różniczkowych lub całkowych [3,9].

Wydaje się, że metoda elementów czasoprzestrzennych stwarza nową jakość, zwłaszcza w niestacjonarnych zagadnieniach początkowo-brzegowych. Odnosi się to także do ośrodka lepkospężystego. W niniejszej pracy pokazano modelowanie dowolnego ośrodka lepkospężystego w metodzie elementów czasoprzestrzennych.

¹ Magdalena Lachowicz, Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy im. J. J. Śniadeckich, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, ul. Al. prof. S. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz, 523408500, m.lachowicz@utp.edu.pl

2. Problem początkowo–brzegowy ośrodka lepko-sprężystego

Rozpatruje się ośrodek lepko-sprężysty zajmujący obszar \bar{V} , który jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej R^3 . Przez V oznacza się wnętrze tego obszaru, a przez ∂V jego brzeg, który jest sumą zbiorów ∂V_t i ∂V_u (na powierzchni ∂V_t znane są obciążenia, a na ∂V_u przemieszczenia).

Ruch ciała analizuje się w przedziale $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Ciało to podlega infinitesimalnym deformacjom, co oznacza ośrodek geometrycznie liniowy. Zmienne dynamiczne składające się z pola wektorowego przemieszczeń \mathbf{u} i sił masowych $\rho \mathbf{f}$, symetrycznego pola tensorowego naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ i odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ określone są na iloczynie kartezjańskim zbiorów $(\mathbf{X}, t) \in V \times \langle 0, \infty \rangle$. Pole wektorowe obciążeń powierzchniowych $\hat{\mathbf{t}}$ opisane jest natomiast na iloczynie $(\mathbf{X}, t) \in \partial V_t \times \langle 0, \infty \rangle$. Wymienione zmienne dynamiczne są funkcjami ciągłymi i dostatecznie gładkimi. Dany jest obszar $(V, \partial V_t$ i $\partial V_u)$ z warunkami brzegowymi, obciążenie powierzchniowe $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{X}, t)$ i masowe $\rho \mathbf{f}$, funkcje relaksacji Ψ oraz warunki początkowe.

Poszukuje się pola przemieszczenia $u_i(\mathbf{X}, t)$, odkształcenia $\varepsilon_{ij}(\mathbf{X}, t)$ i naprężenia $\sigma_{ij}(\mathbf{X}, t)$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Przedstawiony problem (materiał liniowo lepko-sprężysty) można opisać następującym zestawem równań [2, 3, 8]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_i} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

$$\sigma_{ij} = \Psi_{ijkl}(\mathbf{X}, 0) \varepsilon_{kl}(\mathbf{X}, t) + \int_0^t \varepsilon_{kl}(\mathbf{X}, t - \tau) \dot{\Psi}_{ijkl}(\mathbf{X}, \tau) d\tau;$$

$$(\mathbf{X}, t) \in V \times \langle 0, \infty \rangle$$

Uzupełnieniem są warunki brzegowe:

$$\hat{t}_j = \sigma_{ij} n_i; (\mathbf{X}, t) \in \partial V_p \times \langle 0, \infty \rangle; \quad (2)$$

$$u_j = \hat{u}_j; (\mathbf{X}, t) \in \partial V_u \times \langle 0, \infty \rangle$$

i warunki początkowe:

$$u_j = u_j^0; \dot{u}_j = \vartheta_j^0; (\mathbf{X}, t) \in V \times \{0\} \quad (3)$$

Wielkość $\Psi_{ijkl}(\mathbf{X}, 0^+)$ jest wartością graniczną $\Psi_{ijkl}(\mathbf{X}, t)$, gdy $t \rightarrow 0$ od strony dodatniej. Wielkość Ψ_{ijkl} jest polem tensorowym czwartego rzędu, nazywanym

tensorową funkcją relaksacji. Symetria tensorów naprężenia σ_{ij} i odkształcenia ε_{ij} powoduje symetrię tensora Ψ_{ijkl} , tzn.

$$\Psi_{ijkl} = \Psi_{jikl} = \Psi_{ijlk} \quad (4)$$

Jeżeli tensor Ψ_{ijkl} jest niezmienniczy względem obrotu osi współrzędnych, wtedy mamy do czynienia z materiałem izotropowym i wówczas

$$\Psi_{ijkl} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{\Psi_1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5)$$

Funkcje Ψ_1 i Ψ_2 nazywane są funkcjami relaksacyjnymi odpowiadającymi kolejno ścinaniu (zmiana postaci) i wszechstronnemu ścisaniu (zmiana objętości). W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że funkcje tworzące Ψ_{ijkl} wyznaczone są doświadczalnie.

Na bazie równań (1)₁ i (2)₁ można wyprowadzić równanie czasopracy wirtualnej [6, 9]:

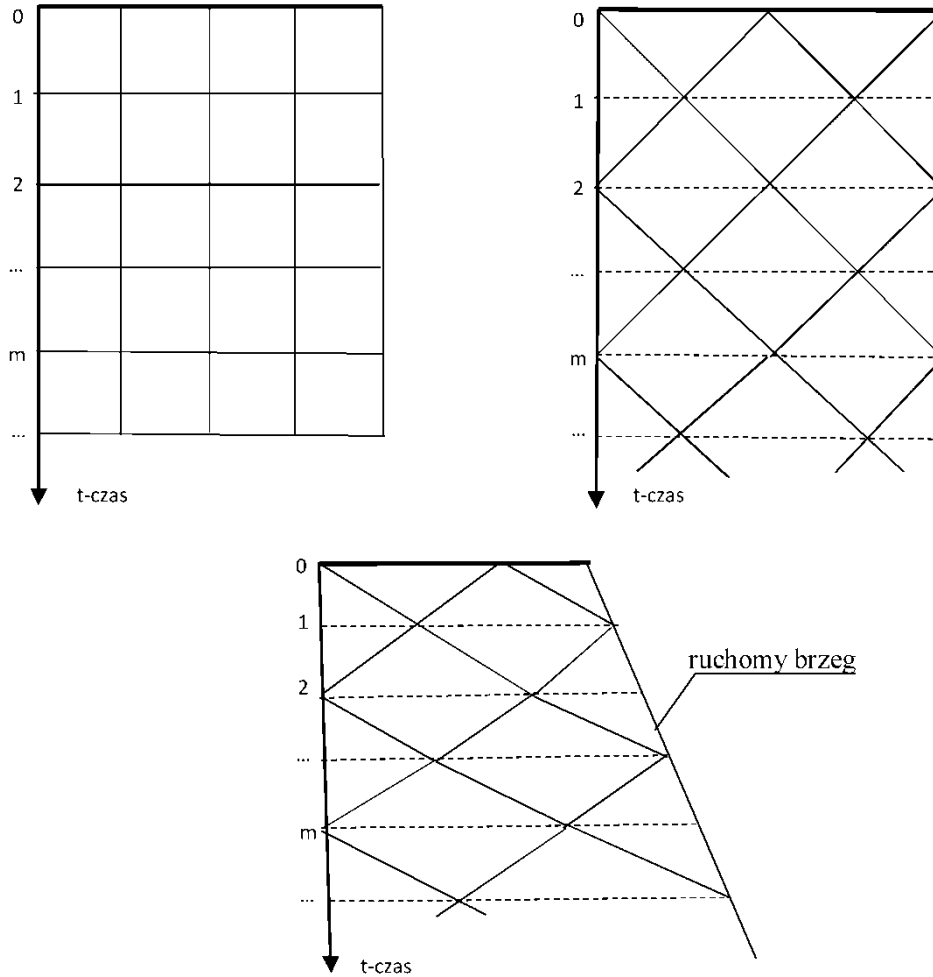
$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \left[\int_V \varrho (f_j \delta u_j + \dot{u}_j \delta \dot{u}_j) dV + \int_{\partial V_t} \hat{t}_j \delta u_j d(\partial V) \right] dt = \\ & = \int_0^{t_1} \int_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV dt \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie δu_j i $\delta \varepsilon_{ij}$ oznaczają wariację kolejno przemieszczeń i odkształceń. Poszczególne całki równania (6) wyrażone są w $J \cdot s = N \cdot m \cdot s$, dlatego to równanie nazywa się równaniem czasopracy lub czasoenegii. Równanie (6) to w istocie zasada Hamiltona [1, 2, 10].

3. Równania MECZ

Dyskretyzacja obszaru czasoprzestrzennego odbywa się w sposób charakterystyczny dla MES. Dotyczy to także dyskretyzacji po współrzędnej czasowej (rys. 1.). Istnieje tutaj duża dowolność i możliwość dostosowania dyskretyzacji do analizowanego zjawiska, procesu.

Poszczególne parametry lepkosprężyste Ψ_{ijkl} wyrażone są w postaci funkcji relaksacji (rys. 2a). Funkcje te można zdyskretyzować w sposób dostosowany do zdyskretyzowanego pasma czasoprzestrzennego (rys. 2b). Przyjmuje się, że w obszarze skończonego elementu czasoprzestrzennego (SKECZ) zmienność funkcji Ψ_{ijkl} jest liniowa. Jest to w pełni uzasadnione biorąc pod uwagę mały wymiar czasowy SKECZ [7].



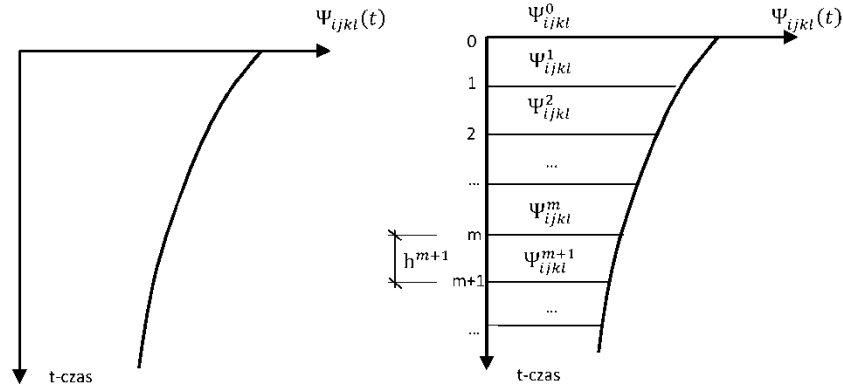
Rys. 1. Przykłady dyskretyzacji obszaru czasoprzestrzennego po współrzędnej czasowej t

Fig. 1. Examples of space time discretization along time coordinate t

Na podstawie równania czasopracy wirtualnej (6), trzymając się zasad charakterystycznych dla MES, otrzymuje się następujący układ równań algebraicznych MECZ [4, 5, 9]

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}\mathbf{r} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (7)$$

w którym \mathbf{K} jest globalną macierzą sztywności czasoprzestrzennej, a \mathbf{r} i \mathbf{F} są wektorami poszukiwanych przemieszczeń węzłowych i znanych impulsów wywołujących ruch. Elementy macierzy \mathbf{K} opisane są następującym wzorem [7].



Rys. 2. Funkcja relaksacji (a) z odpowiednią dyskretyzacją (b)

Fig. 2. Function of relaxation (a) with appropriate discretization (b)

$$K_{\alpha\beta}^{em} = \iint_{\Omega_e} (B_{ij\alpha}^e C_{ij\beta}^{em} - \Phi_{j\alpha}^e \rho^e \dot{\Phi}_{j\beta}^e) d\Omega \tag{8}$$

gdzie:

$$C_{ij\beta}^{em} = \Psi_{ijkl}^{em}(\mathbf{X}, -t_p^e) B_{kl\beta}^e(\mathbf{X}, t) + A_{ijkl}^{em} \int_{-t_p^e}^{t_k^e} B_{kl\beta}^e(\mathbf{X}, t - \tau) d\tau \tag{9}$$

$$A_{ijkl}^{em} = \frac{\Psi_{ijkl}^{e,m+1} - \Psi_{ijkl}^{em}}{h^{e,m+1}}$$

Inne oznaczenia:

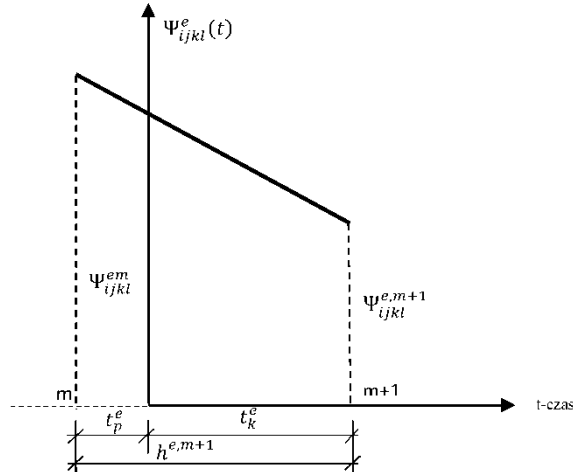
$\Phi_{i\alpha}^e = \Phi_{i\alpha}^e(\mathbf{X}, t)$ – funkcja kształtu;

Ω_e – obszar SKECZ, $i, j, k, l = 1, 2, 3$;

$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots, w_e \cdot s_e$ (w_e – liczba węzłów SKECZ, s_e – liczba stopni swobody w węźle SKECZ);

$e = 1, 2, \dots, E$ (E – liczba SKECZ), $m = 0, 1, 2, \dots$ (rys. 1-2).

Dopełnieniem do użytych oznaczeń jest rys. 3.



Rys. 3. Opis funkcji relaksacji $\Psi_{klm}^e(t)$ w obszarze SKECZ, w układzie współrzędnych lokalnych
 Fig. 3. Description of function of relaxation $\Psi_{klm}^e(t)$ in FSTE area, in the system of local coordinates

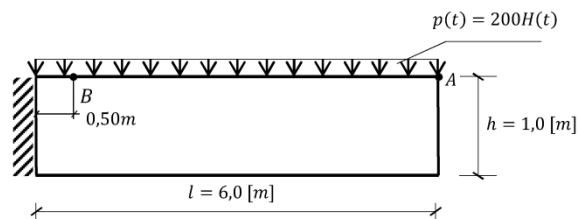
Przy znanych warunkach początkowych, równania MECZ (7) przekształcają się w schemat rekurencyjny w postaci [np. 5, 9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^1 &= (\mathbf{B}^0)^{-1}(-\mathbf{F}^0 - \mathbf{A}^0 \mathbf{r}^0) \\ \mathbf{r}^2 &= (\mathbf{B}^1)^{-1}[-\mathbf{F}^1 - \mathbf{C}^1 \mathbf{r}^0 - (\mathbf{D}^1 + \mathbf{A}^1) \mathbf{r}^1] \\ \mathbf{r}^{m+1} &= (\mathbf{B}^m)^{-1}[-\mathbf{F}^m - \mathbf{C}^m \mathbf{r}^{m-1} - (\mathbf{D}^m + \mathbf{A}^m) \mathbf{r}^m] \end{aligned} \quad (10)$$

Macierze \mathbf{A}^m , \mathbf{B}^m , \mathbf{C}^m i \mathbf{D}^m są podmacierzami macierzy globalnej \mathbf{K} sformułowanymi w chwili $m = 0, 1, 2, \dots$ (por. rys. 1-2) [np. 5, 7, 9].

4. Przykład obliczeń

Rozpatruje się tarczę lepkosprężystą poddaną obciążeniu poprzecznemu (rys. 4.)



Rys. 4. Analizowana tarcza lepkosprężysta
 Fig. 4. Analyzed viscous elastic disc

$H(t)$ – funkcja Heaviside'a

$t = 0,20$ [m] – grubość tarczy; $\rho = 7800$ [$\frac{kg}{m^3}$]; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ [$\frac{N}{m^2}$]

$\nu = 0,3$

$h^e = 1,0 \cdot 10^{-4}$ [s] – wymiar czasowy SKECZ

Przyjęto, że materiał tarczy jest jednorodny i izotropowy. Ponadto przyjęto, że zmiana postaci ma charakter lepkosprężysty, o przykładowej funkcji relaksacji:

$$\Psi_1(t) = \mu(1 + e^{-\kappa t}) \quad (11)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

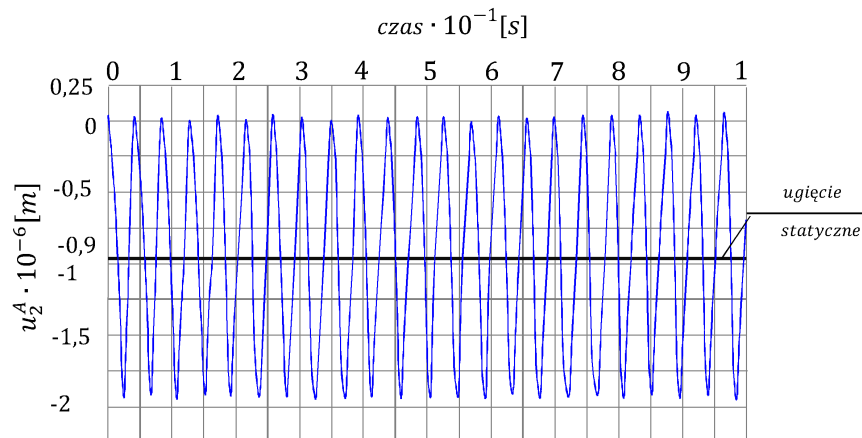
a zmiana objętości zachodzi sprężysto:

$$\Psi_2(t) = 3K \quad (12)$$

$$K = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

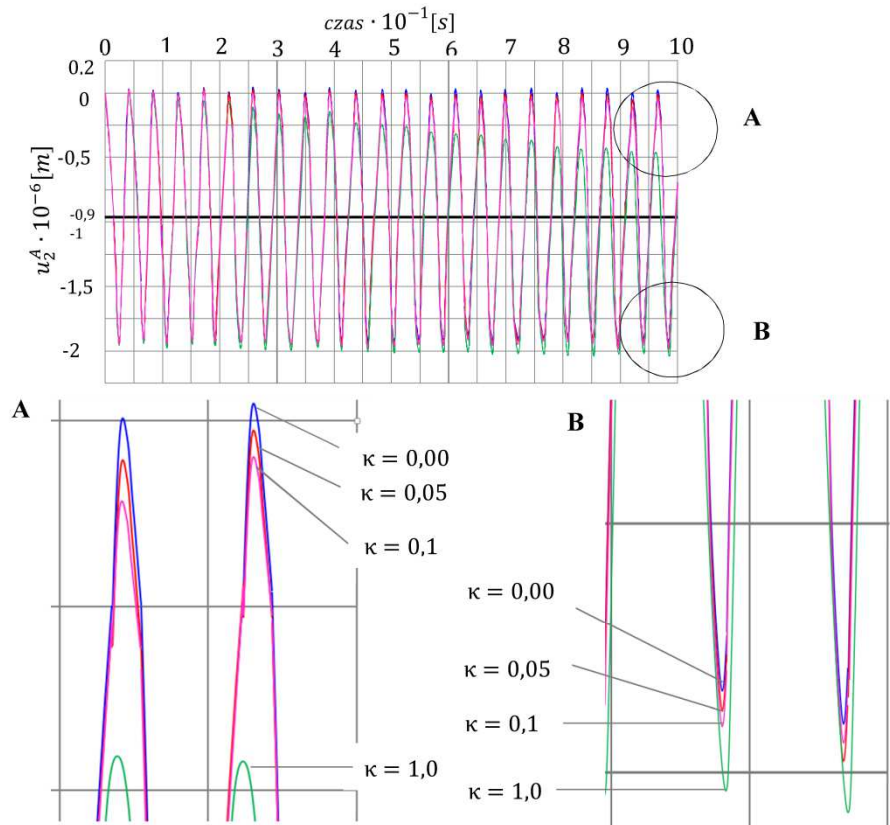
Wielkość κ jest parametrem opisującym intensywność relaksacji, w przypadku $\kappa = 0,0$ mamy do czynienia z ośrodkiem sprężystym.

Poniżej przedstawia się wykresy przemieszczeń pionowych punktu A w zależności od wartości parametru κ (rys. 5-6) oraz naprężeń normalnych w punkcie B (rys. 7.).



Rys. 5. Tarcza sprężysta: $\Psi_1 = 2\mu$, $\Psi_2 = 3K$. Przemieszczenie pionowe punktu A, u_2^A
 — ugięcie od statycznego działania obciążenia (wspornik)
 — ugięcie tarczy od dynamicznego działania obciążenia

Fig. 5. Elastic disc : $\Psi_1 = 2\mu$, $\Psi_2 = 3K$. Vertical displacement of point A, u_2^A
 — deflection caused in effect of static load (support)
 — deflection of disc caused in effect of dynamic load

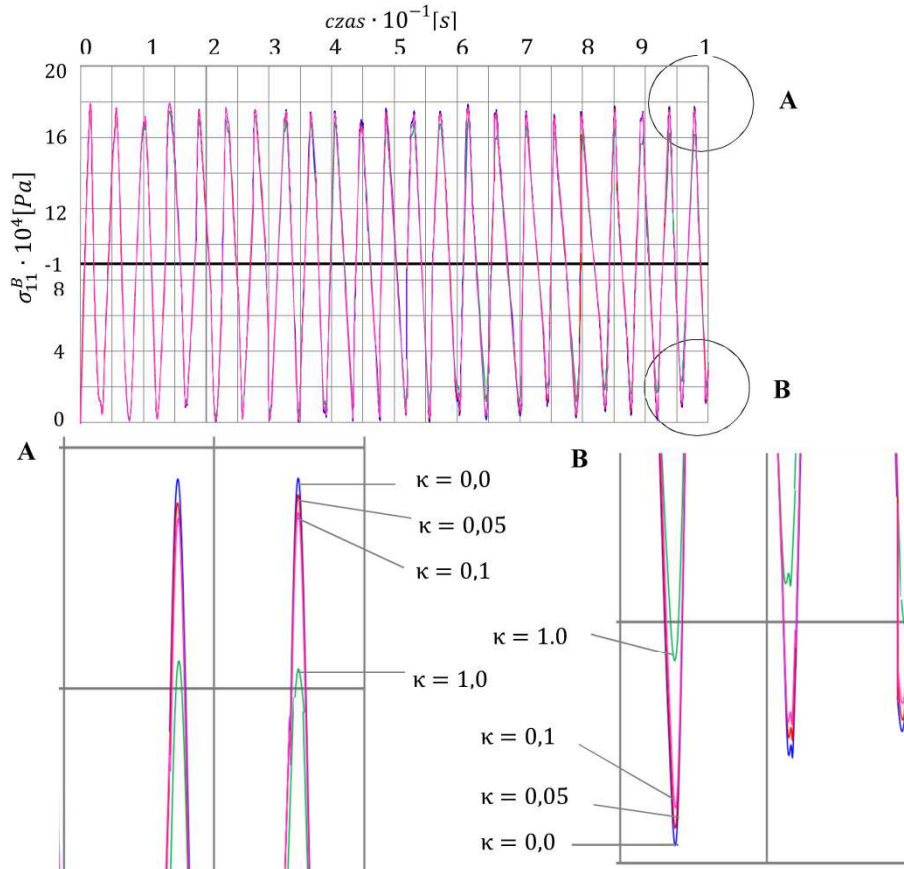


Rys. 6. Tarcza lepkosprężysta: $\Psi_1(t) = \mu(1 + e^{-\kappa t})$, $\kappa = 0,0$; $\kappa = 0,05$; $\kappa = 0,1$; $\kappa = 1,0$; $\Psi_2 = 3K$.
Przemieszczenie pionowe w punkcie A, u_2^A

- ugięcie od statycznego działania obciążenia (wspornik sprężysty)
- ugięcie od dynamicznego działania obciążenia (wspornik sprężysty), $\kappa = 0,00$
- tarcza lepkosprężysta $\kappa = 0,05$
- tarcza lepkosprężysta $\kappa = 0,1$
- tarcza lepkosprężysta $\kappa = 1,0$

Fig. 6. Viscous elastic disc: $\Psi_1(t) = \mu(1 + e^{-\kappa t})$, $\kappa = 0,0$; $\kappa = 0,05$; $\kappa = 0,1$; $\kappa = 1,0$; $\Psi_2 = 3K$.
Vertical displacement in point A, u_2^A

- deflection caused by static load (elastic support)
- deflection caused by dynamic load (elastic support), $\kappa = 0,00$
- viscous elastic disc $\kappa = 0,05$
- viscous elastic disc $\kappa = 0,1$
- viscous elastic disc $\kappa = 1,0$



Rys. 7. Tarcza lepkosprężysta: $\Psi_1(t) = \mu(1 + e^{-\kappa t})$, $\kappa = 0,0$; $\kappa = 0,05$; $\kappa = 0,1$; $\kappa = 1,0$;

$\Psi_2 = 3K$. Naprężenia normalne w punkcie B, σ_{11}^B

- naprężenia od statycznego działania siły (wspornik sprężysty)
- naprężenia od dynamicznego działania siły (wspornik sprężysty), $\kappa = 0,00$
- tarcza lepkosprężysta, $\kappa = 0,05$
- tarcza lepkosprężysta, $\kappa = 0,1$
- tarcza lepkosprężysta, $\kappa = 1,0$

Fig. 7. Viscous elastic disc : $\Psi_1(t) = \mu(1 + e^{-\kappa t})$, $\kappa = 0,05$; $\kappa = .1$; $\kappa = 1,0$; $\Psi_2 = 3K$. Normal

stress in point B, σ_{11}^B

- stresses caused by static force (elastic support)
- stresses caused by dynamic force (elastic support), $\kappa = 0,00$
- viscous elastic disc, $\kappa = 0.05$
- viscous elastic disc, $\kappa = 0.1$
- viscous disc, $\kappa = 1.0$

Rozważana tarcza jest w istocie zginanym wspornikiem. Stosując inżynierską teorię belkową, dysponujemy następującym znanym rozwiązaniem od statycznego obciążenia $p(t) = p_0 = 200 \text{ kN/m}$ (ugięcie końca wspornika sprężystego):

- bez uwzględnienia ścinania – $w_{max} = 9,26 \cdot 10^{-6} \text{ m}$;
- z uwzględnieniem ścinania – $w_{max} = 9,52 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

Można też wyznaczyć dla wspornika sprężystego częstotliwość drgań własnych, ze znanego wzoru, np. dwie pierwsze częstotliwości:

$$\omega_1 = 146,23 \text{ Hz}; \quad \omega_2 = 916,75 \text{ Hz}.$$

Otrzymane wyniki obliczeń numerycznych MECZ wskazują na wysoką zgodność i poprawność jakościową zastosowanego modelu lepkosprężystego, ponieważ:

- Amplituda ugięcia tarczy sprężystej w punkcie A , u_2^A mieści się w przedziale $1,83 \cdot 10^{-6} \div 1,91 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, wobec ugięcia statycznego wynoszącego $9,3 \cdot 10^{-6} \div 9,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Oznacza to, że amplituda ugięcia wynosi prawie $2u_{stat.}$. Wysoka zgodność wyników obliczeń dotyczy także częstotliwości drgań.
- Ze wzrostem parametru κ charakteryzującym intensywność relaksacji stwierdzono m.in.:
 - spadek amplitudy przemieszczeń, jest to efekt tłumienia drgań (rys. 6.),
 - spadek amplitudy naprężeń, jest to efekt relaksacji.

W podsumowaniu należy zaznaczyć, że stwierdzono w przedstawionym przykładzie obliczeń takie charakterystyczne i oczekiwane efekty jak:

- tłumienie drgań,
- pełzanie (przyrost odkształceń w czasie),
- relaksacja (spadek naprężeń w czasie).

Efektywność tych zjawisk zależy oczywiście od udziału fazy lepkiej w odniesieniu do fazy sprężystej, czyli od przyjętej funkcji relaksacji.

5. Podsumowanie

Do opisu lepkosprężystych cech materiałów konstrukcyjnych przyjęto model całkowy. Związki fizyczne opisano z wykorzystaniem funkcji relaksacji. Funkcje te można wyznaczyć doświadczalnie, co umożliwia uwzględnienie jednocześnie zjawisk różnego typu nieciągłości, efektów starzenia itp. Biorąc pod uwagę specyficzne cechy MECZ (np. mały wymiar czasowy SKECZ) opracowano sposób (model) zdefiniowania naprężeń w obszarze SKECZ. Jest to oryginalny element pracy.

Wykazano, że modelowanie ośrodka lepkosprężystego nie zaburza ogólnego algorytmu obliczeń metodą elementów czasoprzestrzennych. Przy znanych warunkach początkowych, równania MECZ sprowadzają się do formuły rekurencyjnej.

W profesjonalnych programach komputerowych, w których rozwiązuje się przeróżne problemy początkowo-brzegowe (np. ABAQUS, ANSYS) stosuje się

rozprężenie przestrzeni od czasu. W związku z tym można zauważyć, że przy większych prędkościach analizowanych zjawisk to rozprężenie może być źródłem znacznych niedokładności obliczeń. W MECZ, przy odpowiednim doborze funkcji kształtu, sprzężenie czasu i przestrzeni jest rzeczą naturalną. Jest to ważny walor MECZ.

Literatura

- [1] Bailey C.D., 1975. A new look at Hamilton's law of varying action, AIAA J.13, 1154-1157.
- [2] Fung Y.C., 1965. Foundation of Solid Mechanics, Englewood Cliffs, Prentice-Hall 1969. Wydanie polskie: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN Warszawa.
- [3] Gurtin M.E., Sternberg E., 1962. On the linear theory of viscoelasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. 11,1, pp. 291-356.
- [4] Kączkowski Z., 1975. The method of finite space-time elements in dynamics of structures, J. Techn. Phys. 16,1, pp. 69-84.
- [5] Kączkowski Z., 1976. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych, Arch. Inż. Łąd., 3(22), ss. 365-378.
- [6] Kleiber M. (red.), 1995. Mechanika techniczna, tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych, PWN Warszawa.
- [7] Lachowicz M., 2015. Numeryczne modelowanie ośrodka lepkosprężystego, Budownictwo ogólne. Zagadnienia konstrukcyjne, materiałowe i cieplno-wilgotnościowe w budownictwie, Bydgoszcz, Wydawnictwa Uczelniane UTP, 2015, ss. 91-95.
- [8] Nowacki W., 1963. Teoria pełzania, Arkady Warszawa.
- [9] Podhorecki A., 2005. Podstawy teoretyczne metody elementów czasoprzestrzennych, Wyd. Uczelniane ATR, Bydgoszcz.
- [10] Podhorecki A., 1989. Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych, Rozp. Inż., 37, ss. 41-51.

MODELLING OF A VISCOELASTIC CONTINUUM WITH THE USE OF SPACE-TIME ELEMENT METHOD

Summary

The article deals with a viscoelastic continuum which is described by integral equations (integral model) with the use of relaxation function (tensor relaxation function). A calculation model for analysis of such continua with the use of time-space elements has been developed. The included calculation example (viscoelastic disc) indicates correctness and effectiveness of this calculation model.

Keywords: viscoelastic continuum, space-time element method, calculation model

Przesłano do redakcji: 30.06.2017 r.

Przyjęto do druku: 01.09.2017 r.