

Maciej SIWCZYŃSKI\*  
Andrzej DRWAL\*  
Sławomir ŻABA\*

## ENERGETYCZNIE OPTYMALNY ROZKŁAD ZMODULOWANYCH SYGNAŁÓW PRĄDU W ZŁOŻONEJ LINIOWEJ SIECI ELEKTRYCZNEJ

W złożonej sieci RLC oprócz rozptywu prądów wynikającego ze zwykłych praw Kirchhoffa, można otrzymać też inne rozkłady prądów wynikające z założonych kryteriów optymalizacyjnych. W publikacji [5] rozpatrzono rozkład, który spełnia warunek minimum strat energii wewnątrz sieci, nazywając go rozkładem energetycznie optymalnym. Rozkład optymalny nie jest osiągalny samoistnie, ale aby go wywołać potrzebne jest sterowanie wektorem źródeł napięciowych, prądowo zależnych wprowadzonego do zbioru oczek złożonej sieci typu RLC. Niniejsze opracowanie jest rozszerzeniem pracy [5] na przypadek, gdy sygnały wejściowe sieci elektrycznej są okresowe, zmodulowane. Przedstawiono kluczowy aspekt, dla opisanego w artykule rodzaju modulacji, tzw. rozszczepienia modulacyjnego operatora różniczkowania, uwzględniający poprawkę (zaburzenie) modulacyjną. Uzasadniając wprowadzenie czasowo zależnej poprawki modulacyjnej posłużono się wyprowadzeniem częstotliwościowym. Wprowadzenie ww rozszczepienia do operatorów sterowania optymalizującego, pozwala uzyskać poprawki modulacyjne, które umożliwiają wyznaczenie optymalnego rozkładu prądów w sieci, gdy zewnętrzny wektor zasilający jest okresowy, zmodulowany.

SŁOWA KLUCZOWE: zasada minimum strat energetycznych, sterowanie optymalne i suboptymalne, sygnały okresowe i zmodulowane, rozszczepienie modulacyjne operatora różniczkowania

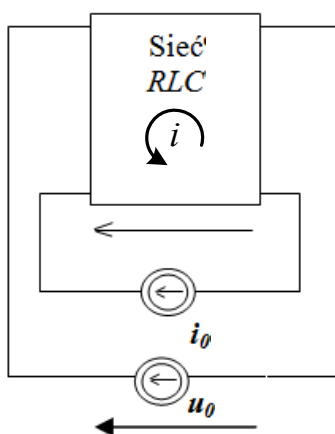
### 1. WSTĘP. OPTIMUM ENERGETYCZNE I STEROWANIE

W obwodach prądu stałego obowiązuje zasada minimum energii, zgodnie z którą rozptyw prądów w złożonej sieci jest taki, że całkowite straty energii są minimalne [1, 2]. Jednak zasada ta na ogół nie działa już w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego [3]. W artykule [4] wykazano że w obwodach z sygnałami należącymi do liniowej przestrzeni  $L^1$ -impulsów występujący tam rozptyw prądów także nie spełnia zasady minimum strat energii.

---

\* Politechnika Krakowska.

W pracy [5] wykazano, że w złożonej sieci *RLC* oprócz rozplywu prądów wynikającego ze zwykłych praw Kirchhoffa zwanego „dzielnikiem prądu”, za pomocą odpowiednich sterowań można otrzymać też inne rozkłady prądów wynikające z pewnych kryteriów optymalizacyjnych. Rozpatrzono tam rozkład, który spełnia warunek minimum strat energii wewnątrz sieci nazywając go rozkładem *energetycznie optymalnym*.



Rys. 1. Złożona sieć z dopływem wieloprądowym;  $i$  – wewnętrzny wektor prądów oczkowych;  $i_0$  zewnętrzny wektor prądowy

Na rys. 1. przedstawiono sieć *RLC* z zadaniem dopływu w postaci wektora sygnałów prądowych  $i_0$ . Rozplyw prądów oczkowych wewnątrz sieci określa wektor sygnałów prądowych  $i$ . Sieć scharakteryzowana jest tzw. macierzą operatorów wewnętrznych  $Z(s)$ , oraz macierzą tzw. operatorów kontaktowych  $Z_0(s)$ . Równania operatorowe sieci przyjmują postać:

$$\begin{aligned} Zi - Z_0 i_0 &= \mathbf{0} \\ -Z_0^T i + Z_{00} i_0 &= \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Strukturę układu równań (1) ilustruje rys. 2. Na rysunku tym podane są rozmiary macierzy i wektorów.

Dzielnik prądu i rozkład energetycznie optymalny opisują odpowiednio dwa macierzowo – podobne operatorowe układy równań zwane tu  $(Z, R; Z_0, R_0)$  (2) i (3) w postaci:

$$Z(s)i - Z_0(s)i_0 = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$R(s)i - R_0(s)i_0 = \mathbf{0} \quad (3)$$

gdzie macierzowe operatory typu impedancyjnego sieci  $Z(s)$  i  $R(s)$  oraz  $Z_0(s)$  i  $R_0(s)$  są powiązane w ten sposób, że:

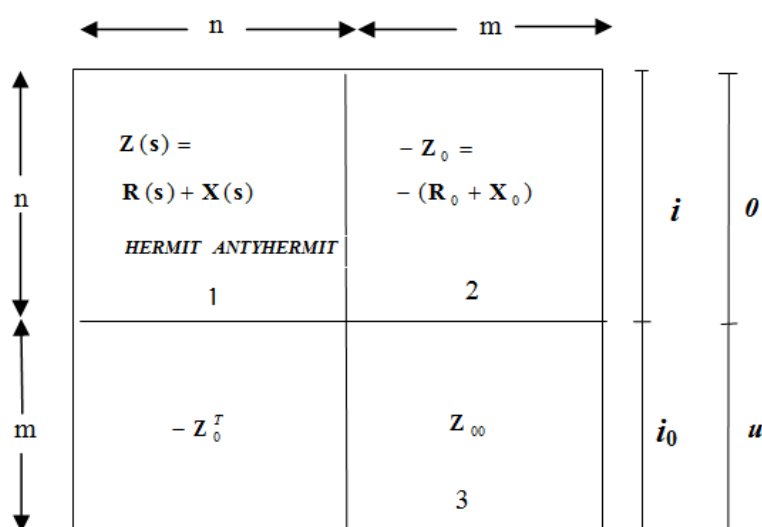
$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{R}(s) + \mathbf{X}(s) \tag{4}$$

przy czym

$$\mathbf{R}(-s) = \mathbf{R}(s); \quad \mathbf{X}(-s) = -\mathbf{X}(s) \tag{5}$$

co sprawia, że rozkład (4) na część hermitowską i antyhermitowską jest jednoznaczny:

$$\mathbf{R}(s) = \frac{1}{2}[\mathbf{Z}(s) + \mathbf{Z}(-s)]; \quad \mathbf{X}(s) = \frac{1}{2}[\mathbf{Z}(s) - \mathbf{Z}(-s)] \tag{6}$$



Rys. 2. Schemat układu równań (1): 1 – macierz operatorów wewnętrznych, 2 – macierz operatorów kontaktowych, 3 – macierz operatorów zewnętrznych,  $\theta$  – wektor (lub operator) zerowy  $s \div d/dt$ ,  $T$  – znak transpozycji

W ten sposób układy równań: (2) – typu  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_0)$  i (3) – typu  $(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$  są macierzowo identyczne, ale operatorowo układ (3) jest hermitowską odmianą układu równań (2).

Rozwiązaniami układów równań (2) i (3) są: wektor prądów oczkowych dzielnika prądu

$$\mathbf{i}^{dz} = [\mathbf{Z}(s)]^{-1} \mathbf{Z}_0(s) \mathbf{i}_0 \tag{7}$$

i energetycznie optymalny rozkład prądów oczkowych jako wektor

$$\mathbf{i}^{opt} = [\mathbf{R}(s)]^{-1} \mathbf{R}_0(s) \mathbf{i}_0 \tag{8}$$

Rozkład optymalny nie jest osiągalny samoistnie, jak rozkład dzielnika prądu, ale aby go wywołać potrzebne jest sterowanie optymalne zrealizowane za pomocą operatora sterowania  $\mathbf{X}^{st}(s)$ , który wytworzy odpowiednio rozłożony w oczkach wewnętrznych sieci sygnał napięcia źródłowego:

$$\mathbf{e}^{st} = \mathbf{X}^{st}(s)\mathbf{i}_0 \quad (9)$$

gdzie [5]:

$$\mathbf{X}^{st}(s) = \mathbf{X}(s)[\mathbf{R}(s)]^{-1}\mathbf{R}_0(s) - \mathbf{X}_0(s) \quad (10)$$

Tak więc,  $\mathbf{X}^{st}(s)$  jest antyhermitowskim operatorem macierzowym przetwarzającym wektor-sygnał  $\mathbf{i}_0$  w wektor-sygnał napięć  $\mathbf{e}^{st}$ , tj.:

$$\mathbf{X}^{st}(-s) = -\mathbf{X}^{st}(s)$$

Dla sieci prądu stałego rozkłady  $\mathbf{i}^{dz}$  i  $\mathbf{i}^{opt}$  pokrywają się, gdyż pokrywają się operatory-macierze  $\mathbf{Z}(s)$  i  $\mathbf{R}(s)$  dla  $s = 0$  i jest to zgodne z zasadą, że w obwodach prądu stałego rozkład prądów jest taki, że całkowite straty energii są minimalne [1, 2]. Okazuje się jednak, że rozkłady te mogą się pokryć bez sterowania także wtedy, gdy znika *operator odchylenia*:

$$\Delta(s) = [\mathbf{R}(s)]^{-1}\mathbf{R}_0(s) - [\mathbf{Z}(s)]^{-1}\mathbf{Z}_0(s) \quad (11)$$

który związany jest z operatorem sterowania optymalnego wzorem:

$$\mathbf{X}^{st}(s) = \mathbf{Z}(s)\Delta(s) \quad (12)$$

Z wyrażen (10) i (12) wynika następujące *twierdzenie o równoważności*:

$$\begin{array}{ccc} \Delta = \mathbf{0} & \mathbf{X}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0 = \mathbf{X}_0 & \\ \Downarrow \Leftrightarrow & \text{lub} & \text{dla każdego } s \\ \mathbf{X}^{st} = \mathbf{0} & \mathbf{R}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}_0 = \mathbf{R}_0 & \end{array} \quad (13)$$

Sieci spełniające warunek (13) osiągają energetycznie optymalny rozdział prądu  $\mathbf{i}_0$  w sieci bez udziału sterowania. W pracy [5] nazwano je dlatego sieciami *natURALNIE energetycznie optymalnymi*.

Jak pokazuje wzór (10), do wyznaczenia kluczowego operatora sterowania  $\mathbf{X}^{st}(s)$  trzeba wykonać skomplikowaną operację odwrócenia dyspersyjnego (zależnego od  $s$ ) operatora macierzowego  $\mathbf{R}(s)$ . Można tego uniknąć stosując tzw. *sterowanie suboptymalne*, zdefiniowane za pomocą operatora [6]:

$$\mathbf{e}^{sub} = [\Delta\mathbf{R}(s) + \mathbf{X}^{sub}(s)]\mathbf{i}_0 \quad (14)$$

gdzie:

$$\Delta\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}(s)(\mathbf{R}')^{-1}\mathbf{R}'_0 - \mathbf{R}_0(s) \quad (15)$$

jest tzw. *różnicowym operatorem rezystancji niedopasowania* oraz:

$$\mathbf{X}^{sub}(s) = \mathbf{X}(s)(\mathbf{R}')^{-1}\mathbf{R}'_0 - \mathbf{X}_0(s) \quad (16)$$

jest *operatorem sterowania suboptymalnego*. Niezależny od  $s$  operator macierzowy  $\mathbf{R}'$  ma zastąpić dyspersyjny operator  $\mathbf{R}(s)$ . Na skutek takiego uproszczenia pełny operator sterowania  $[\Delta\mathbf{R}(s) + \mathbf{X}^{sub}(s)]$  przestaje być antyhermitowskim co sprawia, że utracona jest energetyczna właściwość operatorów antyhermitowskich, mianowicie cecha energetycznej obojętności [5]. Ważny staje się zatem problem odpowiedniego doboru operatora  $\mathbf{R}'$ , a więc i sterowania suboptymal-

nego. Jedną z możliwości rozwiązania tej kwestii jest rozkład macierzowej funkcji wymiernej w szereg potęgowy względem  $s$  lub  $s^{-1}$  [7].

## 2. SYGNAŁY ZMODULOWANE W OBWODZIE ELEKTRYCZNYM. ROZSZCZEPIENIE MODULACYJNE OPERATORA RÓŻNICZKOWANIA

Wprowadzenie modulacji do rachunku operatorowego ma na celu przybliżenie opisu zjawisk energetycznych w modulowanych stanach nieustalonych, tj. przejścia z jednego periodycznego stanu w drugi za pomocą tzw. „poprawki modulacyjnej” [8].

Uzasadniając wprowadzenie czasowo zależnej poprawki modulacyjnej posłużono się wyprowadzeniem częstotliwościowym.

$$x(t) = X(t)e^{j\omega t} \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow y(t) = Y(t)e^{j\omega t}$$

Rys. 3. Przechodzenie sygnału zmodulowanego przez układ liniowy, czasowo niezmienniczy o transmitancji  $H(s)$

Na rysunku 3 przedstawiono działanie sygnału sinusoidalnego, monoharmonicznego na układ  $H(s)$ , gdzie:  $x(t)$ ,  $y(t)$  – sygnał wejściowy (wyjściowy),  $X(t)$ ,  $Y(t)$  – amplituda sygnału wejściowego (wyjściowego) zależna od czasu,  $e^{j\omega t}$  – sygnał nośny (sinusoida).

W powyższym przypadku wyznaczenie transformaty Laplace’a sygnału wejściowego  $x(t)$  oraz wyjściowego  $y(t)$  przebiega analogicznie według wzoru:

$$\begin{aligned} \bar{x}(s) &= \left[ X(t)e^{j\omega t} \right](s) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{j\omega t} e^{-st} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-(s-j\omega)t} dt = \bar{X}(s-j\omega) \end{aligned}$$

gdzie zamieniając zmienne  $s-j\omega \rightarrow s$  ( $s \rightarrow s+j\omega$ ) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= H(s)\bar{x}(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{Y}(s-j\omega) = H(s)\bar{X}(s-j\omega) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{Y}(s) = H(s+j\omega)\bar{X}(s) \end{aligned} \quad (17)$$

Dzięki temu modulacja sygnałów wejściowego i wyjściowego zostaje „przeniesiona” na transmitancję opisującą układ.

Rozwijając (17) w szereg potęgowy względem  $s$ , pomijając dalsze wyrazy otrzymuje się:

$$H(s + j\omega) = H(j\omega) + \frac{dH}{dj\omega} s = H(j\omega) - j \frac{dH}{d\omega} s \quad (18)$$

Dla sygnału wieloharmonicznie zmodulowanego sygnały wejścia  $x(t)$  i wyjścia  $y(t)$  mają postać:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{jn\omega}(t) e^{jn\omega t} \\ y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{jn\omega}(t) e^{jn\omega t} \end{cases}$$

gdzie:  $X_{jn\omega}(t)$ ,  $Y_{jn\omega}(t)$  – widma chwilowe  $n$ -tej harmonicznej, zatem zależność opisująca układ ma postać:

$$\bar{Y}_{jn\omega}(s) = H(s + jn\omega) \bar{X}_{jn\omega}(s) \quad (19)$$

Działanie operatora  $H(s)$  na sygnał wieloharmonicznie zmodulowany, zgodnie z (18), przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} H(s + jn\omega) &= H(jn\omega) + \frac{dH}{djn\omega} s = \\ &= H(jn\omega) - j \frac{dH}{dn\omega} s \end{aligned}$$

zatem wyrażenie (19) przedstawia się jako:

$$\bar{Y}_{jn\omega}(s) = \left[ H(jn\omega) - j \frac{dH}{dn\omega} s \right] \bar{X}_{jn\omega}(s)$$

Uogólniając rozważanie na sygnały nieokresowe, tj. sygnały wejściowe  $x(t)$  i wyjściowe  $y(t)$  postaci:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{X}(s, t) e^{st} ds \\ y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{Y}(s, t) e^{st} ds \end{cases}$$

gdzie:  $\bar{X}(s, t)$ ,  $\bar{Y}(s, t)$  – chwilowe widma ciągłe, otrzymuje się:

$$\bar{Y}(s, t) = \left[ H(s) + \frac{dH}{ds} \frac{d}{dt} \right] \bar{X}(s, t)$$

Dzięki wyprowadzeniu i wykazaniu słuszności teorii częstotliwościowej modulacji można wprowadzić modulację czasowo zależną („rozszerzenie” modulacyjnej), tj:

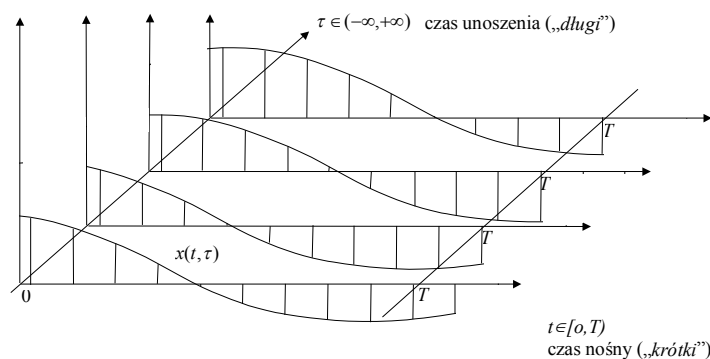
$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} + \frac{d}{d\tau} \quad (20)$$

albo w symbolice zespolonej

$$s \rightarrow s + \sigma$$

gdzie zachodzi silna nierówność  $|\sigma| \ll |s|$  oraz  $s = d/dt$  – operator różniczkowania sygnału,  $t \in [0, T)$ ,  $\sigma = d/d\tau$  – pochodna obwiedniowa, zaburzenie modulacyjne, poprawka modulacyjna.

Sygnał zmodulowany można traktować jako sygnał 2-D. Okresowy (o okresie T) sygnał zmodulowany zilustrowano na rys. 4.



Rys. 4. Ilustracja przebiegu sygnału zmodulowanego jako sygnału 2-D  $x(t, \tau)$

Dwie zmienne niezależne sygnału nazywane będą:  $t$  – czasem nośnym,  $\tau$  – czasem unoszenia. Gdy zmienność sygnału względem czasu unoszenia jest znacznie mniejsza niż jego zmienność czasie nośnym, operator różniczkowania ulega „rozszczeniu” (20) – oczywiście dla  $|\sigma| \ll |s|$ .

Jeżeli rozpatruje się dwójnik elektryczny, na którego zaciskach występują sygnały zmodulowane napięcia  $u(t, \tau)$  i prądu  $i(t, \tau)$  powiązane operatorem impedancyjnym  $Z(s)$  to

$$Z(s) \rightarrow Z(s + \sigma) = Z(s) + \frac{dZ}{ds} \sigma \quad (21)$$

jest wystarczającą transformacją operatora impedancji i wówczas uprawniony jest zapis:

$$u = \left( Z(s) + \frac{dZ}{ds} \frac{d}{d\tau} \right) i \quad (22)$$

Realizacja zapisu (22) bezpośrednio w dziedzinie czasu odbywa się z udziałem splotu cyklicznego:

$$u(t, \tau) = \int_0^T Z(t \Theta t') i(t', \tau) dt' + \int_0^T \frac{dZ}{ds}(t \Theta t') \frac{d}{d\tau} i(t', \tau) dt' \quad (23)$$

gdzie:  $Z(t)$ ;  $\frac{dZ}{ds}(t)$  – odpowiednio cykliczne funkcje impulsowe operatorów

$Z(s)$  i  $\frac{dZ}{ds}$ ;  $(t \Theta t')$  – działanie odejmowania modulo  $T$ , tj:

$$t \Theta t' = \begin{cases} t - t', & \text{gdy } t - t' \in [0, T) \\ t - t' + T, & \text{gdy } t - t' \notin [0, T) \end{cases}$$

dla  $t \in [0, T)$  i  $t' \in [0, T)$ .

Natomiast realizacja zapisu (22) w dziedzinie częstotliwości ma postać:

$$u(jn\omega, \tau) = Z(jn\omega) I(jn\omega, \tau) + \frac{dZ}{djn\omega} \frac{dI(jn\omega, \tau)}{d\tau} \quad (24)$$

albo w innym zapisie:

$$u(s, \tau) = Z(s) I(s, \tau) + \frac{dZ}{ds} \frac{dI(s, \tau)}{d\tau} \quad \text{dla } s = j\omega;$$

gdzie:  $u(s, \tau)|_{s=j\omega}$ ,  $I(s, \tau)|_{s=j\omega}$  – czasowo zmienne widma sygnałów napięcia i

prądu (widma chwilowe);  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

### 3. OPTIMUM ENERGETYCZNE SIECI RLC I STEROWANIE PRZY SYGNAŁACH T-OKRESOWYCH, ZMODULOWANYCH

Wyniki uzyskane we wprowadzeniu do niniejszej pracy wskazują, że decydującą rolę przy rozdziale wektora prądów zewnętrznych na sieć odgrywają dwa operatory: operator optymalizujący określony we wzorze (8) i operator sterowania, którego definicja zawiera się we wzorach (9) i (10).

Wprowadzając w nich rozszczepienie modulacyjne (20) zmiennej niezależnej otrzymuje się odpowiednie poprawki modulacyjne, które umożliwiają wyznaczenie rozkładu prądów, w sytuacji gdy wektor prądów zewnętrznych jest okresowy, zmodulowany.

Zniekształcenie operatora optymalizującego przebiega następująco:

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_0 \rightarrow \left( \mathbf{R} + \frac{d\mathbf{R}}{ds} \sigma \right)^{-1} \left( \mathbf{R}_0 + \frac{d\mathbf{R}_0}{ds} \sigma \right)$$



a pomijając drugą potęgę wolnozmiennego operatora różniczkowania  $\sigma$ , otrzymuje się:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0 \rightarrow \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{R}_0}{ds} - \frac{d\mathbf{R}}{ds}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0\right)\sigma \quad (25)$$

Drugi składnik w wyrażeniu (25) stanowi właśnie wspomnianą poprawkę modulacyjną w operatorze optymalizacyjnym.

Natomiast operator sterowania  $\mathbf{X}^{st}(s)$  transformuje się następująco z uwzględnieniem tych samych zasad co przy transformacji operatora optymalizującego:

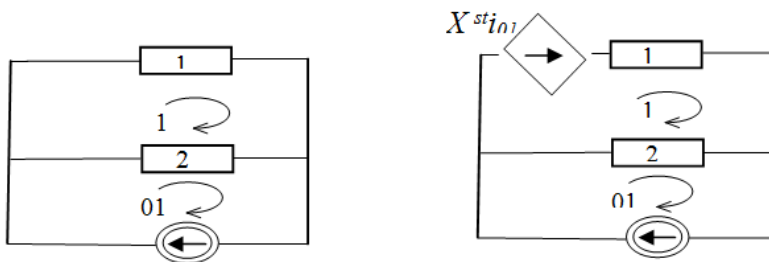
$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{st}(s + \sigma) &= \left(\mathbf{X} + \frac{d\mathbf{X}}{ds}\sigma\right)\left(\mathbf{R} + \frac{d\mathbf{R}}{ds}\sigma\right)^{-1}\left(\mathbf{R}_0 + \frac{d\mathbf{R}_0}{ds}\sigma\right) - \mathbf{X}_0 - \frac{d\mathbf{X}_0}{ds}\sigma \quad (26) \\ \mathbf{X}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0 - \mathbf{X}_0 &+ \left[\mathbf{X}\mathbf{R}^{-1}\left(\frac{d\mathbf{R}_0}{ds} - \frac{d\mathbf{R}}{ds}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0\right) + \frac{d\mathbf{X}}{ds}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0 - \frac{d\mathbf{X}_0}{ds}\right]\sigma \end{aligned}$$

**Przykład**

Na rys. 5 przedstawiono sieć złożoną z dwóch równoległych dwójników opisanych operatorami impedancyjnymi  $Z_1(s)$  i  $Z_2(s)$ , które w rozkładach na części hermitowską i skośnie-hermitowską dają:

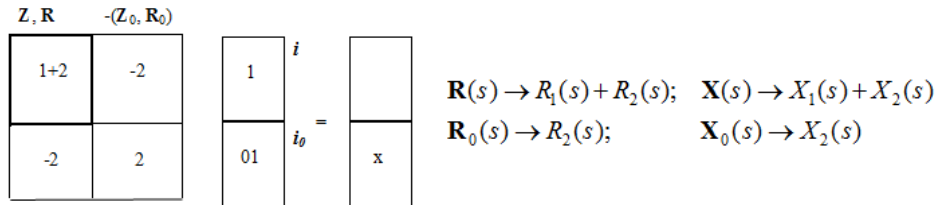
$$Z_1(s) = R_1(s) + X_1(s); \quad Z_2(s) = R_2(s) + X_2(s)$$

Wektor prądów zewnętrznych ma pojedynczą współrzędną – sygnał okresowy zmodulowany  $i_{01}(t, \tau)$ , tj.:  $i_{01}(t+T, \tau) = i_{01}(t, \tau)$ .



Rys. 5. Rozdział optymalny sygnału prądu 01 na dwie równoległe gałęzie: a) obwód bez sterowania, b) obwód z udziałem sterowania

Z kolei na rys. 6 pokazano schemat struktury układu równań sieci ( $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{R}$ ;  $\mathbf{Z}_0$ ,  $\mathbf{R}_0$ ), w którym macierze składowe  $\mathbf{R}(s)$ ,  $\mathbf{R}_0(s)$  oraz  $\mathbf{X}(s)$ ,  $\mathbf{X}_0(s)$  przyjmują postać jednowymiarową jak na rys. 6.

Rys. 6. Schemat struktury układu równań (Z, R; Z<sub>0</sub>, R<sub>0</sub>) dla obwodu elektrycznego z rys. 5

Zatem jednowymiarowe operatory: optymalizujący i sterowania mają postać:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_0 = \frac{R_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)} + (R_1(s) + R_2(s))^{-1} \left( \frac{dR_2}{ds} - \frac{d(R_1 + R_2)}{ds} \frac{R_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)} \right) \frac{d}{d\tau}$$

$$X^{st} = \frac{X_1(s) + X_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)} R_2(s) - X_2(s) + \left[ \frac{X_1(s) + X_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)} \left( \frac{dR_2}{ds} - \frac{d(R_1 + R_2)}{ds} \frac{R_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)} \right) + \frac{d(X_1 + X_2)}{ds} \frac{R_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)} - \frac{dX_2}{ds} \right] \frac{d}{d\tau}$$

W szczególności, gdy dwójniki 1, 2 są układami szeregowymi RL, tj. gdy:

$$Z_{1,2}(s) = r_{1,2} + sL_{1,2}$$

operator optymalizujący przyjmuje bezdyspersyjną postać  $\frac{r_2}{r_1 + r_2}$ , a operator

sterowania:

$$s \frac{L_1 + L_2}{r_1 + r_2} - sL_2 + \left( \frac{L_1 + L_2}{r_1 + r_2} r_2 - L_2 \right) \frac{d}{d\tau} = \frac{L_1 r_2 - L_2 r_1}{r_1 + r_2} \left( \frac{d}{dt} + \frac{d}{d\tau} \right)$$

Przykładowo, wtedy działanie operatora sterowania na sygnał prądu zewnętrznego zachodzi następująco:

$$X_{\text{opt}} i_{01}(t, \tau) = \frac{L_1 r_2 - L_2 r_1}{r_1 + r_2} \left( \frac{di_{01}(t, \tau)}{dt} + \frac{di_{01}(t, \tau)}{d\tau} \right)$$

#### 4. WNIOSKI

Niniejsze opracowanie jest rozszerzeniem publikacji [5] i [7] na przypadek, gdy sygnały wejściowe w sieci elektrycznej są okresowe, zmodulowane, tj. są funkcjami 2-D takimi, że  $x(t+T, \tau) = x(t, \tau)$ . Wówczas każdy liniowy, czasowo-

niezmienniczy operator  $H(s)$  zniekształca się zgodnie z przybliżonym rozwinięciem Taylora:

$$H(s) \rightarrow H(s + \sigma) = H(s) + \frac{dH}{ds} \sigma$$

$$s = \frac{d}{dt}; \quad \sigma = \frac{d}{d\tau}$$
(27)

Drugi składnik w rozwinięciu (27) operatora  $H(s)$  jest tzw. poprawką modulacyjną. Rozwinięcie to jest dostatecznie dokładne dla „powolnych” modulacji. Przy modulacjach „szybszych” w rozkładzie (27) należy uwzględnić wyższe rzędy operatora  $\sigma$  odpowiedniego szeregu Taylora [9]:

$$H(s + \sigma) = H(s) + \frac{dH}{ds} \sigma + \frac{1}{2} \frac{d^2 H}{ds^2} \sigma^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 H}{ds^3} \sigma^3 + \dots$$

Jak wykazano w pracy [7] korzystne jest rozwinięcie operatorów impedancji w szeregi potęgowe operatorów wielokrotnie różniczkujących:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{r}_n s^{2n} + s(\mathbf{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{L}_n s^{2n})$$
(28)

W rozwinięciu (28) widoczne są: parzysty składnik – operator  $\mathbf{R}(s)$  i nieparzysty –  $\mathbf{X}(s)$ . Składniki te doznają zniekształceń modulacyjnych:

$$\mathbf{R}(s + \sigma) = \mathbf{R}(s) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2n \mathbf{r}_n s^{2n-1} \right) \frac{d}{d\tau}$$

$$\mathbf{X}(s + \sigma) = \mathbf{X}(s) + \left( \mathbf{L} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \mathbf{L}_n s^{2n} \right) \frac{d}{d\tau}$$
(29)

Rozwinięcia (29) stanowią z kolei podstawę do wyznaczenia poprawek modulacyjnych operatorów: optymalizacyjnego i sterowania.

## LITERATURA

- [1] Desoer C. A.: The maximum power transfer theorem for n-ports. *IEEE Trans.*, Vol. CT-20 (1979), 228–230.
- [2] Rohrer R. A.: Optimal matching: A new approach to the matching problem for real invariant one port networks. *IEEE Trans.*, Vol. CT-15 (1968), 118–124.
- [3] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Minimalno – energetyczny rozkład sygnałów sinusoidalnych w obwodach elektrycznych, *Wiadomości Elektrotechniczne*, 9 (2014), 22–25.
- [4] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Minimalno-energetyczny rozptyw prądowych sygnałów elektrycznych w przestrzeni liniowej  $L^1$  – impulsów. *Przegląd Elektrotechniczny*, R90 (2014), nr 12, 47–51.
- [5] Siwczyński M., Drwal A., Żaba S.: Energetycznie optymalny rozdział prądu w złożonej liniowej sieci elektrycznej z impulsowymi lub okresowymi przebiegami

- sygnałów napięciowych i prądowych. Sterowanie optymalne. *Bull. of the Polish Acad. of Science, Techn. Scie.* (2015) (przyjęty do druku).
- [6] Siwczyński M., Drwał A., Żaba S.: Energetycznie optymalny rozdział prądu w złożonej liniowej sieci elektrycznej z impulsowymi lub okresowymi przebiegami sygnałów napięciowych i prądowych. Sterowanie suboptymalne. *Bull. of the Polish Acad. of Science, Techn. Scie.* (2015) (w recenzji).
- [7] Siwczyński M., Drwał A., Żaba S.: Energetycznie optymalny rozdział prądu w sieci elektrycznej – sterowanie za pomocą układów różniczkujących bądź całkujących. *Bull. of the Polish Acad. of Science, Techn. Scie.* (2015) (w recenzji).
- [8] Siwczyński M., Hawron K.: Rozkłady G, B operatorów dwójników elektrycznych i ich zaburzenia modulacyjne. *Przegląd Elektrotechniczny*, R91 (2015) , 10, 257–261.
- [9] Siwczyński M., Hawron K.: Rozkłady G, B operatorów immitancyjnych zaburzonych modulacyjnie – zaburzenia wyższego rzędu. *Przegląd Elektrotechniczny*, R91 (2015) , 9, 78–80.

#### ENERGY OPTIMAL DISTRIBUTION OF CURRENT MODULATED SIGNALS IN A COMPLEX LINEAR ELECTRICAL NETWORK

In a complex *RLC* network, apart from the currents flows arising from the normal laws of Kirchhoff, other distributions of current, resulting from certain optimization criteria may also be received. The article [5] examined the distribution that meets the condition of the minimum energy losses within the network, called the *energy-optimal distribution*. The optimal distribution is not reachable itself, but in order to trigger it off, it is necessary to introduce the control system in the current-dependent voltage sources vector, entered into a mesh set of a complex *RLC* network. This study is an extension of the article [5] for the case when the electrical input signals are periodic, modulated. It presented a crucial aspect of the type of modulation described in the article, so-called modulating fission of differentiation operator which takes into account the modulation amendment.

(Received: 27. 01. 2017, revised: 15. 02. 2017)