

Zygmunt MAZUR
Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Zarządzania
zygmunt.mazur@pwr.edu.pl

Janusz PEC
Główny Urząd Statystyczny, Warszawa
j.pec@stat.gov.pl

IDENTYFIKACJA SPECYFIK STATYSTYKI PUBLICZNEJ Z ZASTOSOWANIEM ZMODYFIKOWANEJ WAŻONEJ ROZMYTEJ METODY DELFICKIEJ

Streszczenie. W artykule wykorzystano zmodyfikowaną ważoną rozmytą metodę delficką, używaną w zastosowaniach informatyki w obszarze sztucznej inteligencji, do rozwiązania problemu statystyki publicznej. Analiza technik stosowanych w *Artificial Intelligence* wskazuje na możliwość implementacji reprezentacji wiedzy za pomocą teorii zbiorów rozmytych, łącznie z rozmytymi technikami wnioskowania (logika rozmyta) w obszarze identyfikacji specyfik statystyki publicznej. Metoda ta, biorąc pod uwagę realia pracy statystyki publicznej, wydaje się przydatna przy identyfikacji jej specyfik, z którymi mogą się zmagać urzędy statystyczne lub jej pozostałe komórki organizacyjne. Szerzej problemy te opisano w artykułach [5] i [6]. Autorzy niniejszego opracowania zmodyfikowali znaną z literatury ważoną rozmytą metodę delficką do identyfikacji specyfik statystyki publicznej przedstawiając jej działanie na przykładzie.

Słowa kluczowe: zbiory rozmyte, zmodyfikowana metoda delficka, specyfika statystyki publicznej, sztuczna inteligencja, rozmyte liczby trójkątne

THE USE OF MODIFIED AND WAGED DELPHI FUZZY METHOD IN PROCESS OF IDENTIFICATION CHARACTERISTICS OF OFFICIAL STATISTICS

Abstract. The article discusses, the concept of the use of a modified by authors of the well-known heuristic methods of decision making called *Delphi method* to help solve two basic issues; the identification characteristics of public statistics and objectivity of assessments. In order to obtain objectivity of expert assessments it was proposed by authors appropriate construction of the

standardization of weights in weighted method, which takes into account the degree of convergence of the inference rules expert's group. Identification of characteristics of public statistics can be a difficult even for specialists of statistics. Specialist dealing with various areas of official statistics usually not overwhelms the whole functioning of your organization, and what's more important any organization may not fully understand the processes inside and discern the effects of such activities (e.g. informal processes-hidden or unconscious). By the way, it is in a certain sense natural and understandable, especially in the absence of the information model. Presented here modified weighted fuzzy inference technique including a new algorithm to assign standardized weights experts can greatly facilitate decision-making not only related to statistics, but also to other related tools – more or less used in an area of artificial intelligence.

Keywords: fuzzy sets, modified Delphi method, characteristics of public statistics, artificial intelligence, triangular fuzzy numbers

1. Wprowadzenie do teorii zbiorów rozmytych

Na wstępie, dla zobrazowania zmodyfikowanej metody delfickiej użytej do rozwiązania pewnego problemu statystyki publicznej, wprowadzimy tylko niezbędne podstawowe pojęcia i terminy zaczerpnięte z zakresu sztucznej inteligencji w obszarze logiki rozmytej i wnioskowania rozmytego. Pełny opis teorii zbiorów rozmytych i ich zastosowań można znaleźć w licznych monografiach. Teorię zbiorów rozmytych zaproponował Lofti Zadeh w pracy [8]. Na uwagę zasługują też artykuły [2] i [4], gdzie podano podstawowe operacje na zbiorach rozmytych. W pracy [1] podano liczne zastosowania do zagadnień ekonomii i zarządzania. Szeroki zakres zastosowań w technice (m.in. sterowniki rozmyte) został opisany w pracy [3]. W niniejszej pracy przyjęto definicje i konwencję notacji dotyczącą teorii zbiorów rozmytych zaproponowane w pracy [7].

Zacznijmy od krótkiej prezentacji podstawowych pojęć „zbioru rozmytego”.

Definicja 1

Zbiorem rozmytym A w pewnej niepustej przestrzeni X ($A \subseteq X$) nazywamy zbiór par $A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$, gdzie $\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A , przy czym:

- 1) $\mu_A(x) = 1$ oznacza pełną przynależność elementu x do zbioru rozmytego A , tzn. $x \in A$,
- 2) $\mu_A(x) = 0$ oznacza brak przynależności elementu x do zbioru rozmytego A , tzn. $x \notin A$,
- 3) $0 < \mu_A(x) < 1$ oznacza częściową przynależność elementu x do zbioru rozmytego A .

W przypadku, jeśli przestrzeń X jest zbiorem o skończonej ilości elementów: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, zbiór rozmyty A możemy zapisać następująco (notacja Zadeha): $A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x_i$.

W przypadku, jeśli przestrzeń \mathbf{X} jest przestrzenią o nieskończonej liczbie elementów to zbiór rozmyty A zapisujemy symbolicznie jako: $A = \int_{\mathbf{X}} \mu_A(x) / x$.

W celu wyjaśnienia mechanizmu wnioskowania rozmytego wprowadzimy niezbędne terminy i definicje. Zacniemy od definicji zasady rozszerzania pozwalającej transponować operacje matematyczne ze zbiorów nierozmytych na zbiory rozmyte. Dla uproszczenia rachunków zakładamy, że zbiór \mathbf{X} jest zbiorem o skończonej ilości elementów.

Definicja 2

Niech \mathbf{X} będzie iloczynem kartezjańskim zbiorów nierozmytych $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n$ oraz niech będą dane pewne zbiory rozmyte $A_1 \subseteq \mathbf{X}_1$, $A_2 \subseteq \mathbf{X}_2$, ..., $A_n \subseteq \mathbf{X}_n$ oraz nierozmyte odwzorowanie $f: \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Y}$. Zasada rozszerzania mówi, że zbiór rozmyty B określony przez odwzorowanie f jest postaci:

$$B = f(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{(y, \mu_B(y)); y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X}\},$$

przy czym

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(\mathbf{x}), \mu_{A_2}(\mathbf{x}), \dots, \mu_{A_n}(\mathbf{x})\} & \text{jeżeli } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{jeżeli } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Wprowadzimy jeszcze definicje t-normy i t-konormy istotne dla wnioskowania rozmytego.

Definicja 3

Odwzorowanie $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dwóch zmiennych a i b nazywamy t-normą, jeśli:

- (1) odwzorowanie T jest niemalejące, $T(a, c) \leq T(b, d)$ dla $a \leq b$, $c \leq d$; $\{a, b, c, d\} \in [0, 1]$,
- (2) odwzorowanie T jest przemienne, $T(a, b) = T(b, a)$,
- (3) odwzorowanie T jest łączne, $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$,
- (4) odwzorowanie T spełnia tzw. warunek brzegowy $T(a, 1) = a$,

gdzie: $a, b, c, d \in [0, 1]$. Łatwo zauważyć, że z warunków (1), (2) i (4) wynika, iż $T(a, 0) = 0$.

Odpowiednio t-konorma to odwzorowanie $S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ spełniająca wszystkie 3 pierwsze warunki oraz zmieniony warunek czwarty (brzegowy) na $S(a, 0) = a$.

Łatwo zauważyć, że $S(a, 1) = 1$, co wynika z warunków definicyjnych. Operacje t-normy i t-konormy na argumentach a, b będziemy oznaczać odpowiednio $a *^T b$ i $a *^S b$. Pojęcie t-normy i t-konormy jest wykorzystane przy definicji złożenia zbioru rozmytego, relacji rozmytej $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ oraz umożliwia uogólnienie pojęcia przecięcia i sumy zbiorów rozmytych.

1.1. Podstawowe operacje na zbiorach rozmytych

W większości przypadków istnieje wiele możliwości uogólniania operacji na zbiorach klasycznych na zbiory rozmyte. W niniejszym podrozdziale skupimy się na wybranych operacjach, które są najczęściej stosowane w regulatorach o logice rozmytej.

Suma zbiorów

Niech zbiory rozmyte $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbf{X}$. Ich suma jest podzbiorem rozmytym $\bigcup_{i=1}^n A_i$ przestrzeni \mathbf{X} , takim, że dla każdego $x \in \mathbf{X}$ funkcja przynależności

$$\mu_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}(x) = \max[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)].$$

Wykorzystując pojęcie t-konormy S możemy uogólnić pojęcie sumy zbiorów określając funkcję przynależności $\mu_A(x) = S_{i=1}^n \mu_{A_i}(x)$.

Iloczyn zbiorów

Niech zbiory rozmyte $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbf{X}$. Ich iloczyn jest podzbiorem rozmytym $\bigcap_{i=1}^n A_i$ przestrzeni \mathbf{X} , takim, że dla każdego $x \in \mathbf{X}$ funkcja przynależności

$$\mu_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n}(x) = \min[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)].$$

Wykorzystując pojęcie t-normy T możemy uogólnić pojęcie iloczynu zbiorów określając funkcję przynależności $\mu_A(x) = T_{i=1}^n \mu_{A_i}(x)$.

Dopełnienie zbioru

Niech zbiór A będzie zbiorem rozmytym przestrzeni \mathbf{X} . Dopełnienie zbioru A jest podzbiorem rozmytym B przestrzeni \mathbf{X} , takim, że dla każdego $x \in \mathbf{X}$ funkcja przynależności $\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Definicja 4

Relacja rozmyta R między dwoma nierozmytymi zbiorami X i Y określona na iloczynie kartezjańskim $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ jest zbiorem par:

$$R = \{(x, y), \mu_R(x, y)\}, \forall_{x \in X} \forall_{y \in Y} \text{ przy odwzorowaniu } \mu_R : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow [0, 1].$$

Definicja 5

Złożeniem $A \circ R$ zbioru rozmytego $A \subseteq \mathbf{X}$ i relacji rozmytej $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ jest zbiór rozmyty $B = A \circ R \subseteq \mathbf{Y}$ o funkcji przynależności $\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \{\mu_A(x) *^T \mu_R(x, y)\}$.

W zależności od przyjętej t-normy $T(a, b)$ mamy:

1. jeśli $T(a, b) = \min(a, b)$, to otrzymujemy złożenie typu sup-min tj. funkcja przynależności $\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \{\min[\mu_A(x), \mu_R(x, y)]\}$;
2. jeśli $T(a, b) = \min(a, b)$ oraz X jest zbiorem o skończonej liczbie elementów, to otrzymujemy złożenie typu max-min, $\mu_B(y) = \max_{x \in X} \{\min[\mu_A(x), \mu_R(x, y)]\}$;

3. jeśli $T(a, b) = a \cdot b$, to mamy złożenie typu *sup-iloczyn*, $\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\}$;
4. jeśli $T(a, b) = a \cdot b$ oraz X jest zbiorem o skończonej liczbie elementów, to otrzymujemy złożenie typu *max-iloczyn*, $\mu_B(y) = \max_{x \in X} \{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\}$.

Ważną rolę spełniają we wnioskowaniu rozmytym liczby rozmyte. Poniżej przyjmijmy ich definicję.

Definicja 6

Zbiór rozmyty A ($A \subseteq \mathbf{R}$, \mathbf{R} zbiór liczb rzeczywistych) o funkcji przynależności: $\mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ spełniający warunki:

- 1) $\sup_{x \in \mathbf{R}} \mu_A(x) = 1$;
- 2) $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$ – wypukłość zbioru A ;
- 3) $\mu_A(x)$ jest funkcją przedziałami ciągłą;

nazywamy **liczbą rozmytą**.

Rozróżniamy liczby rozmyte dodatnie i ujemne:

- liczba rozmyta $A \subseteq \mathbf{R}$ jest **dodatnia**, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla wszystkich $x < 0$;
- liczba rozmyta $A \subseteq \mathbf{R}$ jest **ujemna**, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla wszystkich $x > 0$.

Na liczbach rozmytych można zdefiniować podstawowe operacje arytmetyczne, takie jak:

- dodawanie $A_1 \oplus A_2 \stackrel{\text{def}}{=} B$, gdzie $\mu_B(y) = \sup_{\{x_1, x_2 : y = x_1 + x_2\}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
- odejmowanie $A_1 - A_2 \stackrel{\text{def}}{=} B$, gdzie $\mu_B(y) = \sup_{\{x_1, x_2 : y = x_1 - x_2\}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
- mnożenie $A_1 \otimes A_2 \stackrel{\text{def}}{=} B$, gdzie $\mu_B(y) = \sup_{\{x_1, x_2 : y = x_1 \cdot x_2\}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$
- dzielenie $A_1 \div A_2 \stackrel{\text{def}}{=} B$, gdzie $\mu_B(y) = \sup_{\{x_1, x_2 : y = x_1 / x_2\}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}$

W niektórych zastosowaniach szeroko używane są tzw. **liczby trójkątne**. Będziemy ich później używać w naszej metodzie wnioskowania o identyfikacji specyfik.

Definicja 7

Liczba postaci $A = (a_1, a_M, a_2)$ jest trójkątna, jeśli warunek 1) z poprzedniej definicji zachodzi dla $x = a_M$.

Suma dwóch liczb trójkątnych jest też liczbą trójkątną tzn.:

$$A_1 + A_2 = (a_1^{(1)}, a_M^{(1)}, a_2^{(1)}) + (a_1^{(2)}, a_M^{(2)}, a_2^{(2)}) = (a_1^{(1)} + a_1^{(2)}, a_M^{(1)} + a_M^{(2)}, a_2^{(1)} + a_2^{(2)}).$$

Zachodzi to dla dowolnej przeliczalnej ilości liczb trójkątnych.

W procesie wnioskowania rozmytego często stosuje się tzw. blok „wyostrzania”. Dla liczb rozmytych trójkątnych stosuje się m.in. następujące metody „wyostrzania”:

$$\begin{aligned}
 & i. \quad y^{(1)} = a_{\mu}; \\
 & ii. \quad y^{(2)} = (a_1 + a_M + a_2) / 3; \\
 & iii. \quad y^{(3)} = (a_1 + 2 a_M + a_2) / 4; \\
 & iv. \quad y^{(4)} = (a_1 + 4 a_M + a_2) / 6.
 \end{aligned} \tag{1}$$

1.2. Zasady wnioskowania rozmytego

We wnioskowaniu rozmytym zasadniczą rolę odgrywa reguła wnioskowania zwana „uogólnioną rozmytą regułą wnioskowania *modus tollens*” opisaną niżej. Jeżeli $A' = \sim A$ oraz $B' = \sim B$, gdzie znak „ \sim ” oznacza zaprzeczenie, to uogólniona rozmyta reguła *modus tollens* sprowadza się do zwykłej reguły *modus tollens* w tradycyjnej logice klasycznej.

W logice rozmytej stosuje się pojęcie zmiennej lingwistycznej. Jest to zmienna, która przyjmuje wartości wypowiedziane w języku naturalnym, np. „mały samochód”. Takim zmiennym można przyporządkować pewne zbiory rozmyte w celu formalizacji. Zmienne lingwistyczne oprócz wartości słownych mogą również przyjmować wartości liczbowe.

Tabela 1 opisuje wspomnianą wyżej „uogólnioną rozmytą regułą *modus tollens*”.

Tabela 1

Uogólniona rozmyta reguła wnioskowania

Przesłanka	y jest B'	y – zmienna lingwistyczna B'
Implikacja	(A → B) JEŻELI x jest A TO y jest B	x, y – zmienne lingwistyczne A ⊆ X, B ⊆ Y
Wniosek	x jest A'	x – zmienna lingwistyczna A' ⊆ X

Źródło: Opracowanie własne

Zbiór A' jest określony przez złożenie relacji $A' = (A \rightarrow B) \circ B'$, gdzie funkcja przynależności $\mu_{A'}(x) = \sup_{y \in Y} \{ \mu_{A \rightarrow B}(x, y) *^T \mu_{B'}(y) \}$. Jeżeli t-norma jest typu min, to funkcja przynależności ma postać $\mu_{A'}(x) = \sup_{y \in Y} \{ \min[\mu_{A \rightarrow B}(x, y), \mu_{B'}(x, y)] \}$.

Drugą regułą używaną w logice rozmytej jest „uogólniona reguła *modus ponens*” opisana w tabeli 2.

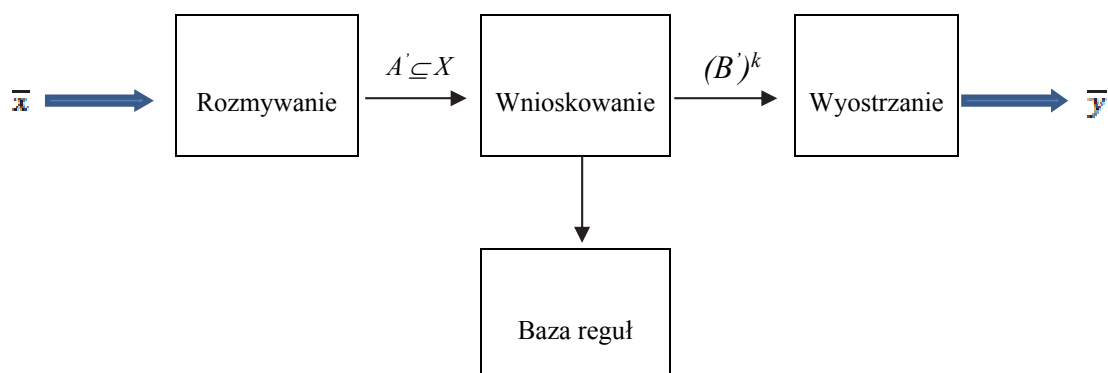
Tabela 2

Uogólniona reguła wnioskowania „modus ponenes”

Przesłanka	x jest A'	x – zmienna lingwistyczna A'
Implikacja	(A → B) JEŻELI x jest A TO y jest B	x, y – zmienne lingwistyczne A ⊆ X, B ⊆ Y
Wniosek	y jest B'	y – zmienna lingwistyczna B' ⊆ X

Źródło: Opracowanie własne

Ogólny schemat wnioskowania rozmytego można schematycznie przedstawić jak na rysunku 1, gdzie \bar{x} i \bar{y} oznaczają odpowiednio konkretną wartość zmiennej wejściowej i wyjściowej w schemacie wnioskowania rozmytego. Blok rozmywania (ang. *fuzzification*) konkretną wartość $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \in X$ odwzorowuje w zbiór rozmyty $A' \subseteq X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Jeżeli sygnał wejściowy jest zakłócony i został pomierzony łącznie z zakłóceniem, to funkcję przynależności można wyrazić w postaci $\mu_{A'}(x) = \exp [-(x - \bar{x})^T (x - \bar{x}) / \delta]$, gdzie $\delta > 0$ jest znaną w teorii sterownia funkcją typu **singleton**.



Rys. 1. Ogólny schemat wnioskowania rozmytego

Źródło: Opracowanie własne.

Jeżeli na wyjściu bloku wnioskowania otrzymamy n zbiorów rozmytych $\bar{B}^k \subseteq Y$ zgodnie z uogólnioną rozmytą regułą *modus ponens*, to funkcja przynależności zbioru rozmytego $\bar{B}^k = A' \circ (\mu_{A^k} \rightarrow B^k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, wyraża się wzorem $\mu_{\bar{B}^k} = \sup_{x \in X} [\mu_{A'}(x) * \mu_{A^k \rightarrow B^k}(x, y)]$.

W celu dokładniejszego przedstawienia rozmytych reguł wnioskowania podamy jeszcze definicję implikacji rozmytej.

Definicja 8

Implikacja rozmyta jest funkcją $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ spełniającą następujące warunki:

- a) jeżeli $a_1 \leq a_3$, to $I(a_1, a_2) \geq I(a_3, a_2)$ dla wszystkich $a_1, a_2, a_3 \in [0, 1]$,
- b) jeżeli $a_2 \leq a_3$, to $I(a_1, a_2) \leq I(a_1, a_3)$ dla wszystkich $a_1, a_2, a_3 \in [0, 1]$,
- c) $I(0, a_2) = 1$ dla wszystkich $a_2 \in [0, 1]$,
- d) $I(a_1, 1) = 1$ dla wszystkich $a_1 \in [0, 1]$,
- e) $I(1, 0) = 0$.

W praktyce rozróżniamy 3 podstawowe typy implikacji rozmytych spełniające wszystkie lub niektóre warunki a), b), c), d), e). Oto przykładowi reprezentanci dla każdej z tych klas:

S-implikacje postaci $I(a, b) = S\{1 - a, b\}$ np.:

- $\min\{1, 1 - a + b\}$ – implikacja (Łukasiewicz)
- $1 - a + a \cdot b$ – implikacja (Reichenbach)

R-implikacje postaci $I(a, b) = \sup_z \{z \mid T(a, z) \leq b\}$, $a, b \in [0, 1]$, np.:

- $\begin{cases} 1, & \text{jeżeli } a \leq b \\ b, & \text{jeżeli } a > b \end{cases}$ – implikacja (Gödel)
- $\begin{cases} 1, & \text{jeżeli } a = 0 \\ \min\{1, \frac{a}{b}\}, & \text{jeżeli } a > 0 \end{cases}$ – implikacja (Goguen).

Q-pseudoimplikacje postaci $I(a, b) = S\{N(a), T(a, b)\}$, $a, b \in [0, 1]$, ($N(a)$ – operator negacji), np.:

- $\max\{\min(a, b), 1 - a\}$ – implikacja (Zadeh).

Operacja negacji N jest funkcją nierosnącą $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ oraz spełnia dwa warunki:

- $N(0) = 1$,
- $N(1) = 0$.

Oprócz reguł wnioskowania opartych na implikacjach rozmytych mamy jeszcze tzw. „inżynierskie reguły wnioskowania” używane w modelu Mamdaniego, oparte o funkcję przynależności $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$ zdefiniowaną przez dowolną t-normę T zdefiniowaną następująco: $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y))$.

Najczęściej przyjmuje się normę typu minimum $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$ lub w postaci iloczynu $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_R(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$. Nie są one implikacjami w sensie logicznym.

2. Przykład zastosowania zmodyfikowanej ważonej rozmytej metody delfickiej do określania specyfik statystyki publicznej

Niniejszy rozdział będzie poświęcony pewnej modyfikacji rozmytej ważonej metody delfickiej zaproponowanej przez autorów niniejszego opracowania poprzez wprowadzenie zamian w systemie ważenia ocen ekspertów z zamiarem zobiektywizowania wyników wnioskowania. W rzeczywistości zbiór reguł, którymi posługuje się ekspert w procesie podejmowania decyzji jest odbiciem jego wiedzy, doświadczenia, własnych przekonań, bieżącej znajomości sprawy, którą będzie rozstrzygał i jeszcze wielu innych rzeczy. Obiektywizację różnych niezależnych spojrzeń na rozpatrywany problem, można bowiem przeprowadzić poprzez fakt uwzględnienia (po uzgodnieniach między ekspertami w ważonej rozmytej metodzie delfickiej) stosunku liczby akceptowanych przez wszystkich ekspertów reguł wnioskowania do liczby zaproponowanych reguł własnych danego eksperta, co mówi o trafności i zbieżności jego oceny z ocenami pozostałych osób, a więc w pewnym sensie mówi o wartości jego opinii.

Założmy więc, że mamy $n \geq 2$ ekspertów E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i każdy z nich wykorzystuje m_i reguł wnioskowania oraz że zbiór reguł R_i dla każdego eksperta spełnia $|R_i| = m_i \geq 2$. Tym sposobem eliminujemy z naszych rozważań krańcowe „zwyrodniałe” przypadki, w których jest tylko jeden ekspert posługujący się tylko jedną regułą. Możemy więc próbować utworzyć zbiór $R_w = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \dots \cap R_n$. Przypiszmy odpowiednio wagi w_i dla każdego eksperta określając w ten sposób wpływ każdego z nich na ostateczny kształt wspólnie wypracowanej decyzji.

Założmy, że postępujemy w sposób podany niżej – wykonujemy następujące kroki od a do f procedury. Ustalamy zbiór $R_w = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \dots \cap R_n$. Eksperti tworzą najpierw sumaryczną listę reguł $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \dots \cup R_n$ i sprawdzają, czy można utworzyć zbiór R_w . Jeżeli tak, to przechodzimy do kroku c. Jeżeli nie, tzn. $R_w = \emptyset$, to eksperci spotykają się ponownie i muszą ustalić R_w , czyli minimalny zbiór reguł, co do którego są zgodni:

- $|R_w| = k$, gdzie symbol „ $|$ ” oznacza moc zbioru.
- Początkowo przypisujemy każdemu ekspertowi E_i wagę $w_i = 1/n$.
- Obliczamy dla każdego eksperta liczbę $\frac{k}{m_i}$.
- Obliczamy dla każdego eksperta E_i wagę $w_i' = \frac{k}{m_i} \cdot \frac{1}{n}$.
- Obliczamy wartość $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k}{m_i}$.
- Obliczamy wartość $p = (1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k}{m_i}) / n$ i dodajemy ją do liczby w_i' otrzymując nową wagę $w_i'' = w_i' + p$ dla każdego eksperta E_i .

Łatwo zauważyć, że

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i^n = 1 \quad (2)$$

ponieważ:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} w_i^n &= \sum_{i=1}^{i=n} (w_i' + p) = \sum_{i=1}^{i=n} p + \sum_{i=1}^{i=n} w_i' = n \cdot p + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k}{m_i} = n \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k}{m_i}}{n} \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k}{m_i} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k}{m_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k}{m_i} = 1 \end{aligned}$$

Poza oczywistym przypisaniem arbitralnym istnieją również alternatywne sposoby przypisywania wag ekspertom: pierwsze cztery punkty poprzedniej procedury są identyczne, następuje natomiast zmiana w punktach e, f. Jest to procedura iteracyjna.

e'. Obliczamy wartość $W = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{k}{m_i}$.

f'. W zależności od wartości W przypisujemy ekspertowi E_i wagę w_i w sposób opisany niżej:

$$\begin{cases} w_i = \frac{k}{m_i}, & \text{jeżeli } W = 1 \\ w_i = \frac{k}{m_i} \frac{1}{W} & \text{jeżeli } W \neq 1 \end{cases}$$

W tym przypadku oczywiście również mamy z definicji $\sum_{i=1}^{i=n} w_i = 1$.

Rozważmy problem listy reguł, czyli zawartość zbioru reguł. W nawiązaniu do naszego problemu z dziedziny statystyki publicznej i w nawiązaniu do omawianej listy specyfik przyjmijmy, że zbiór reguł $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \dots \cup R_{11}$ stanowi listę rozmytych reguł *modus ponens* zawierających implikacje postaci „jeżeli x_1 jest A^1 i x_2 jest A^2 i x_3 jest A^3 i x_4 jest A^4 , to y jest B ”. W strukturze reguł wykorzystujemy spójnik logiczny „i” oraz zaimek wskazujący symbolizujący wynikanie – „to”. W sumie mamy 11 reguł do analizy.

Założmy, że

- pierwszym zmiennym członem tej implikacji są zdania z podanej niżej listy reguł L , ($|L| = 11$):
 - (1) jeżeli x_1 jest przygranicznym **josp-em**¹;
 - (2) jeżeli x_1 jest **josp-em**, który uczestniczy aktywnie w pracach ESS dotyczących integracji statystyki (np. integracja statystyki gospodarczej FRIBS);
 - (3) jeżeli x_1 posiada działający system informacyjny w postaci specjalizowanej struktury bazodanowej;

¹ jednostka organizacyjna statystyki publicznej (**josp**).

- (4) jeżeli x_1 prowadzi działalność monitorującą wdrożenia;
- (5) jeżeli x_1 współpracuje z jednostkami zewnętrznym;
- (6) jeżeli x_1 zajmuje się metodologią statystyczną;
- (7) jeżeli x_1 jest zobowiązany prawnie jako jedyny upoważniony;
- (8) jeżeli x_1 prowadzi działalność archiwizacyjną;
- (9) jeżeli x_1 jest zobowiązany etyką;
- (10) jeżeli x_1 wizualizuje przestrzennie;
- (11) jeżeli x_1 publikuje na bieżąco;

- drugim członem jest: „ x_2 uczestniczy w działalności statystycznej”;
- trzecim członem jest: „ x_3 posiada (jest w posiadaniu) odpowiednią wyspecjalizowaną kadrę”;
- czwartym członem jest: „ x_4 posiada (jest w posiadaniu) odpowiednie środki finansowe”;
- ostatnim członem (wnioskiem) jest: „ y jest specyfiką statystyki publicznej”.

Dodatkowo zakładamy, że;

- przedziały dla wartości zmiennej lingwistycznej $x_1 \in \{US^2, \text{departament GUS, ZWS}^3, CBS^4, CIS^5, CBIES^6, \text{statystyka publiczna – cały resort}\}$;
- przedziały dla wartości zmiennej lingwistycznej $x_2 \in \{PBSSP, \text{spisy powszechne, działalność informacyjno-publikacyjna, działalność badawcza, działalność edukacyjno-szkoleniowa, współpraca krajowa i zagraniczna}\}$;
- x_3 jest zmienną lingwistyczną z przedziału {nie ma, częściowo posiada, nie posiada};
- zmienna X_4 („odpowiednie środki finansowe”) jest liczbą rozmytą, zgodnie z definicją 6;
- zmienna $y \in \{Sp_1, Sp_2, \dots, Sp_{15}\}$ – zbioru specyfik z podanej niżej listy L:

Sp1. Spisy powszechne

Sp2. Statystyka małych obszarów – rozwijana u nas przez zespół Prof. Paradysza z US Poznań

Sp3. Wdrażanie wyników prac Komisji Metodologicznej GUS jako organu opiniotwórczo-doradczego i monitorującego jakość systemów i badań statystycznych oraz standardów metadanych

Sp4. Raportowanie do Eurostatu

Sp5. Współpraca transgraniczna

Sp6. Poziom i jakość współpracy metodologicznej z PTS (prowadzenie niezależnych badań statystycznych przez organy PTS takie jak BBIAS i SKiAD, możliwość rozbieżnych wyników i odmiennych metod analiz)

Sp7. Portal geostatystyczny

² Urząd Statystyczny.

³ Zakład Wydawnictw Statystycznych.

⁴ Centralna Biblioteka Statystyczna.

⁵ Centrum Informatyki Statystycznej.

⁶ Centrum Badań i Edukacji Statystycznej.

- Sp8. Specjalizacja US-ów
- Sp9. Utrzymywanie długich porównywalnych szeregów czasowych danych
- Sp10. Gwarantowanie tajemnicy statystycznej podmiotom gospodarczym
- Sp11. Bazy dziedzinowe
- Sp12. Badanie obciążeń sprawozdawców
- Sp13. Określanie standardów metadanych statystycznych
- Sp14. BDL jako platforma współpracy z samorządami
- Sp15. Informacje sygnałne.

Oto niektóre ogólne przykładowe i zarazem składowe specyfikacji statystyki publicznej (lista oczywiście nie jest kompletna) – należy dołączyć specyfikacji poszczególnych josp-ów w obszarze ich specjalizacji w odniesieniu do wszystkich grup informacji, które mogą być np. określone na II poziomie w trójpoziomowej hierarchii systemu zarządzania bezpieczeństwem informacji SZBI organizacji. **Można je również potraktować jako składowe ryzyka wysokopoziomowego dla statystyki publicznej.**

Choć nie w każdej z wymienionych 11 reguł występuje słowo „jest”, jak w uogólnionej rozmytej definicji *modus ponens*, bardzo łatwo można zamienić pozostałe reguły, aby nie zmieniając sensu zdania wystąpiło tam to słowo – np. regułę 4. można zapisać jako: „jeżeli x_1 jest jednostką prowadzącą monitoring wdrożenia”.

Blok rozmywania z rysunku 1 sprowadzimy w naszym przypadku do podania 3 możliwych subiektywnych wartości dla trójwartościowej oceny ekspertów przynależności danej specyfikacji do danej jednostki organizacyjnej statystyki publicznej. Te trzy wartości: „mało prawdopodobna”, „średnio prawdopodobna”, „bardzo prawdopodobna” podane są procentowo, przy czym oczywiście oceny nie muszą sumować się do 100%, ponieważ nie uwzględniamy ocen takich, jak np. „bardzo mało prawdopodobna”.

W naszym przypadku **rozmyta zmodyfikowana ważona procedura delficka** może być zdefiniowana w następujących po sobie krokach.

Krok 1. Wybrani przez kierownictwo organizacji eksperci E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) spotykają się i każdy z nich proponuje swoją potencjalną listę reguł, po czym tworzą ich łączną listę **L**. Jeśli któraś ze zgłoszonych reguł się powtarza, to jest zapisywana tylko raz.

Krok 2. Ekspertsi ustalają, czy istnieją reguły, które będą honorowane przez nich wszystkich. Jeśli tak, to określają zbiór $R_w = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \dots \cap R_n$. Jeśli nie, to po zastanowieniu się i przemyśleniu sprawy spotykają się ponownie w celu ustalenia przynajmniej jednej wspólnej reguły oceny. Spotkanie trwa tak długo, dopóki po dyskusjach nie spełnią wspomnianego wyżej warunku.

Krok 3. Dla każdego eksperta E_i obliczamy wagę lub w_i zgodnie z założeniami opisanymi w punktach a ÷ f w niniejszym rozdziale.

Krok 4. Eksperti zgodnie ze swoją wiedzą i doświadczeniem, pracując we "względnej" separacji (ekspert nie zna ocen swoich kolegów z bieżącej rundy, natomiast zna oceny kolegów z poprzedniej rundy) oraz biorąc pod uwagę realia pracy statystyki publicznej (środowisko) podają w postaci ułamka dziesiętnego subiektywne trzy procentowe oceny (A_1, A_2, A_3) – w naszym przypadku dotyczące przynależności specyfiki do josp-u – każdy posługując się swoim zbiorem reguł. Dodatkowo wyliczane są wartości $w_i'' \cdot A_1, w_i'' \cdot A_2, w_i'' \cdot A_3$ ($i = 1, 2, \dots, n$) uwzględniające wagę w_i'' eksperta E_i i obiektywizujące jego ocenę. Otrzymujemy rozmyte liczby – trójkątne.

Krok 5. Wyliczane są średnie ważone (np. arytmetyczne) wartości dla każdej z 3 wartości trójwartościowej oceny ekspertów.

Krok 6. Jeżeli średnie ważone w danej rundzie nie są akceptowane przez kierownictwo josp-u, to ponownie prosi się ekspertów o wyrażenie swoich ocen, umożliwiając tym razem ekspertom zapoznanie się z ocenami swoich kolegów z poprzedniej rundy i przechodzimy do kroku 4. Jeżeli natomiast wyniki są zadowalające w ocenie kierownictwa josp-u, to kończymy postępowanie.

Powyżej opisaną metodę stosujemy w każdym josp-ie dla każdej specyfiki z ogólnej listy „kandydatów-specyfik” uzyskanych np. poprzez ankietyzację komórek organizacyjnych statystyki publicznej. Przy tym typujące komórki statystyki publicznej nie muszą być przekonane o słuszności wyboru swojego „kandydata” – do oceny tego służy właśnie prezentowana tutaj metoda wraz z ekspertami, którzy ją realizują.

W następnym rozdziale przedstawimy przykład liczbowy ilustrujący postępowanie w zmodyfikowanej ważonej i rozmytej metodzie delfickiej gwarantujący uzyskanie w II rundzie wspomnianej metody zadowalających wyników akceptowanych przez kierownictwo organizacji. Postępowanie przeprowadzimy w dwóch rundach dla josp-u dla „kandydata-specyfiki” np. dla S_5 z listy (współpraca transgraniczna). Dodatkowo założymy, że kierownictwo organizacji traktuje każdą pozycję z tej listy binarnie – „jest”, albo „nie jest” specyfiką statystyki publicznej – w związku z czym do każdej z trzech ocen $w_i'' \cdot A_1, w_i'' \cdot A_2, w_i'' \cdot A_3$ eksperta E_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) dodajemy liczbę $\frac{1}{2}$ obrazującą początkowy stopień przynależności do zbioru specyfik statystyki publicznej, co uwidocznimy w odpowiednich kolumnach niżej zamieszczonych dwóch tabel. Łatwo przy tym zauważyć, że dla $n \geq 4$ zachodzi zależność:

$$w_i'' \cdot A_i + \frac{1}{2} \leq 1, \forall i \in N \text{ (} N \text{ – zbiór liczb naturalnych: } n \geq 4 \text{)}. \quad (3)$$

Spełniony bowiem jest następujący ciąg równań i nierówności:

$$w_i'' \cdot A_i + \frac{1}{2} = (w_i' + p) \cdot A_i + \frac{1}{2} = \left(\frac{k}{m_i} \cdot \frac{1}{n} + p \right) \cdot A_i + \frac{1}{2}$$

Ponieważ $A_i \leq 1$ (z definicji), więc wystarczy wykazać, że wyrażenie $\left(\frac{k}{m_i} + p \right) \leq \frac{1}{2}$.

Zgodnie z przyjętym założeniem, że $|R_i| = m_i \geq k \geq 2$ oraz z faktem, że:

$0 \leq 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k}{m_i} \leq 1$ (wyrażenie $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k}{m_i}$ przyjmuje maksymalną wartość 1 przy $k = m_i$), zachodzą następujące zależności:

$$\left(\frac{k}{m_i} \cdot \frac{1}{n} + p \right) = \frac{k}{m_i} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k}{m_i}}{n} = \frac{k}{n \cdot m_i} + \frac{1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k}{m_i}}{n} = \frac{k + m_i \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k}{m_i} \right)}{n \cdot m_i} \leq \frac{k}{n \cdot m_i} \leq \frac{k + m_i}{n \cdot m_i} \leq \frac{2m_i}{n \cdot m_i} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

Ostatnia nierówność wynika z założenia, że $n \geq 4$.

3. Przykład praktyczny

Założmy, że w wyniku zastosowania kroków 1 i 2 eksperci ustalili, że zbiór $R_w = \{2, 1, 9, 8\}$, czyli $k = 4$. Dalej założmy, że dla każdego eksperta E_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) mamy następujący rozkład zbiorów R_i z listy reguł L :

$R_1 = \{(1), (2), (3), (4), (5), (8), (9)\}$, czyli $m_1 = 7$ dla eksperta E_1 ;

$R_2 = \{(1), (2), (4), (8), (9), (10)\}$, czyli $m_2 = 6$ dla eksperta E_2 ;

$R_3 = \{(1), (2), (6), (7), (8), (9)\}$, czyli $m_3 = 6$ dla eksperta E_3 ;

$R_4 = \{(1), (2), (4), (8), (9)\}$, czyli $m_4 = 5$ dla eksperta E_4 ;

$R_5 = \{(1), (2), (7), (8), (9), (11)\}$, czyli $m_5 = 6$ dla eksperta E_5 .

Oczywiście $R_w = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5 = \{2, 1, 9, 8\}$.

Obliczmy kolejno wartości $w_i'' = w_i' + p$ dla każdego eksperta E_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Mamy odpowiednio:

$$p = \frac{[1 - \frac{1}{5} (\frac{4}{7} + \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \frac{4}{5} + \frac{4}{6})]}{5} = \frac{1}{5} \cdot [1 - \frac{1}{5} (\frac{4}{7} + 3 \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{5})] = \frac{1}{5} \cdot [1 - \frac{1}{5} (\frac{4}{7} + 2 + \frac{4}{5})] = \frac{57}{875};$$

$$w_1'' = w_1' + p = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{5} + \frac{57}{875} = \frac{4}{35} + \frac{57}{875} = \frac{157}{875};$$

$$w_2'' = w_2' + p = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{57}{875} = \frac{4}{30} + \frac{57}{875} = \frac{1042}{5250};$$

$$w_3'' = w_3' + p = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{57}{875} = \frac{4}{30} + \frac{57}{875} = \frac{1042}{5250};$$

$$w_4'' = w_4' + p = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{57}{875} = \frac{4}{25} + \frac{57}{875} = \frac{197}{875};$$

$$w_5'' = w_5' + p = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{57}{875} = \frac{4}{30} + \frac{57}{875} = \frac{1042}{5250}.$$

Zgodnie ze wzorem (2) mamy:

$$\sum_{i=1}^5 w_i'' = w_1'' + w_2'' + w_3'' + w_4'' + w_5'' = \frac{157}{875} + \frac{197}{875} + 3 \cdot \frac{1042}{5250} = \frac{354}{875} + \frac{3126}{5250} = \frac{2124 + 3126}{5250} = \frac{5250}{5250} = 1.$$

Tak więc, suma wag ekspertów jest zestandaryzowana do 1.

W tabeli 3 przedstawiono – uwzględniając przykładowe oceny ekspertów podane (procenty przedstawiono w ułamku dziesiętnym) w kolumnach 4, 6, 8 – wyniki w postaci poszczególnych liczb trójkątnych: LT_1 , LT_2 , LT_3 , LT_4 , LT_5 oraz wyliczona jest średnia liczb trójkątnych $L_{\text{śred}}$ równa **(0,5301; 0,6403; 0,6356)**. Jak widać z obliczonych wartości w tabeli, zobiektywizowane oceny ekspertów różnią się w kolumnie 5 („mało prawdopodobna przynależność”) – najbardziej odległe są od siebie oceny ekspertów E_2 i E_4 . Natomiast w kolumnie 7 („pewna przynależność”) najbardziej odległe są zobiektywizowane oceny między ekspertami E_5 i E_2 (ocena eksperta E_3 ma w zaokrągleniu taką samą wartość jak eksperta E_3 , ale w rzeczywistości jest wyższa niż eksperta E_2). W kolumnie 9 („bardzo prawdopodobna przynależność”) największa różnica występuje między ekspertami E_3 i E_5 , mimo że największa rozpiętość % (kolumna 8) występuje między ekspertami E_1 i E_5 – wchodzi tu w grę różnica między wagami ekspertów – kolumna 2 w tabeli 3. Największą wagę wśród pięciu ekspertów posiada ekspert E_4 i wynosi ona $\frac{197}{875} = \frac{1182}{5450}$. Załóżmy, że – w związku z tym, iż wyniki pierwszej rundy nie są zdaniem kierownictwa zadowalające – postanowiono przeprowadzić drugą rundę zmodyfikowanej procedury. Po weryfikacji swoich decyzji eksperci zaproponowali wyniki przedstawione w tabeli 4. Jak widać, średnie wartości w obu tabelach są zbliżone, co świadczy o stabilizacji ocen ekspertów. W zaokrągleniu do dwóch miejsc po przecinku wyniki są dla wszystkich trzech średnich identyczne, co widać poprzez porównanie odpowiednich kolumn (kolumny 5, 7, 9 obu tabel). Również różnice między dwiema skrajnymi wartościami ważonych zobiektywizowanych ocen ekspertów w kolumnach 5, 7, 9 w tabeli 4 są mniejsze niż w tabeli 3. Kierownictwo może więc uznać to za wystarczającą przesłankę do zakończenia procedury i akceptacji uzyskanych wyników. W praktyce, do ustalenia wyników tą metodą wystarczy od 2 do 3 rund. **Wyostrajając liczbę trójkątną z tabeli 4 zgodnie ze wzorem (1) w wersji ii. wyliczamy wyrażenie:**

$$W = \frac{0,5345+0,6492+0,6328}{3} = \frac{1,8165}{3} = 0,6055.$$

Ponieważ wyrażenie $0 \leq W \leq 1$, co wynika ze wzoru (3) i z tego, że zwykła średnia arytmetyczna liczb ≤ 1 jest również ≤ 1 , przyjmujemy, że wartość powyżej **0,6** wskazuje na przynależność rozpatrywanej specyfiki S_5 do zbioru specyfik statystyki publicznej.

4. Podsumowanie

Omówiona w niniejszym artykule koncepcja wykorzystania zmodyfikowanej przez autorów znanej metody heurystycznego podejmowania decyzji zwana metodą delficką pomaga rozwiązać dwa podstawowe problemy:

- 1) Identyfikację specyfik statystyki publicznej;
- 2) Obiektywizację ocen eksperckich poprzez odpowiednie skonstruowanie normalizacji wag w ważonej metodzie delfickiej, która uwzględnia stopień zbieżności reguł wnioskowania grona ekspertów.

Identyfikacja specyfik statystyki publicznej może stanowić pewną trudność nawet dla specjalistów statystyków zajmujących się poszczególnymi dziedzinami statystyki publicznej, gdyż przeważnie dany specjalista nie ogarnia całości funkcjonowania swojej organizacji, a ona sama może nie do końca rozumieć procesów zachodzących wewnątrz niej samej i potrafić rozeznaczyć efekty takich działań (np. procesy nieformalne – ukryte lub nieuświadomione), co jest zresztą w pewnym sensie naturalne i zrozumiałe – zwłaszcza przy braku modelu informacyjnego.

Przedstawiona w artykule zmodyfikowana ważona metoda delficka uwzględniająca technikę wnioskowania rozmytego oraz nowy algorytm przypisywania znormalizowanych wag ekspertom może w znacznym stopniu ułatwić podejmowanie decyzji nie tylko związanych z zagadnieniami czysto statystycznymi, ale również w innych obszarach, mniej lub bardziej związanych z narzędziami stosowanymi w sztucznej inteligencji.

Bibliografia

1. Bojadziev G., Bojadziev M.: Fuzzy logic for Business, Finance and Management. World Scientific, Singapore 1999.
2. Dubois D., Prade H.: Fuzzy sets and Systems: Theory and Applications. Mathematics in Science Engineering, Academic Press, Inc., vol. 144, San Diego 1980.
3. Kacprzyk J.: Wieloetapowe sterowanie rozmyte. WNT. Warszawa 2001.
4. Karnik N.N., Mendel J. M.: An Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems. University of Southern California, Los Angeles 1998.
5. Mazur Z., Pec J.: Diagnoza informatyki statystycznej w aspekcie zarządzania bezpieczeństwem informacji, [w:] Metody w badaniach naukowych. Wybrane problemy i zastosowania, str. 57–77, PTI, Warszawa 2016.
6. Mazur Z., Pec J.: Analiza ryzyka II poziomu w 3-poziomym hierarchicznym modelu zarządzania bezpieczeństwem informacji uwzględniająca specyfiki statystyki publicznej.

Nierówności Społeczne a Wzrost Gospodarczy, Uniwersytet Rzeszowski, Rzeszów 2017 (przyjęte do druku).

7. Rutkowski L.: Metody i techniki sztucznej inteligencji. PWN, Warszawa 2009.
8. Zadeh L. A.: Fuzzy sets. "Information and Control", No. 8, p. 338–353, Berkeley 1965.